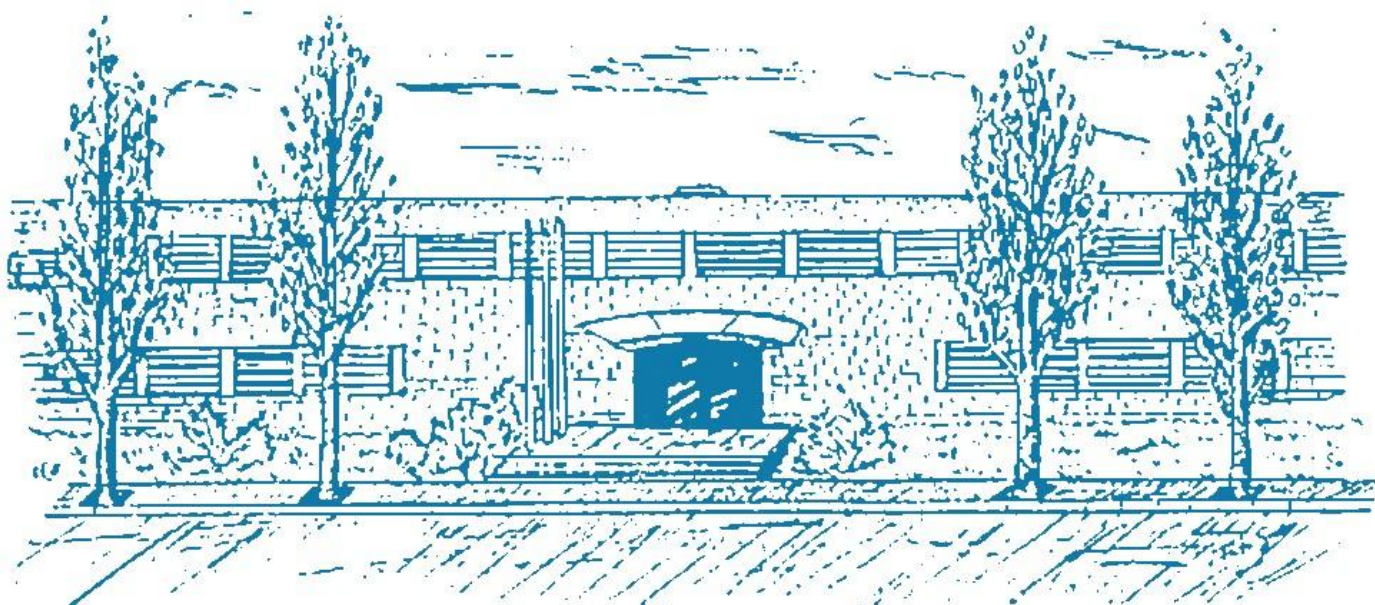


UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BarcelonaTech (UPC)
FME – FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

GRAU EN MATEMÀTIQUES
TREBALL FI DE GRAU

Grup fonamental i espais recobridors



Autor: Raúl Toribio Abalde

Directors: Jordi Delgado Rodríguez i Enric Ventura Capell

Departament: Matemàtiques

Barcelona, maig 2026



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en Matemàtiques
Treball de fi de grau

Grup fonamental i espais recobridors

Raúl Toribio Abalde

Supervisat per Jordi Delgado Rodríguez i Enric Ventura Capell

Maig 2026

Vull agrair als meus tutors, el Jordi Delgado i l'Enric Ventura, haver-me donat l'oportunitat de conèixer el tema d'aquest treball, el temps dedicat cada setmana a parlar-ne i l'ajuda que m'han proporcionat per a dur-lo a terme.

Abstract

El teorema de classificació d'espais recobridors arconnexos afirma que, sota les hipòtesis adequades, hi ha una correspondència entre els espais recobridors arconnexos d'un espai topològic i els subgrups del seu grup fonamental. Aquesta bijecció té moltes aplicacions en teoria de grups, especialment per a estudiar els subgrups dels grups lliures, permetent estudiar-los en el context topològic dels espais recobridors. L'objectiu principal d'aquest treball és demostrar el teorema de classificació. En els dos primers capítols presentem els resultats bàsics sobre el grup fonamental d'un espai topològic i la teoria d'espais recobridors. Demostrem el teorema de classificació en el tercer. En l'últim capítol, apliquem la teoria anterior per a deduir resultats clàssics sobre els subgrups dels grups lliures.

Paraules clau

grup fonamental, espai recobridor, teorema de Seifert-van Kampen, teorema de classificació d'espais recobridors arconnexos, grup lliure, teorema de Nielsen-Schreier, fórmula de Marshall Hall

Abstract

The classification theorem for path-connected covering spaces states that, under suitable hypotheses, there is a correspondence between path-connected covering spaces of a topological space and subgroups of its fundamental group. This correspondence has many applications in group theory, especially in the study of subgroups of free groups, allowing them to be studied in the topological framework of covering spaces. The main goal of this thesis is to prove the classification theorem. In the first two chapters, we present the basic results concerning the fundamental group of a topological space and the theory of covering spaces. In the third chapter, we prove the classification theorem. In the final chapter, we apply the previous theory to deduce classical results on subgroups of free groups.

Keywords

fundamental group, covering space, Seifert-van Kampen theorem, classification theorem for path-connected covering spaces, free group, Nielsen-Schreier theorem, Marshall Hall formula

Índex

Introducció	3
1 El grup fonamental	4
1.1 Definicions	4
1.2 Morfismes induïts	8
1.3 Invariància homotòpica	9
1.4 Alguns exemples	11
1.5 Producte lliure de grups i grups lliures	12
1.6 Teorema de Seifert-van Kampen	14
2 Espais recobridors	24
2.1 Definicions i exemples	24
2.2 Lema d'aixecament d'homotopies	27
2.3 Aplicacions del lema d'aixecament d'homotopies	29
3 Classificació d'espais recobridors arconexos	32
3.1 Existència d'espais recobridors	32
3.2 Lemes d'aixecament generals	38
3.3 Unicitat d'espais recobridors	39
3.4 Classificació d'espais recobridors arconexos	43
4 Aplicacions a teoria de grups	45
4.1 Subgrups dels grups lliures	45
4.2 Grafs i el teorema de Nielsen-Schreier	48
4.3 Subgrups d'índex finit dels grups lliures de rang finit	52
5 Conclusions	56
Referències	57

Introducció

Una característica recurrent en matemàtiques és l'aparició de correspondències profundes entre objectes de naturalesa aparentment diferent, que ens permeten traduir problemes d'una disciplina a una altra, on de vegades descobrim que resulten molt més fàcils de tractar. Veiem exemples d'aquest tipus de fenòmens des dels primers anys de la carrera, com la correspondència que ens dona l'àlgebra lineal entre varietats lineals i sistemes d'equacions lineals, permetent-nos transformar problemes geomètrics en algebraics, i viceversa. Més endavant veiem la culminació d'aquesta idea en el Nullstellensatz de Hilbert, relacionant ideals d'anells de polinomis amb varietats algebraiques, o la bijecció entre extensions de cossos i subgrups d'un grup de permutacions que dona lloc a la teoria de Galois.

En aquest treball estudiem una altra d'aquestes correspondències, relacionant la teoria de grups i la topologia. Donat un espai topològic, podem assignar-li un grup, el seu grup fonamental, que en un cert sentit mesura els seus forats 1-dimensionals. D'altra banda, tenim els espais recobridors d'un espai topològic X . Intuïtivament, un espai recobridor de X és un espai $\tilde{X}$ juntament amb una aplicació $p: \tilde{X} \rightarrow X$ que localment és un homeomorfisme, però que no és necessàriament injectiva (la definició exacta és una mica més restrictiva, però això ens serveix per a fer-nos una primera idea). L'exemple paradigmàtic d'espai recobridor és el recobriment de la circumferència per la recta real que consisteix a enrotllar la recta en una hèlix i projectar-la sobre la circumferència (veure la Figura 7).

De nou, la connexió entre l'àlgebra i la geometria es manifesta en el fet que hi ha una correspondència entre els subgrups del grup fonamental d'un espai i els seus espais recobridors arconnexos. Propietats dels subgrups com el seu índex, la seva classe d'isomorfisme o si dos d'ells són conjugats tenen traduccions naturals en els seus espais recobridors corresponents. L'objectiu principal d'aquest treball és demostrar aquesta correspondència i les seves propietats, i utilitzar-la per a demostrar resultats de teoria de grups en el context dels espais recobridors, que resulta més visual.

Al Capítol 1 definim el grup fonamental d'un espai topològic i en demostrem les propietats bàsiques. Al final del capítol demostrem el teorema de Seifert-van Kampen, resultat fonamental per a reduir el càlcul del grup fonamental d'un espai al d'altres de més senzills.

Malgrat tota la teoria sobre el grup fonamental desenvolupada al Capítol 1, només haurem calculat formalment grups fonamentals trivials. L'objectiu del Capítol 2 és calcular formalment el grup fonamental no trivial més senzill, el de la circumferència. Per a fer-ho, els espais recobridors apareixen de forma natural, així que la major part del capítol està dedicada a desenvolupar-ne la teoria bàsica.

El Capítol 3 és la part central del treball i continuació natural dels darrers resultats del Capítol 2, concloent amb el teorema de classificació d'espais recobridors arconnexos, que dona la correspondència entre espais recobridors arconnexos i subgrups del grup fonamental.

Finalment, al Capítol 4 utilitzem la correspondència per a resoldre problemes propis de la teoria de grups traduint-los a qüestions sobre espais recobridors, que tenen una interpretació geomètrica molt clara. Concretament, ens centrem en l'estudi dels subgrups dels grups lliures. La teoria desenvolupada en els capítols anteriors és especialment útil en aquest cas perquè els espais recobridors corresponents als subgrups d'un grup lliure es poden codificar utilitzant grafs. Des d'aquesta perspectiva, utilitzant eines topològiques i de teoria de grafs, demostrem resultats clàssics com el teorema de Nielsen-Schreier i la fórmula de Marshall Hall per al nombre de subgrups d'un grup lliure que tinguin un índex finit fixat.

1. El grup fonamental

Donat un espai topològic X , anem a construir un grup, el seu grup fonamental. Intuïtivament, el grup fonamental detecta els forats 1-dimensionals de l'espai X . Per a fer-ho utilitza la idea següent. Pensem en el pla $X = \mathbb{R}^2$. Intuïtivament és clar que no té forats. Una manera de justificar-ho és pensar que, si dibuixem una corba contínua començant en un punt $x_0 \in X$ i que acabi en el mateix punt, podem deformar-la contínuament dins de X fins a contreure-la completament al punt x_0 . Si fem un forat al pla, per exemple, eliminant el punt $(0, 0)$, és a dir, considerant $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, això deixa de ser cert. En efecte, comencem en un punt x_0 qualsevol d'aquest espai i dibuixem una corba començant a x_0 i que torni a x_0 després de fer una volta sencera al voltant del forat. Ara no hi ha manera de deformar contínuament la corba dins de X fins a contreure-la a x_0 : el forat ens talla el pas. Podríem tallar la corba per a poder travessar el forat, però això ens faria perdre la continuïtat de la deformació. Per tant, el fet que existeixi una corba tancada en x_0 que no es pugui deformar en el punt x_0 ens indica que l'espai X té un forat.

La manera de formalitzar això és considerar el conjunt de camins en X tancats en x_0 mòdul homotopia de camins. El paper de l'homotopia és fer que veiem iguals camins que es puguin deformar l'un en l'altre. Per tant, la intuïció de dalt ens diu que si aquest conjunt té més d'un element, aleshores és que l'espai té algun forat. Veurem, de fet, que podem dotar aquest conjunt d'estructura de grup de manera natural, donant lloc al grup fonamental. Depenent de quin grup sigui podrem saber més que no tan sols si l'espai té o no forats (que es tradueix en si el grup és trivial o no). Per exemple, és clar intuïtivament que un espai sense forats no pot ser homeomorf a un espai que sí que en tingui. Això serà una conseqüència immediata dels resultats més generals de la Secció 1.2. Concretament, que espais homeomorfs tenen necessàriament grups fonamentals isomorfs. Diem que el grup fonamental és un invariant topològic.

1.1 Definicions

Per a començar hem de definir què és un camí en un espai topològic X .

Definició 1.1. Donat un espai topològic X , un *camí* en X és una aplicació contínua $\gamma: I \rightarrow X$, on I és l'interval $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ amb la topologia que hereta com a subespai de $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana.

Intuïtivament, identificarem dos camins en X si podem deformar contínuament un fins a obtenir l'altre, deixant fixos els extrems del camí durant tot el procés. Recordem la definició d'aplicacions homòtopes:

Definició 1.2. Donats dos espais topològics X, Y i dues aplicacions contínues $f, g: X \rightarrow Y$, diem que f i g són *homòtopes*, i escrivim $f \sim g$ si existeix una aplicació contínua $F: X \times I \rightarrow Y$ (on dotem $X \times I$ de la topologia producte) satisfent que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{i} \quad F(x, 1) = g(x)$$

per a tot $x \in X$. En aquest cas diem que F és una *homotopia* entre f i g .

Aquesta noció d'homotopia no ens és suficient per a reproduir la idea de dalt de quan volem identificar dos camins. Concretament, hem d'assegurar-nos que els extrems dels camins no es moguin durant l'homotopia.

Definició 1.3. Donat un espai topològic X i dos camins $\gamma, \delta: I \rightarrow X$, diem que són *camins homòtops*, i escrivim $\gamma \simeq \delta$, si $\gamma(0) = \delta(0) =: x_0$ i $\gamma(1) = \delta(1) =: x_1$ i existeix una aplicació contínua $F: I \times I \rightarrow X$ (on dotem $I \times I$ de la topologia producte o, equivalentment, de la induïda de l'euclidiana de $\mathbb{R}^2$) satisfent que

1. $F(s, 0) = \gamma(s)$ i $F(s, 1) = \delta(s)$ per a tot $s \in I$,
2. $F(0, t) = x_0$ i $F(1, t) = x_1$ per a tot $t \in I$.

En aquest cas, diem que $F: I \times I \rightarrow X$ és una *homotopia de camins* entre γ i δ .

Observem que, donats dos camins $\gamma, \delta: I \rightarrow X$, podem preguntar-nos si són homòtops com aplicacions ($\gamma \sim \delta$) o homòtops com camins ($\gamma \simeq \delta$). És clar que si γ i δ són camins homòtops, aleshores també són aplicacions homòtopes. Però la condició de ser camins homòtops és més forta en general, perquè demanem que els extrems dels camins s'han de quedar fixos durant tota l'homotopia. Per tant, camins que no tinguin els mateixos punts inicial i final no poden ser camins homòtops, encara que sí que puguin ser aplicacions $I \rightarrow X$ homòtopes. En tota la resta del treball, quan parlem d'homotopies entre camins $\gamma, \delta: I \rightarrow X$ sempre ens referirem a l'homotopia de camins de la Definició 1.3, i només utilitzarem la noció d'homotopia de la Definició 1.2 quan parlem d'altres tipus d'aplicacions contínues i no de camins.

Sabem que la definició clàssica d'homotopia d'aplicacions és una relació d'equivalència. Vegem que l'homotopia de camins també ho és.

Proposició 1.4. *La relació d'homotopia de camins és una relació d'equivalència.*

Demostració. Comprovem les propietats que defineixen les relacions d'equivalència. Tots els camins tenen punts inicial i final x_0 i x_1 , respectivament.

- Reflexivitat. Donat un camí $\gamma: I \rightarrow X$, tenim que $\gamma \simeq \gamma$ a través de l'homotopia de camins $F: I \times I \rightarrow X$, $F(s, t) = \gamma(s)$. És contínua perquè γ ho és i clarament satisfà les propietats de la definició.
- Simetria. Suposem que γ i δ són homòtops a través de $F: I \times I \rightarrow X$. Aleshores $G: I \times I \rightarrow X$, $G(s, t) = F(s, 1 - t)$ és una homotopia de camins entre δ i γ .
- Transitivitat. Suposem que tenim $\gamma \simeq \delta \simeq \eta$ a través d'homotopies de camins $F: I \times I \rightarrow X$ i $G: I \times I \rightarrow X$, respectivament. Aleshores podem construir la següent homotopia de camins $H: I \times I \rightarrow X$ entre γ i η :

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] , \\ G(s, 2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] . \end{cases}$$

Com que F i G són homotopies de camins entre γ i δ i entre δ i η , respectivament, tenim que $H(s, 0) = F(s, 0) = \gamma(s)$ i $H(s, 1) = G(s, 1) = \eta(s)$ per a tot $s \in I$. Pel mateix motiu, com que per a tot $t \in I$ tenim que $F(0, t) = G(0, t) = x_0$ i $F(1, t) = G(1, t) = x_1$, deduïm que $H(0, t) = x_0$ i que $H(1, t) = x_1$ per a tot $t \in I$.

Per tant, només queda veure que H és contínua. Però F i G ho són, de forma que cada tram de la definició de H és continu. Pel lema d'enganxament, només hem de comprovar que les dues definicions coincideixen en la intersecció dels dos trams, $I \times [0, \frac{1}{2}]$ i $I \times [\frac{1}{2}, 1]$, que són tancats. Però, en efecte, $F(s, 2 \cdot \frac{1}{2}) = F(s, 1) = \delta(s) = G(s, 1) = G(s, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ per a tot $s \in I$. $\square$

Denotarem la classe d'equivalència d'un camí $\gamma: I \rightarrow X$ per la relació d'homotopia de camins com $[\gamma]$.

Sempre que el punt final d'un camí γ coincideixi amb el punt inicial d'un altre δ podem definir la concatenació dels dos camins, és a dir, el camí que recorre γ en la primera meitat del temps i continua recorrent δ durant la segona meitat:

Definició 1.5. Donats dos camins $\gamma, \delta: I \rightarrow X$ tals que $\gamma(1) = \delta(0)$, definim la *concatenació de γ amb δ* com el camí $\gamma * \delta: I \rightarrow X$ següent:

$$(\gamma * \delta)(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] , \\ \delta(2s - 1), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] . \end{cases}$$

La continuïtat de $\gamma * \delta$ és clara pel lema d'enganxament.

Observació 1.6. La concatenació respecta la relació d'homotopia de camins, en el sentit que si $\gamma \simeq \gamma'$ i $\delta \simeq \delta'$, aleshores $\gamma * \delta \simeq \gamma' * \delta'$. Basta construir una homotopia de camins que imiti l'homotopia de camins entre γ i γ' en la primera meitat del camí i l'homotopia de camins entre δ i δ' en la segona meitat. Formalment, si $F: I \times I \rightarrow X$ i $G: I \times I \rightarrow X$ són homotopies de camins entre γ i γ' i entre δ i δ' , respectivament, aleshores

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] , \\ G(2s - 1, t), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] , \end{cases}$$

que és contínua pel lema d'enganxament, és clarament una homotopia de camins entre $\gamma * \delta$ i $\gamma' * \delta'$.

La concatenació no ens permet construir un grup en el conjunt de classes d'homotopia de camins perquè no podem operar dos camins qualssevol: ens cal que el punt final d'un sigui l'inicial de l'altre. Però si fixem un punt base $x_0 \in X$ i ens restringim només a camins que comencin i acabin en x_0 sí que podrem concatenar dos qualssevol d'ells. Aquest tipus de camins els anomenem tancats en x_0 :

Definició 1.7. Diem que un camí $\gamma: I \rightarrow X$ és *tancat en $x_0 \in X$* si $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Anem a veure que el conjunt de camins tancats en un $x_0 \in X$ fixat, sempre i quan identifiquem camins mòdul homotopia de camins, és un grup amb l'operació de concatenació.

Proposició 1.8. Donat un espai topològic X i un punt $x_0 \in X$, el conjunt de classes d'homotopia de camins tancats en x_0 , $\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] \mid \gamma: I \rightarrow X \text{ camí tancat en } x_0\}$, és un grup amb el producte $[\gamma][\delta] := [\gamma * \delta]$.

Demostració. Observem en primer lloc que l'operació està ben definida: el camí $\gamma * \delta$ està ben definit donat que $\gamma(1) = \delta(0) = x_0$, el producte $[\gamma * \delta]$ està a $\pi_1(X, x_0)$ perquè $\gamma * \delta$ és tancat donat que $\gamma(0) = \delta(1) = x_0$, i no depèn dels representants de $[\gamma]$ i $[\delta]$ per l'Observació 1.6.

De cara a la resta de la demostració, anomenem reparametrització d'un camí $\gamma: I \rightarrow X$ a la composició $\gamma \circ \varphi: I \rightarrow X$ per a $\varphi: I \rightarrow I$ qualsevol aplicació contínua amb $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$. Intuïtivament, una reparametrització d'un camí fa el mateix recorregut, només que a velocitats diferents. Si reparametritzem un camí γ , la seva classe d'homotopia de camins no canvia, és a dir, $\gamma \simeq \gamma \circ \varphi$ per a qualsevol reparametrització $\gamma \circ \varphi$. En efecte, $F: I \times I \rightarrow X$ definida per $F(s, t) = \gamma(t\varphi(s) + (1 - t)s)$ és una homotopia de camins entre γ i $\gamma \circ \varphi$, que està ben definida perquè $t\varphi(s) + (1 - t)s \in I$ per a tot $s, t \in I$ perquè I és convex.

Comprovem l'associativitat. Donats $[\gamma], [\delta], [\eta] \in \pi_1(X, x_0)$, vegem que $[(\gamma * \delta) * \eta] = [\gamma * (\delta * \eta)]$, és a dir, que $(\gamma * \delta) * \eta \simeq \gamma * (\delta * \eta)$. Observem que no són iguals. En el primer cas, γ i δ es recorren en un quart del temps cadascun i η en l'altra meitat, mentre que en l'altre cas γ es recorre en la primera meitat del temps i aleshores δ i η es recorren en una quarta part del temps cadascun. Però un és una reparametrització de l'altra: si considerem $\varphi: I \rightarrow I$ definida per

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s, & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ s - \frac{1}{4}, & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 2s - 1, & \text{si } s \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

és a dir, l'aplicació que entre $s = 0$ i $s = \frac{1}{2}$ va linealment de 0 a $\frac{1}{4}$, entre $s = \frac{1}{2}$ i $s = \frac{3}{4}$ va linealment de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ i entre $s = \frac{3}{4}$ i $s = 1$ va linealment de $\frac{1}{2}$ a 1, se satisfà que $((\gamma * \delta) * \eta) \circ \varphi \simeq \gamma * (\delta * \eta)$. Per tant, pel que acabem de veure, tenim que $(\gamma * \delta) * \eta \simeq \gamma * (\delta * \eta)$, que és el que volíem.

Vegem que $\pi_1(X, x_0)$ té element neutre: la classe del camí constant en $x_0 \in X$: $[c_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$. Anem a veure doncs que, donat $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, es té que $[\gamma][c_{x_0}] = [\gamma]$, és a dir, que $\gamma * c_{x_0} \simeq \gamma$. En efecte, $\gamma * c_{x_0}$ és una reparametrització de γ : concretament, $\gamma * c_{x_0} = \gamma \circ (\text{id} * c_1)$, on $\text{id}: I \rightarrow I$ és la identitat i $c_1: I \rightarrow I$ és l'aplicació constant igual a 1. Per tant, ja sabem que $\gamma * c_{x_0} \simeq \gamma$, com volíem. De forma completament anàloga, utilitzant que $c_{x_0} * \gamma$ és la reparametrització de γ per $\varphi = c_0 * \text{id}$, s'obté que $[c_{x_0}][\gamma] = [\gamma]$.

Vegem finalment que, donat $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, si escrivim $\bar{\gamma}: I \rightarrow X$ el camí oposat, és a dir, $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$, aleshores $[\bar{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$ és l'invers de $[\gamma]$ en $\pi_1(X, x_0)$. En efecte, per a demostrar que $[\gamma][\bar{\gamma}] = [c_{x_0}]$ hem de justificar que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq c_{x_0}$. Però si escrivim $\text{id}: I \rightarrow I$ el camí $\text{id}(s) = 1 - s$ oposat a la identitat en I , tenim que $F: I \times I \rightarrow X$ definida com $F(s, t) = \gamma((1 - t)(\text{id} * \text{id})(s))$ és una homotopia de camins entre $\gamma \circ (\text{id} * \text{id}) = \gamma * \bar{\gamma}$ i $c_{\gamma(0)} = c_{x_0}$, així que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq c_{x_0}$. De forma completament anàloga s'obté que $[\bar{\gamma}][\gamma] = [c_{x_0}]$. $\square$

Definició 1.9. Donat un espai topològic X i un punt $x_0 \in X$, anomenem *grup fonamental* de X amb punt base x_0 al grup $\pi_1(X, x_0)$ amb el producte $[\gamma][\delta] = [\gamma * \delta]$.

Observació 1.10. El subíndex 1 prové del fet que el grup fonamental és el primer d'una seqüència de grups $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, de gran importància en topologia algebraica, anomenats *grups d'homotopia*, que es defineixen de forma anàloga al grup fonamental però utilitzant el cub n -dimensional I^n en lloc de I . En aquest treball només estudiarem el grup fonamental. El lector interessat pot trobar més informació sobre els grups d'homotopia a [Hat02, Capítol 4].

Una pregunta natural és si el grup fonamental d'un espai topològic depèn del punt base que escollim. Com que la definició de $\pi_1(X, x_0)$ només involucra punts de la component arccnnexa de X que conté x_0 , només podem esperar que $\pi_1(X, x_0)$ i $\pi_1(X, x_1)$ estiguin relacionats si x_0 i x_1 estan en la mateixa component arccnnexa de X . Però si sí que ho estan, anem a veure que aleshores els grups fonamentals de X amb l'un i l'altre com a punt base són isomorfs:

Proposició 1.11. Sigui X un espai topològic. Si $x_0, x_1 \in X$ són punts tals que existeix un camí $\alpha: I \rightarrow X$ que els uneix, és a dir, amb $\alpha(0) = x_0$ i $\alpha(1) = x_1$, aleshores $\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ definida per $\hat{\alpha}([\gamma]) := [\bar{\alpha} * \gamma * \alpha]$ és un isomorfisme.

En particular, si X és arccnnex, per a qualsevol parell de punts $x_0, x_1 \in X$ es té que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

Demostració. L'aplicació $\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ definida per $\hat{\alpha}([\gamma]) = [\bar{\alpha} * \gamma * \alpha]$ és un isomorfisme. Està ben definida per l'Observació 1.6.

És un morfisme perquè $\hat{\alpha}([\gamma])\hat{\alpha}([\gamma']) = [\bar{\alpha} * \gamma * \alpha][\bar{\alpha} * \gamma' * \alpha] = [\bar{\alpha} * \gamma * \alpha * \bar{\alpha} * \gamma' * \alpha] = [\bar{\alpha} * \gamma * \gamma' * \alpha] = \hat{\alpha}([\gamma * \gamma']) = \hat{\alpha}([\gamma][\gamma'])$.

És un isomorfisme perquè té invers. En efecte, si $\beta = \bar{\alpha}$ és el camí oposat a α , aleshores $\hat{\beta}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ definida per $\hat{\beta}([\delta]) = [\bar{\beta} * \delta * \beta]$ és la inversa de $\hat{\alpha}$. En efecte, $\hat{\alpha}(\hat{\beta}([\delta])) = \hat{\alpha}([\bar{\beta} * \delta * \beta]) =$

$\hat{\alpha}([\alpha * \delta * \bar{\alpha}]) = [\bar{\alpha} * \alpha * \delta * \bar{\alpha} * \alpha] = [\delta]$ per a tot $[\delta] \in \pi_1(X, x_1)$. Anàlogament, per a tot $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, es té que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([\gamma])) = [\gamma]$. $\square$

1.2 Morfismes induïts

Anem a veure a continuació que tota aplicació contínua entre dos espais topològics que envii el punt base d'un al punt base de l'altre induïx un morfisme entre els respectius grups fonamentals.

Observació 1.12. Donats dos espais topològics X, Y i una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ que envia amb $f(x_0) = y_0$, escriurem $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Aquests punts x_0, y_0 destacats acostumaran a ser els punts base a partir dels quals construïrem els grups fonamentals de cada espai.

Proposició 1.13. Donats dos espais topològics X, Y i punts $x_0 \in X, y_0 \in Y$, tota aplicació contínua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induïx un morfisme de grups $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ definit per $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$.

Demostració. Comencem observant que f_* està ben definida. Si $[\gamma] = [\gamma']$, tenim una homotopia de camins $F: I \times I \rightarrow X$ entre γ i γ' . Aleshores $f \circ F: I \times I \rightarrow Y$ és una homotopia de camins entre $f \circ \gamma$ i $f \circ \gamma'$. Per tant, la definició donada no depèn de la tria del representant. A més, $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ és un element de $\pi_1(Y, y_0)$ per a tot $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ perquè $f \circ \gamma$ és tancat en y_0 : $(f \circ \gamma)(0) = f(x_0) = y_0 = f(x_0) = (f \circ \gamma)(1)$, on estem utilitzant que γ és tancat en x_0 .

Comprovem que f_* és un morfisme de grups. Calculem: $f_*([\gamma][\delta]) = f_*([\gamma * \delta]) = [f \circ (\gamma * \delta)] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)] = f_*([\gamma])f_*([\delta])$, on estem utilitzant que els camins $f \circ (\gamma * \delta)$ i $(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)$ són iguals (i, en particular, homòtops), com es pot comprovar escrivint quant val per definició cadascun d'ells en cada $s \in I$ i veient que coincideixen. $\square$

Comprovem que el grup fonamental és un functor entre la categoria d'espais topològics amb punt base, amb morfismes les aplicacions contínues enviant punts base a punts base, i la categoria de grups. Concretament, el que ens queda per veure és la següent proposició:

Proposició 1.14. 1. Donades aplicacions contínues $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ i $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, aleshores $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

2. Donat un espai topològic X i $x_0 \in X$, $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

Demostració. Només cal fer les comprovacions següents:

1. Donat $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, es té que $(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma])) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$.

2. Donat $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, es té que $(id_X)_*([\gamma]) = [id_X \circ \gamma] = [\gamma] = id_{\pi_1(X, x_0)}([\gamma])$. $\square$

Com a conseqüència obtenim que els grups fonamentals d'espais homeomorfs són isomorfs:

Corol·lari 1.15. Sigui $f: X \rightarrow Y$ un homeomorfisme i $x_0 \in X$. Aleshores, $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ és un isomorfisme.

Demostració. Sigui $g: Y \rightarrow X$ l'homeomorfisme invers de f . Aleshores g_* és un morfisme invers de f_* : d'una banda $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, f(x_0))}$ i d'altra $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$. $\square$

Una altra conseqüència és que el grup fonamental de qualsevol retracte $A \subseteq X$ d'un espai topològic X és isomorf a un subgrup del grup fonamental de X . A més, si A és un retracte de deformació, el seu grup fonamental és isomorf al de X . Recordem les definicions:

Definició 1.16. Sigui X un espai topològic i $A \subseteq X$ un subespai. Una *retracció de X en A* és una aplicació contínua $r: X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = \text{id}_A$, on $i: A \hookrightarrow X$ és la inclusió. Diem que $A \subseteq X$ és un *retracte de X* si existeix una retracció de X en A .

Diem que una retracció $r: X \rightarrow A$ és *de deformació* si, a més, $i \circ r: X \rightarrow X$ és homòtopa a la identitat $\text{id}_X: X \rightarrow X$ per una homotopia que no mogui els punts de A , és a dir, si existeix $F: X \times I \rightarrow X$ contínua satisfent que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x) \forall x \in X$ i $F(a, t) = a \forall a \in A, t \in I$. Diem que $A \subseteq X$ és un *retracte de deformació de X* si existeix una retracció de deformació de X en A . Abusant del llenguatge, anomenarem retracció de deformació també a l'homotopia F entre id_X i r .

Corol·lari 1.17. Sigui X un espai topològic, $A \subseteq X$ un retracte i $x_0 \in A$. Aleshores, si $i: A \hookrightarrow X$ és la inclusió, el morfisme $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ que induïx en els grups fonamentals és injectiu. En particular, $\pi_1(A, x_0)$ és isomorf a un subgrup de $\pi_1(X, x_0)$.

Si, a més, A és un retracte de deformació, aleshores i_* també és exhaustiu. Per tant, en aquest cas, $\pi_1(A, x_0)$ i $\pi_1(X, x_0)$ són isomorfs, i i_* és un isomorfisme entre ells.

Demostració. Sigui $r: X \rightarrow A$ una retracció. És a dir, una aplicació contínua tal que $r \circ i = \text{id}_A$. Per tant, passant a morfismes induïts, tenim que $r_* \circ i_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)}$. En particular, això implica que i_* és injectiva.

Si A és un retracte de deformació, considerem $F: X \times I \rightarrow X$ una retracció de deformació a A : és a dir, una homotopia satisfent que $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = r(x) \in A$ per a tot $x \in X$ i $F(a, t) = a$ per a tot $a \in A$ i $t \in I$. Aleshores, per a qualsevol camí $\gamma: I \rightarrow X$ tancat en $x_0 \in A$ es té que $G: I \times I \rightarrow X$ definida per $G(s, t) = F(\gamma(s), t)$ és una homotopia de camins entre γ i un camí $\delta(s) := G(s, 1) = F(\gamma(s), 1)$ tancat en x_0 i totalment contingut en A . Per tant, $[\gamma] = i_*([\delta])$, on interpretem δ com un camí $I \rightarrow A$. Concloem per tant que i_* és exhaustiva. $\square$

1.3 Invariància homotòpica

Recordem el concepte d'espais homotòpicament equivalents:

Definició 1.18. Donats dos espais topològics X i Y , una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ és una *equivalència homotòpica* si existeix una inversa de f llevat d'homotopia (d'aplicacions; veure la Definició 1.2), és a dir, si existeix $g: Y \rightarrow X$ contínua tal que $f \circ g: Y \rightarrow Y$ és homòtopa a id_Y i $g \circ f: X \rightarrow X$ és homòtopa a id_X . En aquest cas, diem que f i g són *inverses homotòpiques*. Si existeix una equivalència homotòpica entre X i Y , diem que X i Y són *homotòpicament equivalents*.

Observem que si $A \subseteq X$ és un retracte de deformació, en particular, X i A són homotòpicament equivalents ($r: X \rightarrow A$ és una equivalència homotòpica, amb inversa homotòpica $i: A \rightarrow X$). Per tant, els espais homotòpicament equivalents són una generalització dels retractes de deformació. Però la noció d'espais homotòpicament equivalents és molt més general: tot retracte de deformació de X ha de ser, per definició, un subespai de X , però X pot ser homotòpicament equivalent a espais topològics arbitraris. D'altra banda, també és clar que si dos espais són homeomorfs també són homotòpicament equivalents (qualsevol homeomorfisme entre ells és en particular una equivalència homotòpica). Per tant, els espais homotòpicament equivalents també generalitzen els espais homeomorfs. Ja hem vist que si dos espais

són homeomorfs o si un és un retracte de deformació d'un altre aleshores els seus grups fonamentals són isomorfs. Anem a veure que, de fet, això generalitza a espais homotòpicament equivalents. Diem que el grup fonamental és un invariant homotòpic.

Primer necessitem el següent lema:

Lema 1.19. *Siguin $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ i $g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_1)$ aplicacions contínues. Si f i g són homòtopes, aleshores existeix un camí $\alpha: I \rightarrow Y$ de y_0 a y_1 tal que $g_* = \hat{\alpha} \circ f_*$, amb la notació de la Proposició 1.11. Concretament, si $F: X \times I \rightarrow Y$ és una homotopia entre f i g , aleshores podem triar el camí $\alpha(t) = F(x_0, t)$.*

Demostració. Sigui $\gamma: I \rightarrow X$ un camí tancat en x_0 . Hem de veure que

$$g_*([\gamma]) = \hat{\alpha}(f_*([\gamma])) \iff [g \circ \gamma] = [\hat{\alpha} \circ (f \circ \gamma)] \iff [\alpha \circ (g \circ \gamma)] = [(f \circ \gamma) \circ \alpha] \iff \alpha \circ (g \circ \gamma) \simeq (f \circ \gamma) \circ \alpha.$$

Demostrem que es té aquesta última homotopia de camins.

Considerem els camins $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow X \times I$ donats per $\gamma_0(s) = (\gamma(s), 0)$, $\gamma_1(s) = (\gamma(s), 1)$. Són clarament tancats en $(x_0, 0)$ i $(x_0, 1)$, respectivament. Considerem també el camí $\beta: I \rightarrow X \times I$ donat per $\beta(t) = (x_0, t)$. Aleshores, es té clarament que $F \circ \gamma_0 = f \circ \gamma$, $F \circ \gamma_1 = g \circ \gamma$ i $F \circ \beta = \alpha$.

Considerem l'aplicació contínua $G: I \times I \rightarrow X \times I$ donada per $G(s, t) = (\gamma(s), t)$, i els camins en $I \times I$ que recorren cadascuna de les seves arestes:

$$\begin{aligned} \delta_0(s) &= (s, 0) & \delta_1(s) &= (s, 1), \\ \eta_0(t) &= (0, t) & \eta_1(t) &= (1, t). \end{aligned}$$

Clarament tenim que $G \circ \delta_0 = \gamma_0$, que $G \circ \delta_1 = \gamma_1$, i que $G \circ \eta_0 = G \circ \eta_1 = \beta$.

Observem que els camins $\delta_0 * \eta_1$ i $\eta_0 * \delta_1$ són camins en $I \times I$ entre els punts $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Com que $I \times I$ és convex, podem considerar l'homotopia de camins $H: I \times I \rightarrow I \times I$ entre $\delta_0 * \eta_1$ i $\eta_0 * \delta_1$ donada per $H(s, t) = t(\eta_0 * \delta_1)(s) + (1 - t)(\delta_0 * \eta_1)(s)$.

Ara, $G \circ H$ és una homotopia de camins entre $\gamma_0 * \beta$ i $\beta * \gamma_1$. Per tant, $F \circ G \circ H$ és una homotopia de camins entre $(f \circ \gamma) \circ \alpha$ i $\alpha \circ (g \circ \gamma)$. $\square$

Ara ja podem concloure que el grup fonamental és un invariant homotòpic:

Teorema 1.20. *Sigui $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ contínua. Si f és una equivalència homotòpica, aleshores $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ és un isomorfisme.*

Demostració. Sigui $g: Y \rightarrow X$ una inversa homotòpica de $f: X \rightarrow Y$. No és cert necessàriament que $g(y_0) = x_0$ ni que $f(g(y_0)) = y_0$, perquè f i g només són inverses homotòpiques, i no aplicacions inverses estrictament. Posem $x_1 := g(y_0)$ i $y_1 := f(g(y_0)) = f(x_1)$. Tenim per tant els següents morfismes entre espais amb punts base:

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1).$$

Entre els grups fonamentals tenim els següents morfismes induïts (cal distingir entre els morfismes induïts per f amb els punts base x_0 i x_1 ; escrivim $(f_{x_0})_*$ i $(f_{x_1})_*$, respectivament):

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(f_{x_0})_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{(f_{x_1})_*} \pi_1(Y, y_1).$$

Per hipòtesi, $g \circ f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ és homòtop a la identitat en X . Per tant, el Lema 1.19 ens diu que existeix un camí $\alpha: I \rightarrow X$ tal que $(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (\text{id}_X)_* = \hat{\alpha}$. Sabem que l'aplicació $\hat{\alpha}$ és un isomorfisme, per la Proposició 1.11. Per tant, també ho és $g_* \circ (f_{x_0})_* = (g \circ f)_*$ i aleshores deduïm que g_* exhaustiva.

De forma completament anàloga, utilitzant que $f \circ g$ és homòtopa a la identitat en Y , deduïm que g_* és injectiva. Per tant, $g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ és un isomorfisme. Finalment, com que $(f_{x_0})_* = g_*^{-1} \circ \hat{\alpha}$ és composició d'isomorfismes, concloem que $(f_{x_0})_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ també és un isomorfisme, que és el que volíem demostrar. $\square$

1.4 Alguns exemples

Donem alguns exemples de grups fonamentals. El més senzill que ens podem plantejar és si un espai topològic té grup fonamental trivial.

Definició 1.21. Diem que un espai topològic X és *simplement connex* si és arconnex i $\pi_1(X, x_0) = 1$ per a algun (i, per tant, per a tot) punt $x_0 \in X$.

L'espai simplement connex més senzill és aquell format per un únic punt. És obvi que $\{p\}$ és arconnex, i l'únic camí en $\{p\}$ és el camí constant c_p , així que $\pi_1(\{p\}, p)$ només té un element, $[c_p]$, i és doncs el grup trivial. Tot i la trivialitat d'aquest càlcul, la invariància homotòpica ens permet concloure que tot espai que sigui homotòpicament equivalent a un punt tindrà grup fonamental trivial. Anomenem aquests espais contràctils:

Definició 1.22. Diem que un espai topològic X és *contràctil* si és homotòpicament equivalent a l'espai format per un únic punt.

És clar també tot espai contràctil X és arconnex. En efecte, sigui $f: X \rightarrow \{p\}$ una equivalència homotòpica i $g: \{p\} \rightarrow X$ una inversa homotòpica de f . Aleshores existeix una homotopia $F: X \times I \rightarrow X$ entre $g \circ f$ i id_X . Ara, per a cada punt $x \in X$, $\gamma(t) := F(x, t)$ és un camí continu de $g(p) \in X$ a x . Per tant, tots els punts de X estan connectats a $g(p)$ per un camí continu. Concatenant aquests camins i els seus oposats adequadament obtenim camins continus entre qualssevol dos punts de X .

Per tant, del paràgraf anterior i la invariància homotòpica se segueix immediatament el següent corol·lari:

Corol·lari 1.23. *Tot espai contràctil és simplement connex.* $\square$

Exemple 1.24. Tot subespai $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convex és contràctil, perquè qualsevol punt $p \in X$ és un retracte de deformació de X . En efecte, $r = c_p: X \rightarrow \{p\}$ és una retracció de deformació, perquè podem construir una homotopia $F: X \times I \rightarrow X$ entre $\text{id}_X: X \rightarrow X$ i $i \circ r: X \rightarrow X$ sense moure el punt p com $F(x, t) = tp + (1 - t)x$. És a dir, movem cada punt x cap al punt p pel segment que els uneix, que està contingut en X per convexitat. Per tant, qualsevol subconjunt convex de $\mathbb{R}^n$ és contràctil i, per tant, simplement connex.

En particular, ja podem calcular el grup fonamental d'un dels dos espais de la introducció. En efecte, el pla $\mathbb{R}^2$ és convex, així que $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) \cong 1$ per a qualsevol punt base x_0 .

Exemple 1.25. L'altre espai de la introducció era $\mathbb{R}^2$ menys un punt. Com que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ són homeomorfs per a qualssevol punts $p, q \in \mathbb{R}^2$, de cara a calcular (la classe d'isomorfisme de) el grup fonamental del pla menys un punt, podem treballar amb $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Observem que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ és homotòpicament equivalent a $\mathbb{S}^1$. En efecte, $r: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ donada per $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ és una retracció de deformació. Podem construir l'homotopia entre $\text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}}$ i $i \circ r$ portant cada punt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a $\frac{x}{\|x\|}$ pel segment de recta que els uneix.

Per tant, bastaria calcular el grup fonamental de $\mathbb{S}^1$. Prenem com a punt base $x_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Intuïtivament veiem que qualsevol camí tancat en x_0 que no doni cap volta sencera a $\mathbb{S}^1$ es pot deformar contínuament al camí constant en x_0 . D'altra banda, si considerem el camí γ_1 que dona una volta sencera a $\mathbb{S}^1$ a velocitat constant, sembla que si volguéssim deformar-lo al camí constant en x_0 no podríem fer-ho sense trencar-lo, així que no seria homòtop al camí constant. En canvi, qualsevol altre camí que acabi donant una volta sencera, encara que potser vagi canviant de velocitat o fins i tot vagi cap enrere en algun moment, sembla que sí que serà homòtop al camí γ_1 . De la mateixa manera, podem intuir que els camins que acabin donant un nombre $n \in \mathbb{Z}$ de voltes seran tots homòtops al camí γ_n que dona n voltes a velocitat constant, i que dos γ_n, γ_m amb $n \neq m$, com que donen un nombre diferent de voltes, no seran homòtops. Per tant, tindriem que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) = \{[\gamma_n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$. A més, com que $\gamma_n * \gamma_m$ dona $n + m$ voltes, tindriem que $[\gamma_n][\gamma_m] = [\gamma_n * \gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$.

Per tant, tot sembla indicar que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, però per a demostrar-ho formalment ens caldran alguns resultats sobre espais recobridors que desenvoluparem en el Capítol 2. Aconseguirem demostrar-ho a la Secció 2.3. Com que $\mathbb{Z} \not\cong 1$, ja tindrem el que avançàvem a la introducció: el pla i el pla menys un punt no són homeomorfs (de fet, ni tan sols homotòpicament equivalents), perquè els seus grups fonamentals els distingeixen. Per ara, en els exemples que seguirem donarem per suposat que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

En les properes dues seccions introduïm el teorema de Seifert-van Kampen, que ens permetrà reduir el càlcul de grups fonamentals d'un espai al càlcul dels grups fonamentals d'alguns subespais seus, cosa que ens permetrà obrir el ventall d'espais pels quals coneguem el seu grup fonamental.

1.5 Producte lliure de grups i grups lliures

Ens plantegem ara el problema de si podem deduir el grup fonamental d'un espai només a partir dels grups fonamentals d'una família de subconjunts seus que el cobreixin. Dit informalment, ens preguntem si a partir del grup fonamental de les parts es pot obtenir el grup fonamental del tot. Concretament, a la propera secció demostrarem el teorema de Seifert-van Kampen, que ens donarà una manera d'expressar el grup fonamental d'un espai X a partir dels grups fonamentals d'una família d'oberts, tots contenint el punt base $x_0 \in X$, sota unes certes hipòtesis d'arconexió per a aquests oberts i les seves interseccions.

Per a fer-nos una idea de què dirà el teorema pensem en l'espai $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ format per dues circumferències unides per un sol punt (pensem-les cadascuna de diàmetre 1 dins de $\mathbb{R}^2$). Prenem el punt base x_0 com el punt on s'uneixen. Intuïtivament, sembla que qualsevol camí en $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ tancat en x_0 ha de fer unes quantes voltes a una de les dues circumferències, continuar donant-ne unes quantes a l'altra, potser tornar a l'anterior, i així successivament. Això sí, cal que el nombre total de voltes que acabi donant sigui finit: altrament, el camí hauria de recórrer alguna de les dues circumferències un nombre infinit de vegades; aleshores, hi hauria subinterval·ls de I de longitud tan petita com volguéssim on el camí donés tota una volta sencera a aquesta circumferència, però això entra en contradicció amb la continuïtat del camí (no existiria cap $\delta > 0$ tal que qualssevol dos punts de I a distància menor que δ tinguessin imatges a distància estrictament menor que $\varepsilon := 1$, que és la distància entre el punt d'unió de les circumferències i el seu punt antipodal a la circumferència a la qual el camí dona infinites voltes).

Per tant, si $a := [\gamma]$ i $b := [\delta]$ són les classes d'homotopia de camins que donen una volta en sentit antihorari a la circumferència esquerra i dreta, respectivament, sembla que qualsevol element de $\pi_1(X, x_0)$ es pot escriure com $a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots a^{n_k} b^{m_k}$, amb $n_1, m_k \in \mathbb{Z}$, i $n_i, m_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ per a $i = 2, \dots, k$, $j = 1, \dots, k - 1$. Sembla doncs que podem recuperar el grup fonamental de X com el conjunt de "paraules" de longitud finita on cada "sí·l·laba" és un element del grup fonamental d'alguna de les dues circumferències, i

podem suposar que aquestes paraules són “reduïdes”, en el sentit que cap de les seves síl·labes és un element neutre i cap parell de síl·labes consecutives són una la inversa de l'altra.

Obtindrem aquest resultat com a corol·lari d'un teorema molt més general, el teorema de Seifert-van Kampen, que demostrarem en la secció següent. Abans, però, ja ens podem esperar que, donada una família de grups, el grup format per “paraules reduïdes de longitud finita amb síl·labes en cadascun d'aquests grups” serà important per a poder enunciar-lo. Per tant, dediquem aquesta secció a construir aquest grup formalment i a utilitzar-lo per a construir els grups lliures, que ens interessaran més endavant.

Definició 1.26. Donada una família $\{G_\alpha\}_\alpha$ de grups, el seu *producte lliure* és el grup $\prod_\alpha^* G_\alpha$ definit de la manera següent: anomenem *paraula* a qualsevol producte formal $g_1 \cdots g_k$ de longitud arbitrària però finita $k \geq 0$, on cada g_i pertany a algun grup G_{α_i} de la família (incloem la paraula buida, que denotem per 1). Anomenem *síl·laba* a cadascun dels g_i que formen una paraula. Els elements de $\prod_\alpha^* G_\alpha$ són paraules (inclosa la paraula buida) on cada síl·laba $g_i \in G_{\alpha_i}$ és diferent de l'element neutre $e_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ i cada dues síl·labes consecutives pertanyen a grups diferents, és a dir, $G_{\alpha_i} \neq G_{\alpha_{i+1}}$ per a tot i ; diem en aquest cas que són *paraules reduïdes*.

Donades dues paraules reduïdes $g_1 \cdots g_k, h_1 \cdots h_l \in \prod_\alpha^* G_\alpha$, definim el seu producte com la paraula $g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_l$. Aquesta paraula potser no és reduïda: si g_k i h_1 pertanyen a un mateix G_α , s'ha d'entendre que les combinem en una sola síl·laba $(g_k h_1) \in G_\alpha$; si $g_k h_1$ resultés ser l'element neutre de G_α , hauríem d'eliminar-lo de la paraula, i això ens podria obligar a combinar g_{k-1} i h_2 si també estiguessin en un mateix G_β , etcètera. Aquest procés acaba en algun moment, perquè la longitud de la paraula disminueix en cada pas, i la paraula amb què acabem serà reduïda. El producte en $\prod_\alpha^* G_\alpha$ és doncs la concatenació eventualment seguida de producte de dues síl·labes consecutives que siguin d'un mateix grup G_α (i d'eliminar el resultat de la paraula si una síl·laba era la inversa de l'altra). Admetem la paraula buida 1 com a paraula reduïda, i és clarament l'element neutre de $\prod_\alpha^* G_\alpha$. Per a qualsevol paraula reduïda $g_1 \cdots g_k \in \prod_\alpha^* G_\alpha$ existeix la seva inversa, que és clarament també reduïda: $g_k^{-1} \cdots g_1^{-1} \in \prod_\alpha^* G_\alpha$.

Per a poder concloure que $\prod_\alpha^* G_\alpha$ és un grup ens falta justificar que se satisfà la propietat associativa.

Proposició 1.27. *L'operació de concatenació seguida de reducció en $\prod_\alpha^* G_\alpha$ és associativa. Per tant, $\prod_\alpha^* G_\alpha$ és un grup.*

Demostració. Denotem per W el conjunt de paraules $g_1 \cdots g_k$ reduïdes, incloent la paraula buida. A cada $g \in G_\alpha$ li associem l'aplicació $L_g: W \rightarrow W$ donada per concatenar amb g per l'esquerra: $L_g(g_1 \cdots g_k) = gg_1 \cdots g_k$, on combinem g i g_1 en una sola síl·laba (gg_1) si pertanyen al mateix G_α i l'eliminem si $gg_1 = 1 \in G_\alpha$.

Donades $g, g' \in G_\alpha$, és immediat comprovar que $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$: donada una paraula reduïda $g_1 \cdots g_k$, si $g_1 \notin G_\alpha$, que $L_g \circ L_{g'}(g_1 \cdots g_k) = L_{gg'}(g_1 \cdots g_k)$ és immediat per definició; si $g_1 \in G_\alpha$, és conseqüència de l'associativitat en G_α . En particular, per a tot $g \in G_\alpha$ tenim que L_g és bijectiva, amb inversa $L_{g^{-1}}$. Per tant, l'aplicació $g \mapsto L_g$ defineix un morfisme de G_α al grup $\text{Sym}(W)$ de permutacions de W (és a dir, el conjunt d'aplicacions $W \rightarrow W$ bijectives amb l'operació de composició).

Més en general, podem definir $L: W \rightarrow \text{Sym}(W)$ com $L(g_1 \cdots g_k) := L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_k}$. L és injectiva: suposem que $L(g_1 \cdots g_k) = \text{id}_W$; aplicant ambdós costats a la paraula buida 1, obtenim que $g_1 \cdots g_k = 1$. A més, la propietat que $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$ per a $g, g' \in G_\alpha$ ens permet concloure que $L((g_1 \cdots g_k)(h_1 \cdots h_l)) = L(g_1 \cdots g_k) \circ L(h_1 \cdots h_l)$ per a qualssevol paraules reduïdes $g_1 \cdots g_k, h_1 \cdots h_l \in W$, on el producte $(g_1 \cdots g_k)(h_1 \cdots h_l)$ és la concatenació seguida de reducció.

Ara ja podem concloure que l'operació a W és associativa utilitzant l'associativitat de la composició d'aplicacions. En efecte, donades paraules reduïdes $u, v, w \in W$,

$$L(u(vw)) = L(u) \circ (L(v) \circ L(w)) = (L(u) \circ L(v)) \circ L(w) = L((uv)w)$$

i, per injectivitat de L , concloem que $u(vw) = (uv)w$. $\square$

Un cas particularment rellevant de producte lliure és aquell en què tots els factors són $\mathbb{Z}$. L'anomenem *grup lliure*.

Definició 1.28. Anomenem *grup lliure amb base A* al grup $F_A := \prod_{\alpha \in A}^* \mathbb{Z}$.

Abusant del llenguatge, per a cada $\alpha \in A$, denotem també per α un generador de la còpia α -èsima de $\mathbb{Z}$. Aleshores A es pot veure com un subconjunt de F_A . Per construcció, tot element de F_A es pot escriure com una paraula reduïda tal que totes les seves síl·labes són potències d'algun $\alpha \in A$ (amb exponent positiu o negatiu). Per exemple, els elements de $F_{\{a,b\}}$ seran paraules reduïdes en $\{a, b\}$, com $a^2b^{-1}aba^3$ o $b^{-1}a^{-4}b^3a$. Per tant, $A \subseteq F_A$ és un conjunt de generadors de F_A . Als elements $\alpha \in A \subseteq F_A$ i als seus inversos els anomenem *lletres* de F_A . Dos productes reduïts diferents de lletres (reduïts en el sentit que no apareix cap lletra seguida de la seva inversa) sempre donen resultats diferents dins de F_A . Això justifica anomenar a F_A el grup lliure amb base A .

La pregunta natural és quan dos grups lliures F_A i F_B són isomorfs. És raonable pensar que ho seran si i només si A i B tenen el mateix cardinal i, en efecte, és així. Es pot trobar una demostració a [DV24].

Donat un grup G arbitrari, anomenem *rang* de G , designat per $\text{rk}(G)$, a la mínima cardinalitat d'un conjunt de generadors de G . Per tant, és clar que $\text{rk}(F_A) \leq \#A$, i a [DV24] es demostra que es té la igualtat: $\text{rk}(F_A) = \#A$.

Per tant, llevat d'isomorfisme, hi ha un únic grup lliure de cada rang κ , que denotarem per F_κ si volem obviar amb quina base concreta A (amb $\#A = \kappa$) el considerem.

En teoria de grups, la família de grups lliures $\{F_\kappa\}_\kappa$ és d'una gran rellevància degut al fet que, d'alguna manera, contenen tota la informació possible sobre qualsevol grup. Concretament, es té el resultat següent, demostrat també a [DV24]:

Teorema 1.29. *Tot G és quocient d'un grup lliure. És a dir, per a tot grup G , existeix un cardinal κ i un subgrup normal $N \trianglelefteq F_\kappa$ tals que $G \cong F_\kappa/N$.*

Observem que aquest teorema admet dues lectures contraposades. D'una banda, podem pensar que els reticles de subgrups (normals) dels grups lliures contenen tota la informació de qualsevol grup, així que en teoria podríem dedicar-nos només a estudiar aquests reticles i podríem extreure'n tota la informació algebraica de qualsevol grup. D'altra banda, però, si d'aquests reticles podem extreure tota la teoria de grups, acabar d'entendre'ls completament ha de ser extraordinàriament complicat.

1.6 Teorema de Seifert-van Kampen

Per a calcular el grup fonamental d'espais més complicats, ja hem comentat que una de les eines més útils és el teorema de Seifert-van Kampen. La idea bàsica és la de l'exemple de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ del començament de la secció anterior. En el cas més simple, obviant hipòtesis tècniques, el teorema diu que si un espai X es pot posar com la unió d'una família $\{U_\alpha\}_\alpha$ d'oberts, tots contenint el punt base, tals que les seves interseccions dos a dos siguin simplement connexes, aleshores el grup fonamental de X amb punt base x_0 és el producte lliure dels grups fonamentals dels U_α amb punt base x_0 . Això és exactament el que hem justificat intuïtivament en l'exemple de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

El teorema de Seifert-van Kampen ens diu què passa en general si les interseccions no són necessàriament simplement connexes. Concretament, afirma que, si les interseccions dos a dos dels oberts del recobriment

són simplement connexes, aleshores el grup fonamental de X és directament el producte lliure dels grups fonamentals dels U_α , com hem dit a dalt; si no ho són, el grup fonamental de X és el producte lliure dels grups fonamentals dels U_α només que les lletres que corresponen a la classe d'homotopia d'algun camí en la intersecció de dos oberts U_α i U_β es poden operar tant com elements de $\pi_1(U_\alpha, x_0)$ com de $\pi_1(U_\beta, x_0)$.

Teorema 1.30 (de Seifert-van Kampen). *Sigui X un espai topològic i sigui $x_0 \in X$. Supposem que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ és una família d'oberts arcconnexos de X que contenen x_0 . Supposem a més que cada dos i cada tres d'ells tenen intersecció arcconnexa, és a dir, que $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in A$ les interseccions $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ i $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap U_{\alpha_3}$ són arcconnexes. Aleshores,*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N},$$

on N és el subgrup normal més petit de $\prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0)$ contenint els elements

$$(i_{\alpha\beta})_*([\gamma])(i_{\beta\alpha})_*([\gamma])^{-1}$$

per a $\alpha, \beta \in A$, $[\gamma] \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0)$, i on

$$\begin{aligned} (i_{\alpha\beta})_*: \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0) &\rightarrow \pi_1(U_\alpha, x_0) \\ (i_{\beta\alpha})_*: \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0) &\rightarrow \pi_1(U_\beta, x_0) \end{aligned}$$

són els morfismes induïts per les inclusions $i_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$ i $i_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\beta$, respectivament.

Demostració. Al llarg de tota la demostració $(i_\alpha)_*: \pi_1(U_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ denota el morfisme induït per la inclusió $i_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow X$.

Un element genèric de $\prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0)$ és una paraula reduïda $[\gamma_1]_{U_{\alpha_1}} \cdots [\gamma_k]_{U_{\alpha_k}}$, on introduïm la següent notació que utilitzarem al llarg de la demostració: posarem un subíndex a la classe d'homotopia de cada camí indicant en quin espai l'estem considerant. Així, la notació de dalt s'ha d'interpretar com que γ_i és un camí $I \rightarrow U_{\alpha_i}$ i, per tant, $[\gamma_i]_{U_{\alpha_i}}$ és un element de $\pi_1(U_{\alpha_i}, x_0)$. Com que $U_{\alpha_i} \subseteq X$, també podríem veure γ_i com un camí en X ; en aquest cas escriuríem $[\gamma_i]_X$ el corresponent element de $\pi_1(X, x_0)$. Notem que, per a un camí γ amb imatge totalment continguda en U_α , tenim que $[\gamma]_X = (i_\alpha)_*([\gamma]_{U_\alpha})$ i, per tant, aquesta notació ens serà especialment útil per a alleugerir les notacions per als morfismes induïts per les inclusions. Per exemple, en lloc d'escriure els elements que defineixen N com $(i_{\alpha\beta})_*([\gamma])(i_{\beta\alpha})_*([\gamma])^{-1}$, els denotarem per $[\gamma]_{U_\alpha}[\gamma]_{U_\beta}^{-1}$, on γ és un camí totalment contingut en $U_\alpha \cap U_\beta$. També escriurem U_i en lloc de U_{α_i} per a referir-nos al U_{α_i} on veiem un camí γ_i .

Amb aquestes notacions, per a $[\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_k]_{U_k} \in \prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0)$, definim

$$\Phi([\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_k]_{U_k}) := [\gamma_1]_X \cdots [\gamma_k]_X = [\gamma_1 * \cdots * \gamma_k]_X,$$

que representa la classe del camí que formen les γ_i vistes dins de X i concatenades. Aquest Φ defineix un morfisme $\Phi: \prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Anem a veure que és exhaustiu i que té nucli N . Amb això conclourem que es té l'isomorfisme de l'enunciat.

Comencem veient l'exhaustivitat. Donat un camí γ en X tancat en x_0 , volem trobar camins $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ tancats en x_0 tals que, per a cada i , γ_i sigui un camí contingut en U_{α_i} per a algun $\alpha_i \in A$, i satisfent que $[\gamma]_X = [\gamma_1 * \cdots * \gamma_k]_X$.

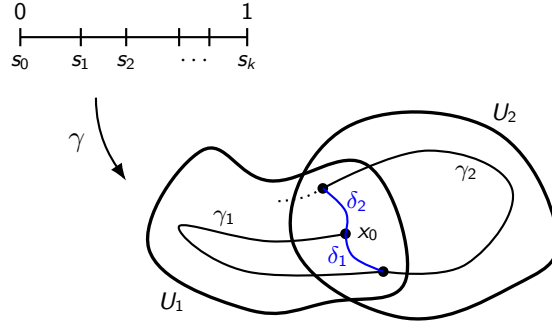


Figura 1: Construcció de la partició $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ i dels camins δ_i

Com que els U_α són oberts i γ és contínua, cada punt $s \in I$ té un entorn $V_s \ni s$ (que podem suposar un interval) tal que la seva adherència va a parar a un sol U_α per γ . Per tant, I queda recobert per intervals oberts tals que l'adherència de cadascun d'ells té imatge totalment continguda en algun U_α . Com que I és compacte, un nombre finit d'aquests intervals ja són suficients per a recobrir I . Agafant els extrems d'aquests intervals obtenim una partició $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k-1} < s_k = 1$ de I tal que per a cada $i = 1, \dots, k$ es té que $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_\alpha$ per a algun U_α . Posem $\gamma_i := \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ i $U_i := U_{\alpha_i}$ un U_α en què el camí γ_i estigui totalment contingut.

Com que $U_i \cap U_{i+1}$ és arconnex per a tot i , podem trobar camins δ_i començant al punt final de γ_i i acabant a x_0 totalment continguts en $U_i \cap U_{i+1}$. Aleshores, podem posar

$$\begin{aligned} [\gamma]_X &= [\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_k]_X = [\gamma_1 * (\delta_1 * \overline{\delta_1}) * \gamma_2 * (\delta_2 * \overline{\delta_2}) * \dots * (\delta_{k-1} * \overline{\delta_{k-1}}) * \gamma_k]_X = \\ &= [\gamma_1 * \delta_1]_X [\overline{\delta_1} * \gamma_2 * \delta_2]_X \dots [\overline{\delta_{k-1}} * \gamma_k]_X = \Phi([\gamma_1 * \delta_1]_{U_1} [\overline{\delta_1} * \gamma_2 * \delta_2]_{U_2} \dots [\overline{\delta_{k-1}} * \gamma_k]_{U_k}), \end{aligned}$$

on l'última expressió té sentit perquè el camí en el claudàtor i -èsim és un camí tancat en x_0 totalment contingut en U_i . Això és el que volíem trobar i hem demostrat doncs que Φ és exhaustiva.

Per a concloure la demostració ens falta veure que $\ker \Phi = N$. Això ens dirà, pel primer teorema d'isomorfisme, que $\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N}$.

Observem primer que $N \subseteq \ker \Phi$. Basta veure que Φ de cadascun dels elements que defineixen N és l'element neutre de $\pi_1(X, x_0)$, $[c_{x_0}]$. Prenem doncs dos índexs $\alpha, \beta \in A$ i un element $[\gamma]_{U_\alpha \cap U_\beta} \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0)$ i calculem $\Phi([\gamma]_{U_\alpha} [\gamma]_{U_\beta}^{-1})$. En efecte, es té que

$$\Phi([\gamma]_{U_\alpha} [\gamma]_{U_\beta}^{-1}) = \Phi([\gamma]_{U_\alpha}) \Phi([\gamma]_{U_\beta})^{-1} = [\gamma]_X [\gamma]_X^{-1} = [c_{x_0}].$$

Per tant, només ens queda comprovar que $\ker \Phi \subseteq N$. Per a fer-ho introduïm la següent terminologia. Donat $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, una factorització de $[\gamma]$ és un producte formal $[\gamma_1] \dots [\gamma_k]$ on

- per a cada i es té que $[\gamma_i] \in \pi_1(U_\alpha, x_0)$ per a algun α ,
- $[\gamma]_X = [\gamma_1 * \dots * \gamma_k]_X$.

Una factorització de $[\gamma]$ és doncs un element de $\prod_{\alpha}^* \pi_1(U_\alpha, x_0)$, no necessàriament reduït, que va a parar a $[\gamma]$ per Φ . Diem que dues factoritzacions de $[\gamma]$ són equivalents si podem transformar una en l'altra iterant els següents dos passos (o els seus inversos):

(a) Si dos termes consecutius $[\gamma_i]$, $[\gamma_{i+1}]$ estan en un mateix $\pi_1(U_\alpha, x_0)$, els combinem en un sol terme:

$$[\gamma_i]_{U_\alpha} [\gamma_{i+1}]_{U_\alpha} \longleftrightarrow [\gamma_i * \gamma_{i+1}]_{U_\alpha}.$$

(b) Si γ_i és un camí en $U_\alpha \cap U_\beta$, i en el producte formal s'està considerant $[\gamma_i]$ com un element de $\pi_1(U_\alpha, x_0)$, podem passar a veure'l com un element de $\pi_1(U_\beta, x_0)$:

$$[\gamma_i]_{U_\alpha} \longleftrightarrow [\gamma_i]_{U_\beta}, \quad \text{si } \gamma_i \text{ és un camí en } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Observem que el pas (a) no canvia l'element que representa la factorització en $\prod_\alpha^* \pi_1(U_\alpha, x_0)$ i el pas (b), tot i que sí que canvia l'element de $\prod_\alpha^* \pi_1(U_\alpha, x_0)$, no canvia la seva classe en el quocient $\frac{\prod_\alpha^* \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N}$: en efecte, donada una factorització $[\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_i]_{U_\alpha} \cdots [\gamma_k]_{U_k}$ on γ_i és un camí contingut en $U_\alpha \cap U_\beta$, tenim que $[\gamma_1]_{U_\alpha} [\gamma_i]_{U_\beta}^{-1} \in N$ i, doncs, que

$$\begin{aligned} & [\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_i]_{U_\alpha} \cdots [\gamma_k]_{U_k} ([\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_i]_{U_\beta} \cdots [\gamma_k]_{U_k})^{-1} = \\ & = [\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_{i-1}]_{U_{i-1}} ([\gamma_i]_{U_\alpha} [\gamma_i]_{U_\beta}^{-1}) [\gamma_{i-1}]_{U_{i-1}}^{-1} \cdots [\gamma_1]_{U_1}^{-1} \sim [\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_{i-1}]_{U_{i-1}} [\gamma_{i-1}]_{U_{i-1}}^{-1} \cdots [\gamma_1]_{U_1}^{-1} = 1, \end{aligned}$$

on $\sim$ és la relació d'equivalència que defineix el quocient $\frac{\prod_\alpha^* \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N}$. Per tant, les dues factoritzacions defineixen el mateix element en el grup quocient $\frac{\prod_\alpha^* \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N}$.

Per a veure que $\ker \Phi \subseteq N$ anem a veure que, donat $[\gamma]_X \in \pi_1(X, x_0)$, si $[\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_k]_{U_k}$ i $[\gamma'_1]_{U'_1} \cdots [\gamma'_l]_{U'_l}$ en són dues factoritzacions, aleshores són equivalents. És suficient veure això perquè dues factoritzacions equivalents representen el mateix element en $\frac{\prod_\alpha^* \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N}$.

Com que $[\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_k]_{U_k}$ i $[\gamma'_1]_{U'_1} \cdots [\gamma'_l]_{U'_l}$ són factoritzacions de $[\gamma]_X$, tenim que $\gamma_1 * \cdots * \gamma_k \simeq \gamma \simeq \gamma'_1 * \cdots * \gamma'_l$. Estrictament parlant, els camins $\gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ i $\gamma'_1 * \cdots * \gamma'_l$ no estan ben definits: caldria posar parèntesis al producte per a especificar en quin ordre concatenem els camins, perquè la concatenació només és associativa mòdul homotopia. De cara al que queda de demostració, suposem que hem triat on posar aquests parèntesis i els obviem en l'escriptura per a alleugerir la notació (les posicions concretes on els col·loquem són irrelevants per a la resta de la demostració). Tornant a on estàvem, tenim que $\gamma_1 * \cdots * \gamma_k \simeq \gamma \simeq \gamma'_1 * \cdots * \gamma'_l$. Hi ha per tant una homotopia de camins $F: I \times I \rightarrow X$ entre $\gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ i $\gamma'_1 * \cdots * \gamma'_l$. Com que els U_α són oberts i F és contínua, al voltant de cada punt $(s, t) \in I \times I$ podem trobar un rectangle obert tal que la seva adherència tingui un entorn obert que vagi a parar a un sol U_α per F . Aquests rectangles formen un recobriment per oberts de $I \times I$, que és compacte. Per tant, un nombre finit d'ells també en són un recobriment. Triant les rectes horitzontals i verticals que delimiten cadascun d'aquests rectangles trobem particions $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de I tals que per a cada $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ es té que $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ (i tot un entorn obert seu) va a parar a un sol U_α per F . Afinant la partició de les s_i si cal, podem suposar que els valors de s on els camins $\gamma_1 * \cdots * \gamma_k$ i $\gamma'_1 * \cdots * \gamma'_l$ canvien de tram són punts s_i presents a la partició. D'altra banda, afinant la partició de les t_j si cal, podem suposar que n és com a mínim 3 (és a dir, la partició tingui com a mínim tres franges horitzontals) (veure la Figura 2). Finalment, com que no només cada rectangle va a parar a un mateix U_α sinó que tot un entorn obert seu ho fa, podem pertorbar lleugerament els costats verticals dels rectangles perquè cadascun dels vèrtexs toqui com a molt tres rectangles diferents i no perdem la propietat que cada rectangle vagi a parar a un sol U_α per F . Com que hem afinat la partició de les t_j perquè n fos com a mínim 3, podem fer aquesta pertorbació només en els rectangles de les franges horitzontals interiors, sense canviar els rectangles de la primera i l'última fila (veure la Figura 2). Això ens permet assegurar que

els valors de s on els camins $\gamma_1 * \dots * \gamma_k$ i $\gamma'_1 * \dots * \gamma'_l$ canvien de tram continuen estant presents com a mínim en les particions de les arestes inferior i superior de $I \times I$, que és on realment ho necessitem. Numerem els nm rectangles que ens han quedat d'esquerra a dreta i de baix a dalt, començant pel de baix a l'esquerra (veure la Figura 3). La imatge per F de cadascun dels rectangles R_i està continguda en algun U_α . Per a cada R_i triem un tal U_α (podria ser que estigués contingut en més d'un) i li diem $U_{\alpha(R_i)}$.

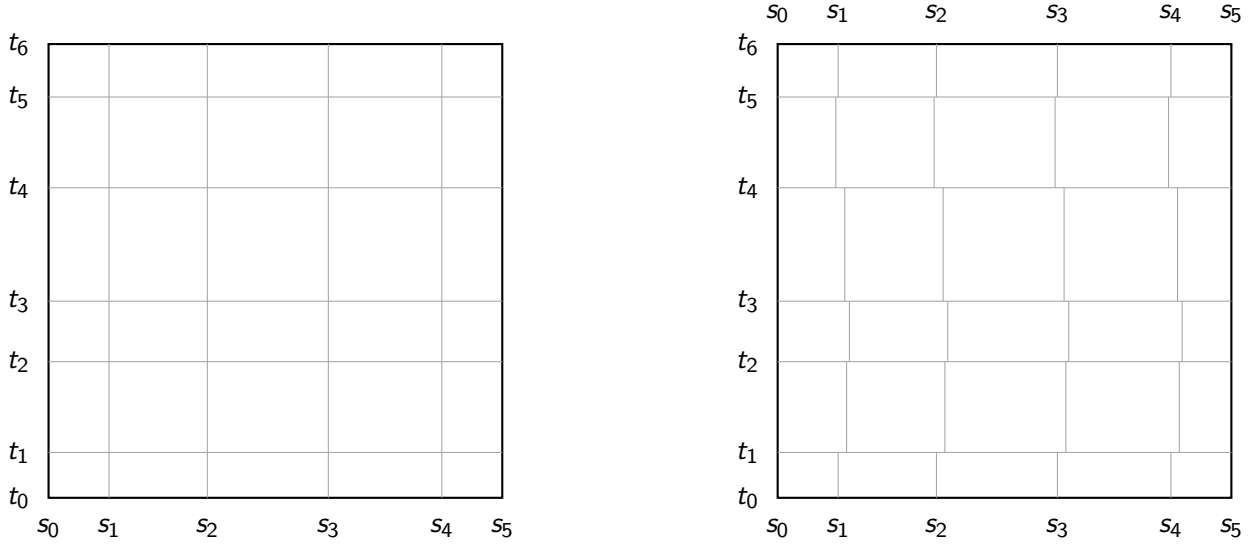


Figura 2: Quadrícula abans i després de la pertorbació

Anomenem σ_i ($i = 0, \dots, nm$) el camí en $I \times I$ que va de $(0,0)$ fins a $(1,0)$ seguint les arestes dels rectangles que fan que deixi sota seu els i primers rectangles i sobre seu la resta (veure la Figura 3). El camí σ_i difereix del camí σ_{i+1} només en les arestes del rectangle $(i+1)$ -èsim: σ_i el recorre “per sota” i σ_{i+1} “per sobre” (veure la Figura 3). Observem també que $F \circ \sigma_0$ coincideix amb el camí $\gamma_1 * \dots * \gamma_k$ i que $F \circ \sigma_{nm}$ és el camí $\gamma'_1 * \dots * \gamma'_l$ només que pre- i post-concatenat amb el camí constant a x_0 (recordem que F era una homotopia de camins entre $\gamma_1 * \dots * \gamma_k$ i $\gamma'_1 * \dots * \gamma'_l$, així que les arestes esquerra i dreta de $I \times I$ van a parar a camins constants en x_0).

Anem a utilitzar la quadrícula que hem muntat en $I \times I$ per a construir una sèrie d'elements de $\frac{\prod_{\alpha}^* \pi_1(U_{\alpha}, x_0)}{N}$ tals que cadascun d'ells i el següent siguin factoritzacions equivalents. Finalment això ens permetrà concloure que les factoritzacions $[\gamma_1]_{U_1} \dots [\gamma_k]_{U_k}$ i $[\gamma'_1]_{U'_1} \dots [\gamma'_l]_{U'_l}$ de què partíem també ho són. Volem donar una factorització de cada $[F \circ \sigma_i]_X$ mirant els camins que fa σ_i entre cada dos vèrtexs consecutius que visita. El tram de σ_i que uneix cada dos tals vèrtexs està contingut en algun rectangle (de fet, generalment estarà en dos). Per tant, F d'aquest tram estarà contingut en un sol U_α , així que voldríem veure la classe d'homotopia de F d'aquest tram com una de les síl·labes d'una factorització. Aquí ens trobem amb un problema, però. Cada síl·laba d'una factorització ha de ser un element de $\pi_1(U_\alpha, x_0)$ i, per tant, la classe d'un camí *tancat* en x_0 . En general els punts inicial i final de cada tram no seran x_0 . Però cada vèrtex està en la intersecció de com a molt tres rectangles, per construcció. Per tant, la imatge per F de cada vèrtex v està a la intersecció de un, dos o tres U_α (depenent de quants rectangles toquin v i de si els $U_{\alpha(R_i)}$ corresponents a aquests rectangles coincideixen o no). Com que els U_α són arconexos i la intersecció de cada dos i cada tres

també, per a cada vèrtex v podem trobar un camí δ_v que vagi des de $F(v)$ fins a x_0 i que estigui totalment contingut en cadascun dels $U_{\alpha(R_i)}$ corresponents als rectangles R_i que toquen v . En els vèrtexs on tinguem que $F(v) = x_0$ definim directament $\delta_v := c_{x_0}$. Caldrà fer un ajustament tècnic als camins δ_v per als vèrtexs v en les arestes inferior i superior de $I \times I$ que esmentarem més endavant.

31	32	33	34	35
25	26	27	28	29
19	20	21	22	23
13	14	15	16	17
7	8	9	10	11
1	2	3	4	5

σ_{15}

σ_{14}

Figura 3: Numeració dels rectangles R_i i els camins σ_i

Ara ja podem donar la factorització de $[F \circ \sigma_i]_X$. Les seves síl·labes són les classes d'homotopia de la imatge per F del tram que fa σ_i entre cada dos vèrtexs consecutius v, v' (que denotarem per $\sigma_{i,vv'}$), pre-concatenat amb $\bar{\delta}_v$ i post-concatenat amb $\delta_{v'}$, és a dir, $[\bar{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i,vv'}) * \delta_{v'}]$. Per a acabar de definir la factorització hem de dir dins de quin U_{α} veiem aquest camí, és a dir, de quin grup $\pi_1(U_{\alpha}, x_0)$ el considerem element. Com que $\sigma_{i,vv'}$ està contingut en un o dos rectangles, quan el posem amb F estarà contingut en els U_{α} corresponents. Per construcció dels camins δ_v i $\delta_{v'}$, tot el camí $\bar{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i,vv'}) * \delta_{v'}$ estarà també contingut en aquests U_{α} . Per tant, en general tindrem dues opcions per a triar l'obert U_{α} on veiem el camí. Triem un qualsevol dels dos. Haver triat l'altre hauria donat una factorització diferent de $[F \circ \sigma_i]_X$ però equivalent (pel pas (b)) i la resta de la demostració funciona igual amb qualsevol de les dues. Això sí, potser hem d'utilitzar la mateixa síl·laba $[\bar{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i,vv'}) * \delta_{v'}]$ en la factorització de $[F \circ \sigma_j]_X$ per a $j \neq i$. L'obert que triem per a veure aquest camí ha de ser el mateix en els dos casos.

Anem a veure ara que les factoritzacions de $[F \circ \sigma_i]_X$ i $[F \circ \sigma_{i+1}]_X$ que hem construït a dalt són equivalents. Els camins σ_i i σ_{i+1} només difereixen en les arestes del rectangle R_{i+1} . Per tant, les factoritzacions construïdes només difereixen en les síl·labes corresponents als trams de σ_i i σ_{i+1} entre vèrtexs que toquen el rectangle R_{i+1} . Cadascuna d'aquestes síl·labes és la classe d'un camí totalment contingut en el $U_{\alpha(R_{i+1})}$ on està continguda la imatge per F de R_{i+1} . En les factoritzacions, però, aquestes síl·labes potser estan considerades com elements d'un $\pi_1(U_{\alpha}, x_0)$ diferent de $\pi_1(U_{\alpha(R_{i+1})}, x_0)$. No obstant, aplicant el pas (b) podem considerar-les totes com elements de $\pi_1(U_{\alpha(R_{i+1})}, x_0)$. Ara el pas (a) ens permet ajuntar totes les síl·labes de la factorització de $[F \circ \sigma_i]_X$ corresponents a trams on σ_i recorre les arestes de R_{i+1} en una sola síl·laba de la factorització de $[F \circ \sigma_i]_X$. En aquesta nova síl·laba, els camins δ_v en vèrtexs intermedis cancel·len entre si i només queda $[\bar{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i,vv'}) * \delta_{v'}]_{U_{\alpha(R_{i+1})}}$, on v i v' són, respectivament, el primer i l'últim vèrtex de R_{i+1} que visita σ_i , i $\sigma_{i,vv'}$ és el tros de camí que fa σ_i entre aquests dos vèrtexs. Fent el mateix amb la factorització de $[F \circ \sigma_{i+1}]_X$ obtenim que és equivalent a la factorització on escrivim $[\bar{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i+1,vv'}) * \delta_{v'}]_{U_{\alpha(R_{i+1})}}$ en lloc de les síl·labes corresponents a trams on σ_{i+1} recorre les arestes de R_{i+1} .

Afirmem que $[\overline{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i,vv'}) * \delta_{v'}]_{U_{\alpha(R_{i+1})}} = [\overline{\delta}_v * (F \circ \sigma_{i+1,vv'}) * \delta_{v'}]_{U_{\alpha(R_{i+1})}}$ i que, per tant, les noves factoritzacions de $[F \circ \sigma_i]_X$ i $[F \circ \sigma_{i+1}]_X$ que acabem de construir són *la mateixa*, concloent doncs que les factoritzacions originals de $[F \circ \sigma_i]_X$ i $[F \circ \sigma_{i+1}]_X$ eren equivalents. Basta veure que $F \circ \sigma_{i,vv'}$ i $F \circ \sigma_{i+1,vv'}$ són camins homòtops per una homotopia en $U_{\alpha(R_{i+1})}$. Però $\sigma_{i,vv'}$ i $\sigma_{i+1,vv'}$ són clarament camins homòtops per una homotopia en R_{i+1} (perquè R_{i+1} és simplement connex). Composant-la amb F obtenim l'homotopia en $U_{\alpha(R_{i+1})}$ desitjada.

Inductivament deduïm que la factorització que hem construït de $[F \circ \sigma_0]_X$ és equivalent de a la de $[F \circ \sigma_{nm}]_X$. Si veiem que la primera és equivalent a la factorització $[\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_k]_{U_k}$ de $[\gamma]_X$ i la segona ho és a $[\gamma'_1]_{U'_1} \cdots [\gamma'_l]_{U'_l}$ haurem acabat. Fem-ho per a $[\gamma_1]_{U_1} \cdots [\gamma_k]_{U_k}$. Observem que si poguéssim combinar en una sola síl·laba totes les síl·labes corresponents als trams de σ_0 que hi ha entre el vèrtex on comença el camí γ_j i el vèrtex on acaba ja ho tindríem: els camins δ_v en vèrtexs intermitjos cancel·larien, i en els vèrtexs inicial i final els camins δ_v són el camí constant en x_0 , perquè γ_j és tancat en x_0 . Per tant, recuperariem en una sola síl·laba el factor $[\gamma_j]_{U_j}$. Però podríem tenir un problema: només podem combinar aquestes síl·labes en una de sola utilitzant el pas (a) si els camins corresponents a cadascuna d'elles estan tots continguts en un mateix U_α . És cert que $F \circ \sigma_0$ restringida a cadascun d'aquests trams coincideix amb una restricció del camí γ_j i que, per tant, està totalment contingut en U_j . Però tal com hem construït els camins δ_v en els vèrtexs intermitjos només hem assegurat que estiguessin continguts en els oberts $U_{\alpha(R_i)}$ corresponents als rectangles tocant aquests vèrtexs. Podria passar que en algun vèrtex v cap dels dos oberts $U_{\alpha(R_i)}$, $U_{\alpha(R_{i+1})}$ coincidís amb U_j i doncs que el camí δ_v no estigués contingut en U_j , impedint-nos aplicar el pas (a). La manera de solucionar això és fixar-nos que aquests vèrtexs només toquen dos rectangles i que, per tant, en la construcció dels camins δ_v , només hem demanat que estiguessin continguts en dos U_α . Per tant, tenim llibertat per a afinar la definició dels camins δ_v en cadascun d'aquests vèrtexs v perquè no només estiguin continguts en els oberts $U_{\alpha(R_i)}$ corresponents als rectangles que contenen v , sinó també al U_j on està contingut el camí γ_j definit en v , perquè cada tres oberts U_α tenen intersecció arconnexa. Un cop fet aquest ajust, la demostració indicada a dalt ja funciona.

Per a demostrar que la factorització de $[F \circ \sigma_{nm}]_X$ és equivalent a $[\gamma'_1]_{U'_1} \cdots [\gamma'_l]_{U'_l}$ es fa exactament el mateix argument. Només cal observar abans que la factorització de $[F \circ \sigma_{nm}]_X$ comença i acaba amb un seguit de síl·labes totes iguals a $[c_{x_0}]$, potser vist dins de diferents U_α . Però podem ignorar-les perquè corresponen a l'element neutre de cada $\pi_1(U_\alpha, x_0)$. Un cop eliminades aquestes síl·labes de la factorització de $[F \circ \sigma_{nm}]_X$, l'argument del paràgraf anterior aplica exactament igual per a justificar que és equivalent a $[\gamma'_1]_{U'_1} \cdots [\gamma'_l]_{U'_l}$. $\square$

Exemple 1.31. La hipòtesi que la intersecció de cada tres oberts U_α sigui arconnexa ha resultat ser un tecnicisme per a fer que l'argument funcioni. Mirant la demostració, però, el més natural hagués estat demanar que les interseccions de fins a quatre oberts U_α fossin arconnexes, però hem aconseguit rebaixar les hipòtesis una mica fent el truc de pertorbar la quadrícula. Una pregunta natural és si, amb un truc potser més sofisticat, o amb una altra demostració, es podria eliminar també la hipòtesi que les interseccions de cada tres oberts U_α fossin arconnexes. Pot resultar sorprenent que realment aquesta hipòtesi sí que és necessària.

Considerem l'espai X format per dos vèrtexs x, y units per tres arestes u, v, w (veure la Figura 4). Sigui U_1 l'obert format per tots els punts de X excepte un punt de u diferent de x, y . Anàlogament construïm U_2 l'obert format per tots els punts de X excepte un punt de v diferent de x, y . Observem que U_1 i U_2 satisfan totes les hipòtesis del teorema de Seifert-van Kampen (triem punt base $x \in X$): els dos són oberts, arconnexos, contenen el punt base x i la seva intersecció és arconnexa (com que només tenim dos oberts la condició que cada tres tinguin intersecció arconnexa se satisfà trivialment). Observem que $v \cup w \cong \mathbb{S}^1$ és un retractive de deformació de U_1 , així que $\pi_1(U_1, x) \cong \mathbb{Z}$. Simètricament, $u \cup w \cong \mathbb{S}^1$ és un

retracte de deformació de U_2 , així que $\pi_1(U_2, x) \cong \mathbb{Z}$. A més, la intersecció $U_1 \cap U_2$ és contràctil, així que $\pi_1(U_1 \cap U_2, x) \cong 1$ i, per tant, $N \cong 1$. Concloem que $\pi_1(X, x) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$.

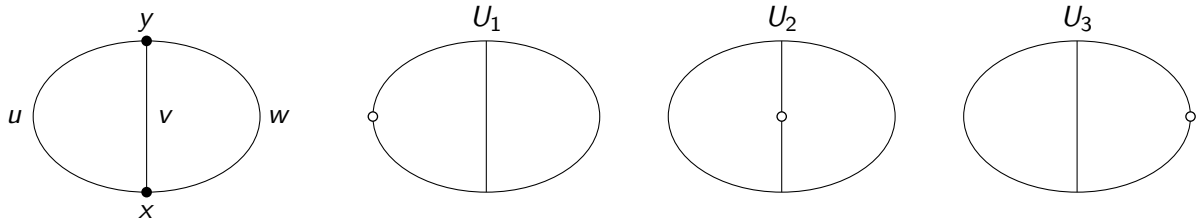


Figura 4: L'espai X i els tres oberts U_1, U_2, U_3

Considerem ara un tercer obert U_3 format per tots els punts de X excepte un punt de w diferent de x, y . U_3 és obert arconnex contenint x , i les seves interseccions amb U_1 i U_2 continuen essent arconnexes. Totes les hipòtesis del teorema de Seifert-van Kampen se satisfan excepte una: $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ no és arconnex. De forma anàloga a com hem fet amb U_1 i U_2 , tenim que $\pi_1(U_3, x) \cong \mathbb{Z}$, i $U_1 \cap U_3$ i $U_2 \cap U_3$ són contràctils. Per tant, concloem igualment que $N \cong 1$ i, si el teorema de Seifert-van Kampen fos cert sense la hipòtesi de les interseccions triples, que $\pi_1(X, x) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_3 \not\cong F_2$, que es contradiu amb el que hem demostrat a dalt. Per tant, el teorema de Seifert-van Kampen és fals si no demanem que les interseccions de cada tres oberts U_α siguin arconnexes.

Exemple 1.32. Considerem una família d'espais topològics $\{\mathbb{S}_\alpha^1\}_\alpha$, tots homeomorfs a $\mathbb{S}^1$, i triem un punt $x_\alpha \in \mathbb{S}_\alpha^1$ en cadascun d'ells. Definim l'espai $\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ com el quocient de la unió disjunta $\bigsqcup_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ que identifica els punts x_α en un únic punt. És a dir, és el quocient

$$\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1 := \frac{\bigsqcup_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1}{\sim}$$

on, donats $x, y \in \bigsqcup_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$, estan relacionats per $\sim$ si i només si $x = y$ o bé $x, y \in \{x_\alpha\}_\alpha$. El dotem de la topologia quocient de la topologia unió disjunta de les $\mathbb{S}_\alpha^1$. És a dir, si $\pi: \bigsqcup_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1 \rightarrow \bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ és la projecció al quocient, un conjunt $U \subseteq \bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ és obert si i només si $\pi^{-1}(U)$ interseca cada $\mathbb{S}_\alpha^1$ en un conjunt obert. Si unim un nombre finit $n = \#\{\mathbb{S}_\alpha\}_\alpha$ de circumferències, anomenem aquest espai el *bouquet de n circumferències*; en general, si el conjunt de circumferències que enganxem té cardinal κ , l'anomenem *bouquet de circumferències de cardinal κ* . Intuïtivament, $\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ és l'espai format per una família de $\mathbb{S}^1$ enganxades per un sol punt, però cal anar amb compte amb la seva topologia, com veurem en l'Exemple 1.33.

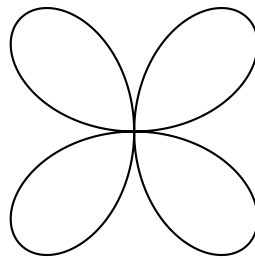


Figura 5: Bouquet de quatre circumferències

Cada punt x_α té un entorn obert $W_\alpha \subseteq \mathbb{S}_\alpha^1$ del qual és retracte de deformació (basta triar W_α com $\mathbb{S}_\alpha^1$ menys un punt diferent de x_α , per exemple). Per tant, $\bigvee_\alpha W_\alpha$ és un entorn de $[x_\alpha] \in \bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ (la classe de tots els x_α) del qual $[x_\alpha]$ és un retracte de deformació. $\bigvee_\alpha W_\alpha$ és arcconnex: podem unir qualsevol dels seus punts a $[x_0]$ pel camí que segueix aquest camí durant la retracció de deformació de cap a x_0 . Per a cada α , considerem l'obert arcconnex $U_\alpha := \mathbb{S}_\alpha^1 \vee \bigvee_{\alpha \neq \beta} W_\beta$. Per a cada β , el punt x_β és un retracte de deformació de W_β . Per tant, $\mathbb{S}_\alpha^1$ és un retracte de deformació de U_α . La intersecció de qualssevol dos o més U_α és $\bigvee_\alpha W_\alpha$, que ja hem justificat que és arcconnex i que té el punt $[x_\alpha] \in \bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1$ per retracte de deformació. El teorema de Seifert-van Kampen aplicat al recobriment $\{U_\alpha\}$ ens diu que $\pi_1(\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^1, [x_\alpha]) \cong \prod_\alpha^* \mathbb{Z}$. Per tant, podem veure qualsevol grup lliure com el grup fonamental del bouquet de tantes circumferències com el seu rang.

Exemple 1.33. L'*arracada hawaiana* es defineix com el conjunt $\mathbb{E}$ construït com segueix: sigui

$$C_n := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

la circumferència de radi $\frac{1}{n}$ centrada en el punt $(\frac{1}{n}, 0)$; prenem $\mathbb{E} := \bigcup_{n \geq 1} C_n$ amb la topologia induïda de l'euclidiana de $\mathbb{R}^2$.

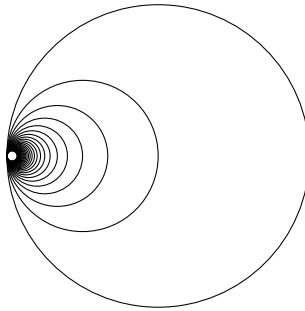


Figura 6: L'arracada hawaiana $\mathbb{E}$.

Tot i que ho pugui semblar, l'arracada hawaiana no és homeomorfa al bouquet numerable de circumferències. Amb la topologia que hi hem definit, el punt on s'uneixen totes les circumferències del bouquet té un entorn obert contràctil. En canvi, qualsevol entorn obert U del punt $x_0 := (0, 0)$ en $\mathbb{E}$ ha de contenir totes les circumferències C_N per a N prou gran i, per tant, no pot ser contràctil. Una manera de veure-ho és considerant la retracció $r_N: \mathbb{E} \rightarrow C_N$ que és la identitat en C_N i envia totes les altres circumferències a x_0 . És senzill veure que r_N és contínua. Restringint-la a U , obtenim una retracció de U a C_N . Per tant, $\pi_1(U, x_0)$ té un subgrup isomorf a $\pi_1(C_N, x_0) \cong \mathbb{Z}$, així que, en particular, no pot ser trivial, i U no pot ser contràctil.

Per tant, l'argument anterior no serveix per a demostrar que $\pi_1(\mathbb{E}, x_0) \cong \prod_{n \geq 1}^* \pi_1(C_n, x_0) \cong F_{\aleph_0}$. De fet, és fals. Una manera de veure-ho és que $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ no és numerable, mentre que $F_{\aleph_0}$ sí que ho és, en ser els seus elements paraules de longitud finita amb un nombre infinit numerable de possibles lletres. Per a veure que $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ no és numerable, construïm una injecció $\prod_{n \geq 1} \{0, 1\} \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{E}, x_0)$. El conjunt $\prod_{n \geq 1} \{0, 1\}$ de paraules de longitud infinita en zeros i uns no és numerable, per l'argument diagonal de Cantor, així que $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ tampoc ho serà.

Denotem per γ_n el camí tancat en x_0 que dona una volta a C_n en sentit antihorari. Ara, donada una successió $s = (a_n) \in \prod_{n \geq 1} \{0, 1\}$, construïm un camí $\alpha_s: I \rightarrow \mathbb{E}$ tancat en x_0 definint-lo com el camí

constant en x_0 en l'interval $\left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right]$ si $a_n = 0$, i com γ_n en $\left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right]$ si $a_n = 1$ (i definim $\alpha_s(1) = x_0$). Com que les circumferències C_n es fan arbitràriament petites quan $n \rightarrow \infty$, és fàcil veure que el camí α_s així definit és continu. Per tant, tenim una aplicació $\prod_{n \geq 1} \{0, 1\} \rightarrow \pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ que envia cada $s \in \prod_{n \geq 1} \{0, 1\}$ a $[\alpha_s] \in \pi_1(\mathbb{E}, x_0)$.

Per a veure que és injectiva, suposem que $s = (a_n) \neq (b_n) = t$ i vegem que $[\alpha_s] \neq [\alpha_t]$. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $a_N = 1$ i $b_N = 0$ per a algun N . Tornem a considerar l'aplicació contínua $r_N: \mathbb{E} \rightarrow C_N$ que és la identitat en la circumferència C_N i envia totes les altres al punt x_0 . Ara, si $[\alpha_s] = [\alpha_t]$, aleshores $[r_N \circ \alpha_s] = (r_N)_*([\alpha_s]) = (r_N)_*([\alpha_t]) = [r_N \circ \alpha_t]$ en $\pi_1(C_N, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Però $[r_N \circ \alpha_t]$ és trivial en $\pi_1(C_N, x_0)$ en ser $r_N \circ \alpha_t$ el camí constant en x_0 , mentre que $[r_N \circ \alpha_s]$ és no trivial perquè $r_N \circ \alpha_s$ dona una volta sencera a C_N , així que hem arribat a contradicció.

Per tant, si $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ fos lliure, la seva base hauria de ser no numerable. De fet, $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ no és lliure, sinó que té una estructura força més complicada. Es pot trobar una construcció explícita del grup $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$ i una demostració que no és lliure a [dS92]. Un primer exemple de les anomalies que poden donar-s'hi és que en operar dos elements hi poden haver infinites cancel·lacions. Posem $g_n := [\gamma_n] \in \pi_1(\mathbb{E}, x_0)$. Ja hem justificat que (la classe de) el camí que dona una volta en sentit antihorari a cadascuna de les infinites C_n , que podríem denotar per $g_1 g_2 g_3 \dots$, és un element de $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$. Podem pensar el seu invers com la paraula infinita $\dots g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$, corresponent a (la classe de) el camí que dona una volta en sentit horari a cada C_n , però començant per les més petites. Aleshores, el producte $g_1 g_2 g_3 \dots g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$ representa (la classe de) un camí concatenat amb el seu invers, així que és trivial, però realment no hi ha cap parell de síl·labes consecutives que siguin una la inversa de l'altra.

Pitjor encara, considerem la següent construcció iterativa. Comencem amb

$$g_1 g_1^{-1}$$

i, a cada pas, afegim més cancel·lacions entre cada parell de síl·labes consecutives inverses, però fem els índexs dels g_i més grans a cada pas, de forma que la construcció final estigui representada per un camí continu, aprofitant que les C_n es fan arbitràriament petites:

$$\begin{aligned} & g_1 (g_2 g_2^{-1}) (g_3 g_3^{-1}) g_1^{-1} \\ & g_1 (g_2 (g_5 g_5^{-1} g_6 g_6^{-1}) g_2^{-1}) (g_3 (g_7 g_7^{-1} g_8 g_8^{-1}) g_3^{-1}) g_1^{-1} \\ & g_1 (g_2 (g_5 (g_9 g_9^{-1} g_{10} g_{10}^{-1}) g_5^{-1} g_6 (g_{11} g_{11}^{-1} g_{12} g_{12}^{-1}) g_6^{-1}) g_2^{-1}) (g_3 (g_7 (g_{13} g_{13}^{-1} g_{14} g_{14}^{-1}) g_7^{-1} g_8 (g_{15} g_{15}^{-1} g_{16} g_{16}^{-1}) g_8^{-1}) g_3^{-1}) g_1^{-1} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Un cop identificat el grup $\pi_1(\mathbb{E}, x_0)$, es pot concloure que aquest producte és trivial (el motiu és que és trivial a cada pas). Però, com abans, no té parells de síl·labes consecutives que siguin inverses entre si. Ara, a més, les infinites cancel·lacions es van reproduint amb un cert caràcter fractal dins el producte, fent difícil veure on s'estan produint.

2. Espais recobridors

Fins ara els únics espais per als quals realment hem calculat el grup fonamental són els espais contràctils. Tota la resta d'exemples han depès del fet que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, propietat que hem justificat intuïtivament però que no hem demostrat formalment. En aquesta secció introduïm els espais recobridors, que són una de les eines més importants per al càlcul de grups fonamentals, i els utilitzem per a demostrar finalment que el grup fonamental de la circumferència és $\mathbb{Z}$.

2.1 Definicions i exemples

Definició 2.1. Donat un espai topològic X , un *espai recobridor de X* és una parella $(\tilde{X}, p)$ on $\tilde{X}$ és un espai topològic i $p: \tilde{X} \rightarrow X$ és una aplicació contínua satisfent que per a tot $x \in X$ existeix un entorn obert $U \ni x$ tal que $p^{-1}(U)$ és unió disjunta d'oberts $\tilde{U}_\alpha$, $\alpha \in A$, de $\tilde{X}$ de forma que p restringit a cadascun d'ells és un homeomorfisme amb U . És a dir, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha \tilde{U}_\alpha$, amb $\tilde{U}_\alpha \subseteq \tilde{X}$ oberts tals que $p|_{\tilde{U}_\alpha}: \tilde{U}_\alpha \rightarrow U$ és un homeomorfisme. Diem que un tal obert U queda *uniformement recobert* per p , i anomenem als oberts $\tilde{U}_\alpha$ *capes* de U per p . Al conjunt $p^{-1}(x)$ d'antiimatges d'un punt $x \in X$ l'anomenem la *fibra* de x .

Notació 2.2. Fent abús de notació, ens referirem a l'espai recobridor $(\tilde{X}, p)$ directament per l'aplicació $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

Exemple 2.3. Donat qualsevol espai topològic X , l'aplicació identitat $\text{id}: X \rightarrow X$ (o qualsevol homeomorfisme $f: X \rightarrow X$ de l'espai en si mateix) és trivialment un espai recobridor.

Exemple 2.4. L'aplicació contínua $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida per $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ és un espai recobridor de $\mathbb{S}^1$. Una manera de visualitzar aquesta aplicació consisteix en interpretar-la com la composició d'enviar $\mathbb{R}$ a l'hèlix de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, s)$ amb la projecció $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, que envia l'hèlix a $\mathbb{S}^1$.

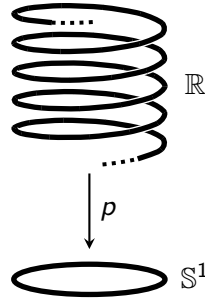


Figura 7: L'espai recobridor $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$

Anem a veure que l'obert $U \subseteq \mathbb{S}^1$ format per aquells punts $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ amb $x > 0$ queda uniformement recobert per p . El conjunt $p^{-1}(U)$ és el conjunt de punts $s \in \mathbb{R}$ per als quals $\cos 2\pi s > 0$. Per tant,

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right),$$

on la unió és clarament disjunta. Escrivim $V_k := \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right)$. L'aplicació p restringida a cada interval tancat $\overline{V_k}$ és injectiva, ja que $\sin 2\pi s$ és estrictament creixent en aquests intervals. A més, pel teorema

del valor intermig, p és exhaustiva entre $\overline{V_k}$ i $\overline{U}$. Com que $\overline{V_k}$ és compacte i $\overline{U}$ és Hausdorff, $p|_{\overline{V_k}}$ és un homeomorfisme entre $\overline{V_k}$ i $\overline{U}$. Per tant, també $p|_{V_k}$ és un homeomorfisme entre V_k i U .

De forma anàloga es pot veure que els oberts de $\mathbb{S}^1$ definits per $x < 0$, $y > 0$ i $y < 0$ també queden uniformement recoberts per p . Per tant, com que cada punt de $\mathbb{S}^1$ està en algun d'aquests quatre oberts, hem demostrat que $\mathbb{R}$ és un espai recobridor de $\mathbb{S}^1$, amb l'aplicació p definida a dalt.

Exemple 2.5. Fixat n enter positiu, $p_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definit per $p_n(z) = z^n$, és un espai recobridor de $\mathbb{S}^1$, on considerem $\mathbb{S}^1$ com el subconjunt dels nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ amb $|z| = 1$. Intuïtivament, p_n enrotlla $\mathbb{S}^1$ sobre si mateixa n vegades. Una manera de visualitzar aquest espai recobridor és pensar que deformem $\mathbb{S}^1$ perquè doni n voltes a un cilindre de radi 1 i després projectem sobre la base del cilindre.

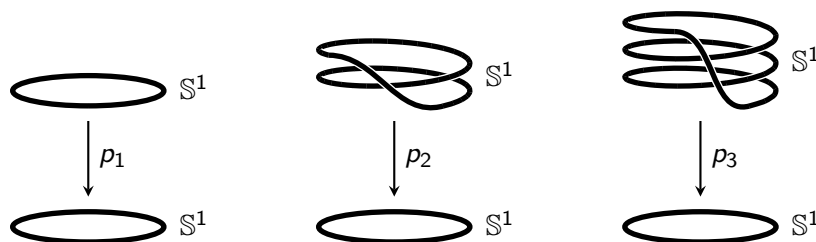


Figura 8: Els espais recobridors $p_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ per a $n = 1, 2, 3$

De la mateixa manera que en l'exemple anterior, els quatre oberts de $\mathbb{S}^1$ formats respectivament pels punts amb part real positiva, part real negativa, part imaginària positiva i part imaginària negativa queden uniformement recoberts per p_n , i tot punt de $\mathbb{S}^1$ pertany a algun dels quatre. Per exemple, si U és el conjunt de punts de $\mathbb{S}^1$ amb part real positiva, aleshores

$$p_n^{-1}(U) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \left\{ e^{\frac{2\pi i s}{n}} \mid s \in \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) \right\}$$

i es demostra de forma similar a l'anterior exemple que p_n és un homeomorfisme entre cadascun dels conjunts de la unió disjunta i U .

Observació 2.6. Si $p: \tilde{X} \rightarrow X$ és un espai recobridor, aleshores és un homeomorfisme local entre $\tilde{X}$ i X , en el sentit que tot punt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ té un entorn que p envia homeomòrficament a un obert de X (és a dir, existeix $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ obert tal que $U := p(\tilde{U})$ és obert i $p|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ és un homeomorfisme). Això és senzill de demostrar per definició. Intuïtivament, és temptador pensar els espais recobridors com homeomorfismes locals, però cal anar amb compte, perquè la noció d'espai recobridor és una mica més forta.

Per exemple, la mateixa projecció p que a l'Exemple 2.4 però restringida a $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, és a dir, $p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^1$ donada per $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$, és un homeomorfisme local (es demostra amb les mateixes idees usades a l'Exemple 2.4) però no és un espai recobridor, perquè el punt $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ no té cap entorn uniformement recobert. En efecte, tot entorn obert de $(1, 0)$ conté un altre entorn obert U de $(1, 0)$ que és la intersecció amb $\mathbb{S}^1$ d'una petita bola oberta de $\mathbb{R}^2$ centrada a $(1, 0)$. Aquest U no queda uniformement recobert: la seva antiimatge és la unió de petits intervals oberts V_n al voltant de cada enter $n > 0$ i un altre petit interval obert V_0 de la forma $(0, \varepsilon)$. L'aplicació p és un homeomorfisme entre cada V_n , $n > 0$, i U , però no ho és entre V_0 i U (per exemple, $(1, 0) \in U$ no té cap antiimatge en V_0).

Donat un espai recobridor, podem considerar el nombre d'antiimatges de cadascun dels seus punts. Aquest nombre podria dependre a priori del punt $x \in X$ considerat, però els anteriors exemples semblen

indicar que no ho farà. És clar, però, que perquè el nombre d'antiimatges no depengui del punt cal demanar com a mínim que l'espai X sigui connex: si no, podríem recobrir independentment cada component connexa, i el nombre d'antiimatges dels punts de cadascuna podria ser diferent. Per exemple, podríem construir un espai recobridor $p: \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ de la unió disjunta de dues circumferències que en una d'elles fos el p_n construït a l'Exemple 2.5 i, en l'altra, un altre p_m , amb $m \neq n$. Clarament, el nombre d'antiimatges no és el mateix en tots els punts: canvia d'una component connexa a l'altra. Anem a veure, però, que, de fet, que X sigui connex ja és suficient perquè el nombre d'antiimatges de tots els punts sigui el mateix:

Lema 2.7. *Donat un espai recobridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$, amb X connex, el cardinal de la fibra $p^{-1}(x)$ no depèn del punt $x \in X$.*

Demostració. El conjunt de punts $x \in X$ tals que la seva fibra $p^{-1}(x)$ té un cardinal concret és obert en X . En efecte, donat $x \in X$, existeix un entorn obert $U \ni x$ tal que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$, on $p|_{\tilde{U}_\alpha}: \tilde{U}_\alpha \rightarrow U$ són homeomorfismes. Per tant, el cardinal de $p^{-1}(y)$ per a cada $y \in U$ és el mateix, $\#p^{-1}(y) = \#A$: hi ha exactament una antiimatge de y en cada $\tilde{U}_\alpha$ perquè els $p|_{\tilde{U}_\alpha}$ són homeomorfismes i no n'hi ha cap fora dels conjunts $\tilde{U}_\alpha$ perquè $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$. Hem trobat doncs un entorn obert de x tal que el cardinal del conjunt d'antiimatges de cadascun dels seus punts és el mateix.

Ara bé, si per a cada possible cardinalitat κ escrivim $V_\kappa := \{x \in X \mid \#p^{-1}(x) = \kappa\}$ el conjunt de punts amb κ antiimatges, tenim que $X = \bigsqcup_\kappa V_\kappa$. Només un d'aquests V_κ pot ser no buit: altrament, suposem que $V_{\kappa_1}, V_{\kappa_2} \neq \emptyset$, amb $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Aleshores, $X = V_{\kappa_1} \sqcup \left(\bigcup_{\kappa \neq \kappa_1} V_\kappa \right)$ és una separació de X , perquè cada V_κ és obert, i la unió arbitrària d'oberts és oberta, i V_{κ_1} i $\bigcup_{\kappa \neq \kappa_1} V_\kappa \supseteq V_{\kappa_2}$ són no buits. Però X és, per hipòtesi, connex, així que hem arribat a contradicció. Concloem doncs que $V_\kappa = \emptyset$ per a tot κ excepte per a una sola cardinalitat, posem κ_0 . Per tant, $X = V_{\kappa_0}$ o, el que és el mateix, $p^{-1}(x)$ té la mateixa cardinalitat κ_0 per a tots els punts $x \in X$. $\square$

Per tant, podem fer la definició següent:

Definició 2.8. Anomenem *grau* d'un espai recobridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$ d'un espai topològic X connex al cardinal de $p^{-1}(x)$, per a $x \in X$ un punt qualsevol.

Introduïm ara el concepte d'isomorfisme d'espais recobridors.

Definició 2.9. Un *isomorfisme* entre dos espais recobridors $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$, $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ de X és un homeomorfisme $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ que fa commutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Diem que dos espais recobridors $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$, $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ són *isomorfs* si existeix un isomorfisme entre ells.

Observació 2.10. És fàcil comprovar que la commutativitat del diagrama és equivalent al fet que f envii $p_1^{-1}(x)$ a $p_2^{-1}(x)$ per a cada $x \in X$. Per tant, un isomorfisme d'espais recobridors és un homeomorfisme entre els espais $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$ que respecta les fibres de tots els punts $x \in X$. En particular, si f és un isomorfisme d'espais recobridors, també ho és f^{-1} i, per tant, l'isomorfia d'espais recobridors és una relació d'equivalència.

Exemple 2.11. Qualsevol espai recobridor trivial $p: X \rightarrow X$ (és a dir, amb p homeomorfisme) és isomorf a $\text{id}: X \rightarrow X$. En efecte, podem prendre $f = p$ a la definició. Per tant, tots els espais recobridors trivials són isomorfs entre si.

Observació 2.12. El grau d'un espai recobridor és un invariant isomòrfic. En efecte, siguin $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$, $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ espais recobridors isomorfs i $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ un isomorfisme entre ells. Donat $x \in X$, f envia $p_1^{-1}(x)$ a $p_2^{-1}(x)$ i, com que f és un homeomorfisme, indueix una bijecció $p_1^{-1}(x) \rightarrow p_2^{-1}(x)$. Per tant, els cardinals de $p_1^{-1}(x)$ i $p_2^{-1}(x)$ han de coincidir, és a dir, $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ i $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ han de tenir el mateix grau.

En particular, observem que podem tenir espais recobridors $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$, $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ no isomorfs encara que $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$ siguin homeomorfs. Per exemple, tots els espais recobridors dels Exemples 2.4 i 2.5 són no isomorfs, perquè tenen graus diferents, encara que tots els de l'Exemple 2.5 són espais recobridors de $\mathbb{S}^1$ per $\mathbb{S}^1$.

2.2 Lema d'aixecament d'homotopies

La propietat més distintiva dels espais recobridors és que ens permeten, donat un camí γ en l'espai original X , construir un camí $\tilde{\gamma}$ en $\tilde{X}$ que es projecti per p en el camí original, és a dir, tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Diem en aquest cas que $\tilde{\gamma}$ és un aixecament de γ . Aquest aixecament serà únic sempre que fixem un punt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ que es projecti per p en el punt inicial del camí i imposen que l'aixecament hagi de començar en aquest punt.

Per exemple, considerem l'espai recobridor $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ de l'Exemple 2.4 i el camí γ en $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ que comença en el punt $(0, 1)$ i dona dues voltes senceres a la circumferència en sentit antihorari i a velocitat constant. Per a cada $n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, el camí en $\mathbb{R}$ que va de n a $n + 2$ a velocitat constant és un aixecament de γ . Observem, però, que, per a cada punt $n \in \mathbb{Z} = p^{-1}(0, 1)$, només un d'aquests aixecaments de γ comença en n , de forma que no es contradiu la unicitat enunciada a dalt.

Anem a veure que, de fet, no només podem aixecar camins, sinó també altres aplicacions amb imatge en X . El significat concret d'aixecament és el següent. Al llarg de tota aquesta secció, Y és un espai topològic arbitrari llevat que es digui el contrari.

Definició 2.13. Donat un espai recobridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$ i una aplicació contínua $f: Y \rightarrow X$, diem que una aplicació contínua $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ és un *aixecament* de f si $p \circ \tilde{f} = f$.

A continuació enunciem i demostrem el lema d'aixecament d'homotopies, que ens diu que camins i, més en general, homotopies entre aplicacions $Y \rightarrow X$ sempre es poden aixecar. A més, si fixem l'aixecament de la primera aplicació de l'homotopia, l'aixecament és únic:

Lema 2.14 (d'aixecament d'homotopies). *Donat un espai recobridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$, una homotopia $F: Y \times I \rightarrow X$ i una aplicació contínua $\tilde{f}_0: Y \rightarrow \tilde{X}$ que aixeca $F(\cdot, 0): Y \rightarrow X$, existeix una única homotopia $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ que aixeca F i tal que $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0$.*

Observació 2.15. Si prenem Y que sigui un punt, el lema ens està dient que, donat un camí $\gamma: I \rightarrow X$ i un punt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\gamma(0))$, aleshores existeix un únic camí $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}$ que aixeca γ i comença en $\tilde{x}_0$. Això és el que avançàvem al començament de la secció. En particular, per unicitat, els aixecaments de camins constants necessàriament han de ser camins constants.

Observació 2.16. Suposem que tenim dos camins $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow X$ tals que $\gamma_0 \simeq \gamma_1$, és a dir, que existeix una homotopia de camins $F: I \times I \rightarrow X$ entre ells. En particular, tenen els mateixos punts inicial i final,

diguem $x_0, x_1 \in X$, respectivament. Sigui $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subseteq \tilde{X}$. Per l'Observació 2.15, podem considerar els aixecaments $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1: I \rightarrow \tilde{X}$ començant en $\tilde{x}_0$. Utilitzant el Lema 2.14 amb $Y = I$ podem aixecar F a una homotopia $\tilde{F}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ entre $\tilde{\gamma}_0$ i $\tilde{F}(\cdot, 1)$, que és un aixecament de γ_1 . Observem que, en ser F una homotopia de camins, tenim que $F(0, \cdot), F(1, \cdot): I \rightarrow X$ són camins constants (concretament, són c_{x_0} i c_{x_1}). Per tant, per l'Observació 2.15, els seus aixecaments, $\tilde{F}(0, \cdot), \tilde{F}(1, \cdot)$, també són constants. En particular, $\tilde{F}$ és una homotopia de camins entre $\tilde{\gamma}_0$ i $\tilde{F}(\cdot, 1)$ i el punt inicial de $\tilde{F}(\cdot, 1)$ ha de ser doncs $\tilde{x}_0$. Per unicitat dels aixecaments de camins, $\tilde{F}(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}_1$. Per tant, concloem que $\tilde{F}$ és una homotopia de camins entre $\tilde{\gamma}_0$ i $\tilde{\gamma}_1$ i, doncs, que $\tilde{\gamma}_0 \simeq \tilde{\gamma}_1$.

En resum, donats dos camins $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow X$ tals que $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ (i que, per tant, tenen els mateixos punts inicial i final $x_0, x_1 \in X$, respectivament), els seus aixecaments (començant en un mateix punt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$) són també camins homòtops: $\tilde{\gamma}_0 \simeq \tilde{\gamma}_1$ (i, en particular, tenen el mateix punt final $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$).

Demostració. Demostrem en primer lloc l'existència. Prenem $y_0 \in Y$ arbitrari i anem a trobar un obert $N \ni y_0$ on puguem definir un aixecament $\tilde{F}_N: N \times I \rightarrow \tilde{X}$ de $F|_{N \times I}$. Després haurem de justificar que podem enganxar aquests aixecaments per a construir un aixecament $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ de tota l'aplicació $F: Y \times I \rightarrow X$.

Fixem $t \in I$ i considerem $U \ni F(y_0, t)$ un obert de X uniformement recobert: $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} \tilde{U}_{\alpha}$, on $p|_{\tilde{U}_{\alpha}}: \tilde{U}_{\alpha} \rightarrow U$ són homeomorfismes. Per continuïtat de F , existeix un obert $N_t \times V_t \ni (y_0, t)$ amb $F(N_t \times \overline{V_t}) \subseteq U$, on V_t és un entorn obert de t en I , i podem suposar-lo un interval $V_t = (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t)$, amb $\varepsilon_t > 0$ ($\overline{V_t}$ és la seva adherència). Construïm aquest obert $N_t \times V_t$ per a cada punt $t \in I$. Com que $\{y_0\} \times I$ és compacte, un nombre finit d'aquests oberts $N_t \times V_t$ són suficients per a recobrir $\{y_0\} \times I$. Triant N com la intersecció finita dels corresponents oberts N_t , i $t_0, \dots, t_m$ els extrems (en ordre creixent) dels corresponents intervals V_t , hem trobat una partició $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ de I tal que per a cada i es té que $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ està contingut en algun obert $U \subseteq X$ uniformement recobert per p . Per a cada $i = 0, \dots, m$ anomenem U_i aquest obert.

Construïrem $\tilde{F}_N: N \times I \rightarrow \tilde{X}$ que aixequi $F|_{N \times I}$ definint-la inductivament en cada $N \times [0, t_i]$. A l'aixecament definit en $N \times [0, t_i]$ li direm $\tilde{F}_i$; així, $\tilde{F}_m$ serà la $\tilde{F}_N$ que volem construir. Per hipòtesi, podem definir $\tilde{F}_0: N \times \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ com $\tilde{F}_0(y, 0) = \tilde{f}_0(y)$ i obtindrem una aplicació contínua que aixeca $F|_{N \times \{0\}}$. Així queda demostrat el cas base.

Suposem per inducció que tenim definit un aixecament $\tilde{F}_i: N \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ de $F|_{N \times [0, t_i]}: N \times [0, t_i] \rightarrow X$ i vegem com estendre'l a un aixecament $\tilde{F}_{i+1}: N \times [0, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$ de $F|_{N \times [0, t_{i+1}]}: N \times [0, t_{i+1}] \rightarrow X$. Per construcció, $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Per hipòtesi d'inducció, ja tenim definit $\tilde{F}_i(y_0, t_i)$, i satisfà que $p(\tilde{F}_i(y_0, t_i)) = F(y_0, t_i) \in U_i$, així que $\tilde{F}_i(y_0, t_i) \in p^{-1}(U_i)$. Com que U_i està uniformement recobert, existeix un obert $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ amb $\tilde{F}_i(y_0, t_i) \in \tilde{U}_i$ i tal que $p|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ és un homeomorfisme.

Ara definim $\tilde{F}_{i+1}: N \times [0, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$ com

$$\tilde{F}_{i+1}(y, t) = \begin{cases} \tilde{F}_i(y, t), & \text{si } t \in [0, t_i], \\ (p|_{\tilde{U}_i})^{-1}(F|_{N \times [t_i, t_{i+1}]}(y, t)), & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

Clarament $p(\tilde{F}_{i+1}(y, t)) = F(y, t)$, i és contínua pel lema d'enganxament. En efecte, les definicions coincideixen a la intersecció dels dos trams (tancats) perquè, per hipòtesi d'inducció, $F(y, t_i) = p(\tilde{F}_i(y, t_i)) = p|_{\tilde{U}_i}(\tilde{F}_i(y, t_i))$, on l'última igualtat té sentit si prenem la precaució de fer N prou petit per tal que $\tilde{F}_i(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$. Podem fer-ho perquè, en ser $\tilde{F}_i$ contínua, també ho és $\tilde{F}_i(\cdot, t_i)$. Per tant, l'antiimatge per $\tilde{F}_i(\cdot, t_i)$ de $\tilde{U}_i$ serà un obert de $N \times \{t_i\}$, així que serà de la forma $N' \times \{t_i\}$, amb N'

obert en N . Com que N és obert en Y , N' serà també obert en Y . Si redefinim N com N' tenim que $\tilde{F}_i(N \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$, com volem. Per tant, ja hem demostrat que $F(y, t_i) = p|_{\tilde{U}_i}(\tilde{F}_i(y, t_i))$, i composant a ambdós costats per $(p|_{\tilde{U}_i})^{-1}$ s'obté que les definicions en cada tram coincideixen en la intersecció dels dos.

Notem que a cada pas de la inducció l'obert $y_0 \in N \subseteq Y$ tal que tenim definida $\tilde{F}_i$ en $N \times [0, t_i]$ es pot fer més petit. Com que la inducció acaba en un nombre finit de passos, però, al final encara serà un obert de Y que contingui y_0 .

Per tant, per a cada $y_0 \in Y$ hem trobat un obert $N_{y_0} \ni y_0$ i hem pogut construir una aplicació contínua $\tilde{F}_{N_{y_0}}: N_{y_0} \times I \rightarrow \tilde{X}$ que aixeca $F|_{N_{y_0} \times I}: N_{y_0} \times I \rightarrow X$. Voldríem definir $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ com $\tilde{F}(y, t) = \tilde{F}_{N_{y_0}}(y, t)$ si $y \in N_{y_0}$. Però per tal de fer-ho ens cal comprovar que $\tilde{F}_{N_{y_0}}$ i $\tilde{F}_{N_{y'_0}}$ donen les mateixes imatges en els punts d'intersecció de $N_{y_0} \times I$ i $N_{y'_0} \times I$. Si ho veiem, la $\tilde{F}$ definida com a dalt estarà ben definida i serà contínua, pel lema d'enganxament.

Per a veure-ho, anem a comprovar que hi ha un únic possible aixecament de cada segment vertical $\{y\} \times I$, $y \in Y$, enviant $(y, 0)$ a $\tilde{f}_0(y)$. Això ens dirà que $\tilde{F}_{N_{y_0}}$ i $\tilde{F}_{N_{y'_0}}$ han de coincidir en els punts d'intersecció de $N_{y_0} \times I$ i $N_{y'_0} \times I$, com volem. A més, obtindrem automàticament que l'aixecament $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ és únic, i haurem acabat la demostració.

Suposem doncs que tenim $\tilde{F}, \tilde{F}': \{y\} \times I \rightarrow \tilde{X}$ dos aixecaments de $F|_{\{y\} \times I}: \{y\} \times I \rightarrow X$ amb $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}_0(y) = \tilde{F}'(y, 0)$. Vegem que han de coincidir en tot $\{y\} \times I$.

Com abans, triem una partició $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ de I tal que per a cada i tinguem que $F(\{y\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ per a algun obert $U_i \subseteq X$ uniformement recobert. Vegem per inducció que $\tilde{F}|_{\{y\} \times [0, t_i]} = \tilde{F}'|_{\{y\} \times [0, t_i]}$ per a tot $i = 0, \dots, m$; per a $i = t_m = 1$ és el que volem acabar demostrant. El cas base és cert, perquè estem suposant que $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{F}'(y, 0)$. Suposem per inducció que $\tilde{F}|_{\{y\} \times [0, t_i]} = \tilde{F}'|_{\{y\} \times [0, t_i]}$ i vegem que $\tilde{F}|_{\{y\} \times [0, t_{i+1}]} = \tilde{F}'|_{\{y\} \times [0, t_{i+1}]}$. Com que $\{y\} \times [t_i, t_{i+1}]$ és connex i $\tilde{F}$ és contínua, també ha de ser connex $\tilde{F}(\{y\} \times [t_i, t_{i+1}])$. Per tant, ha d'estar totalment contingut en una i només una de les capes de U_i . Posem doncs que $\tilde{F}(\{y\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq \tilde{U}_i$, on $p|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ és un homeomorfisme.

Anàlogament $\tilde{F}'(\{y\} \times [t_i, t_{i+1}])$ també està contingut en una i només una de les capes de U_i . Com que, per hipòtesi d'inducció, $\tilde{F}(y, t_i) = \tilde{F}'(y, t_i)$, han d'estar continguts en la mateixa, és a dir, $\tilde{U}_i$. Ara, p és injectiu restringit a $\tilde{U}_i$ i, com que $\tilde{F}$ i $\tilde{F}'$ són aixecaments de F , tenim que $p \circ \tilde{F} = F = p \circ \tilde{F}'$. Concloem per tant que $\tilde{F}$ i $\tilde{F}'$ han de coincidir en tot $\{y\} \times [t_i, t_{i+1}]$. Aleshores, per hipòtesi d'inducció, coincideixen en tot $\{y\} \times [0, t_{i+1}]$.

Deduïm per inducció que $\tilde{F}$ i $\tilde{F}'$ han de coincidir en tot $\{y\} \times I$ i, per tant, hem acabat la demostració. $\square$

2.3 Aplicacions del lema d'aixecament d'homotopies

Com a aplicació del lema d'aixecament d'homotopies, anem a veure que el subgrup $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ conté molta informació sobre l'espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ (i, recíprocament, conegut l'espai recobridor, podem saber moltes coses d'aquest subgrup).

En primer lloc, la classe d'isomorfisme del subgrup coincideix amb la del grup fonamental de l'espai recobridor:

Proposició 2.17. *Donat un espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, el morfisme induït en els grups fonamentals $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ és injectiu. En particular, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ és isomorf al subgrup $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$*

de $\pi_1(X, x_0)$.

A més, els elements de $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ són exactament les classes de camins en X tancats en x_0 tals que el seu aixecament a $\tilde{X}$ començant a $\tilde{x}_0$ és tancat en $\tilde{x}_0$.

Demostració. Comencem veient que p_* és injectiva. Prenem $[\tilde{\gamma}] \in \ker p_*$ i hem de veure que $\tilde{\gamma} \simeq c_{\tilde{x}_0}$ en $\tilde{X}$. Per hipòtesi, $[p \circ \tilde{\gamma}] = p_*([\tilde{\gamma}]) = [c_{x_0}]$. Per tant, hi ha una homotopia de camins $F: I \times I \rightarrow X$ entre $p \circ \tilde{\gamma}$ i el camí constant c_{x_0} . Per l'Observació 2.16 podem aixecar aquesta homotopia de camins en X a una homotopia de camins en $\tilde{X}$ entre l'únic aixecament de $p \circ \tilde{\gamma}$ començant a $\tilde{x}_0$, que és $\tilde{\gamma}$, i l'únic aixecament de c_{x_0} començant a $\tilde{x}_0$, que és $c_{\tilde{x}_0}$. Concloem que $\tilde{\gamma} \simeq c_{\tilde{x}_0}$, com volíem.

Demostrem la caracterització dels elements de $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$.

Si $[\gamma]$ és la classe d'un camí $\gamma: I \rightarrow X$ tal que el seu aixecament a $\tilde{X}$ començant a $\tilde{x}_0$ és un camí $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}$ tancat en $\tilde{x}_0$, tenim que $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (per definició de grup fonamental) i que $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ (per definició d'aixecament). Per tant, $[\gamma] = [p \circ \tilde{\gamma}] = p_*([\tilde{\gamma}]) \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Recíprocament, suposem que $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Aleshores, existeix algun $\tilde{\delta}: I \rightarrow \tilde{X}$ tancat en $\tilde{x}_0$ tal que $[\gamma] = p_*([\tilde{\delta}]) = [p \circ \tilde{\delta}]$. Per tant, hi ha una homotopia de camins $F: I \times I \rightarrow X$ entre γ i $p \circ \tilde{\delta}$ que, per l'Observació 2.16, podem aixecar a una homotopia de camins entre l'únic aixecament $\tilde{\gamma}$ de γ a $\tilde{X}$ començant a $\tilde{x}_0$ i l'únic aixecament de $p \circ \tilde{\delta}$ començant a $\tilde{x}_0$, que és $\tilde{\delta}$. En particular, $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\delta}$ han de tenir el mateix punt final, que serà $\tilde{x}_0$, donat que $\tilde{\delta} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Per tant, $\tilde{\gamma}$ és tancat en $\tilde{x}_0$, que és el que havíem de veure. $\square$

D'altra banda, l'índex del subgrup coincideix amb el grau del l'espai recobridor:

Proposició 2.18. *Sigui $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un espai recobridor amb X i $\tilde{X}$ arcconnexos. Aleshores, el grau de l'espai recobridor coincideix amb l'índex de $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostració. Escrivim $H := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ i $\frac{\pi_1(X, x_0)}{H}$ el conjunt de classes laterals per la dreta de H . Considerem l'aplicació $\varphi: \frac{\pi_1(X, x_0)}{H} \rightarrow p^{-1}(x_0)$ donada per $\varphi(H[\gamma]) = \tilde{\gamma}(1)$, on $\tilde{\gamma}$ és l'aixecament de γ a $\tilde{X}$ començant a $\tilde{x}_0$. Anem a veure que és bijectiva, d'on conclourem el resultat.

Comencem comprovant que està ben definida. Com que $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, el camí γ és tancat en x_0 , és a dir, $\gamma(1) = x_0$. Com que $\tilde{\gamma}$ és un aixecament de γ , deduíem que $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_0)$. D'altra banda, suposem que $H[\gamma] = H[\gamma']$ i comprovem que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. Per hipòtesi, existeix $[\delta] \in H$ tal que $[\gamma] = [\delta][\gamma'] = [\delta * \gamma']$. Per la Proposició 2.17, sabem que l'aixecament $\tilde{\delta}$ de δ començant en $\tilde{x}_0$ serà tancat en $\tilde{x}_0$. Per tant, la concatenació $\tilde{\delta} * \tilde{\gamma}'$ està ben definida i serà l'aixecament $\widetilde{\delta * \gamma'}$ de $\delta * \gamma'$ començant en $\tilde{x}_0$. En particular, $\widetilde{\delta * \gamma'}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. A més, sabem que $[\gamma] = [\delta * \gamma']$, així que, per l'Observació 2.16, $\tilde{\gamma} \simeq \widetilde{\delta * \gamma'}$. En particular, tenen el mateix punt final i, per tant, $\tilde{\gamma}(1) = \widetilde{\delta * \gamma'}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$, que és el que volíem.

L'exhaustivitat de φ prové del fet que $\tilde{X}$ sigui arcconnex. En efecte, donat $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, podem trobar un camí $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$. Si posem $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$, tenim que γ és tancat en x_0 (d'on $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$) i que $\tilde{\gamma}$ és l'aixecament de γ començant en $\tilde{x}_0$. Per tant, $\varphi(H[\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$.

Pel que fa a la injectivitat, observem que si $\varphi(H[\gamma_1]) = \varphi(H[\gamma_2])$, tenim que els aixecaments $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ tenen el mateix punt final i podem per tant definir la concatenació $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$, que serà un camí tancat en $\tilde{x}_0$. Però $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ és l'aixecament de $\gamma_1 * \gamma_2$ començant a $\tilde{x}_0$. Com que és tancat en $\tilde{x}_0$, la Proposició 2.17 ens permet concloure que $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2] \in H$ i que, per tant, $H[\gamma_1] = H[\gamma_2]$. $\square$

Aquesta propietat ens permet demostrar finalment que el grup fonamental de $\mathbb{S}^1$ és $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.19. $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ per a qualsevol punt base $x_0 \in \mathbb{S}^1$.

Demostració. És clar que el grup fonamental no dependrà (llevat d'isomorfisme) del punt base considerat, perquè $\mathbb{S}^1$ és arcconnex.

Prenem $x_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$ i considerem l'espai recobridor $p: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, x_0)$ de l'Exemple 2.4. Sabem que $\mathbb{R}$ és simplement connex, així que $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 1$ i, per tant, també $p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = 1$. Observem també que $p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Per tant, la Proposició 2.18 que venim de demostrar ens diu que l'aplicació $\varphi: \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ donada per $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ és una bijecció (denotem per $\tilde{\gamma}$ l'aixecament del camí $\gamma: I \rightarrow \mathbb{S}^1$ a $\mathbb{R}$ començant en $0 \in \mathbb{R}$). Per a concloure el resultat basta comprovar que és un morfisme de grups.

Prenem doncs $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ i siguin $\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ els seus aixecaments a $\mathbb{R}$ començant a 0. Siguin $n = \tilde{\gamma}(1)$ i $m = \tilde{\delta}(1)$; és a dir, $\varphi([\gamma]) = n$ i $\varphi([\delta]) = m$. Considerem ara el camí $\tilde{\delta}': I \rightarrow \mathbb{R}$ definit per $\tilde{\delta}'(s) = n + \tilde{\delta}(s)$. Com que $p(n + x) = p(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, el camí $\tilde{\delta}'$ és un altre aixecament de δ , però començant a $n \in \mathbb{R}$. Com que $\tilde{\gamma}$ acabava en n , podem construir el camí $\tilde{\gamma} * \tilde{\delta}': I \rightarrow \mathbb{R}$. Clarament és l'aixecament de $\gamma * \delta$ a $\mathbb{R}$ començant en 0, i té punt final $\tilde{\delta}'(1) = n + m$. Per tant, concloem que

$$\varphi([\gamma] * [\delta]) = \tilde{\gamma} * \tilde{\delta}'(1) = n + m = \varphi([\gamma]) + \varphi([\delta])$$

i que φ és un morfisme de grups. □

3. Classificació d'espais recobridors arconnexos

La relació entre espais recobridors arconnexos d'un espai arconnex X amb punt base x_0 i subgrups del grup fonamental $\pi_1(X, x_0)$ via l'assignació

$$[p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)] \longrightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

és molt més profunda.

Concretament, a part que el grup $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ tingui la classe d'isomorfisme de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ i índex el grau de l'espai recobridor, com acabem de demostrar a la secció anterior, sota certes hipòtesis tècniques, l'assignació de dalt induïx una bijecció entre els subgrups de $\pi_1(X, x_0)$ i els espais recobridors arconnexos $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mòdul isomorfisme d'espais recobridors enviant punts base a punts base. És a dir, d'una banda, per a cada subgrup H de $\pi_1(X, x_0)$ existeix un espai recobridor arconnex tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. D'altra banda, donats dos espais recobridors arconnexos que donin lloc al mateix subgrup, han de ser isomorfs enviant el punt base d'un al punt base de l'altre. D'alguna manera, això ens està classificant els espais recobridors arconnexos de X : n'hi ha un (mòdul isomorfisme d'espais recobridors enviant punts base a punts base) per cada subgrup de $\pi_1(X, x_0)$.

A més, si el subgrup $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ associat a un espai recobridor arconnex $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ està contingut en el subgrup $(p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ associat a un altre espai recobridor arconnex $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$, resulta que $(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ és un espai recobridor de $(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$, en el sentit que existeix $p: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ satisfent la Definició 2.1 d'espai recobridor i tal que $p_2 \circ p = p_1$, és a dir, enviant la fibra per p_1 de cada punt $x \in X$ a la seva fibra per p_2 . És a dir, la bijecció inverteix els ordres dels conjunts, on l'ordre en els subgrups de $\pi_1(X, x_0)$ és el de la inclusió i l'ordre en els espais recobridors arconnexos correspon a estar un espai recobridor recobert per un altre en el sentit de dalt. Això és molt remissiu de la teoria de Galois i la correspondència entre extensions de cossos i subgrups del grup de Galois.

En aquest capítol formalitzem i demostrarem totes les afirmacions anteriors. Primer demostrarem l'exhaustivitat de l'assignació, és a dir, per a cada subgrup de $\pi_1(X, x_0)$, trobem un espai recobridor arconnex que tingui aquest subgrup per subgrup associat. Per a fer-ho ens caldrà demanar algunes propietats tècniques als espais involucrats. Després ens dedicarem a la injectivitat, és a dir, a demostrar que l'espai recobridor arconnex que haguem construït per a cada subgrup $H \leq \pi_1(X, x_0)$ és únic llevat d'aquesta relació d'isomorfisme d'espais recobridors enviant punts base a punts base. Per a fer-ho ens caldran abans un parell de lemes tècnics d'aixecament d'aplicacions. Finalment, podrem enunciar la bijecció i la propietat d'inversió dels ordres, que serà gairebé immediata a partir del que ja haguem demostrat.

3.1 Existència d'espais recobridors

Comencem demostrant que l'assignació és exhaustiva, és a dir, que per a cada subgrup de $\pi_1(X, x_0)$, podem trobar algun espai recobridor arconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ sigui aquest subgrup.

Exemple 3.1. Considerem els espais recobridors (arconnexos) de $\mathbb{S}^1$ dels Exemples 2.4 i 2.5. Sabem que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$, on a és la classe del camí $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ que dona una volta a $\mathbb{S}^1$; els seus subgrups són $\langle a^n \rangle$, per a $n \geq 0$. Per a l'espai recobridor $p: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, x_0)$ de l'Exemple 2.4 (on $x_0 := (1, 0) \in \mathbb{S}^1$), el subgrup $p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0))$ associat és clarament el trivial, perquè $\mathbb{R}$ és simplement connex. Per als espais recobridors $p_n: (\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, x_0)$ de l'Exemple 2.5, sabem que els subgrups $(p_n)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0))$ associats són isomorfs a $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, per la Proposició 2.17, però podem calcular

exactament quins subgrups de $\langle a \rangle$ són. En efecte, per a cada $n \geq 1$, $(p_n)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0))$ és el subgrup generat per $(p_n)_*(a) \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$. Però $(p_n)_*(a)$ és clarament la classe del camí que dona n voltes a $\mathbb{S}^1$, és a dir a^n . Per tant, $(p_n)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)) = \langle a^n \rangle$.

Per tant, en el cas de $X = \mathbb{S}^1$ és cert que l'assignació és exhaustiva, així que tenim esperances que ho sigui també en general, com a mínim si l'espai és "prou bo".

Donat $H \leq \pi_1(X, x_0)$, busquem un espai recobridor arconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. El cas més senzill és quan $H = \pi_1(X, x_0)$. En aquest cas, és clar que l'espai recobridor trivial $\text{id}: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ té per grup associat $H = \pi_1(X, x_0)$ (i és un espai recobridor arconnex perquè estem suposant que X és arconnex). Considerem ara el següent cas més simple: busquem un espai recobridor arconnex tal que el seu grup associat sigui el trivial: $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 1$. Com que p_* és injectiva, això és el mateix que demanar que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$. Com que també estem demanant que $\tilde{X}$ sigui arconnex, el que estem buscant és un espai recobridor simplement connex.

Per a trobar-lo ens cal imposar unes certes condicions a l'espai X . Tota l'estona estem suposant que X és arconnex. A més, ens restringirem a espais que siguin també localment arconnexos:

Definició 3.2. Diem que un espai topològic X és *localment arconnex* si per a cada punt $x \in X$ i cada entorn obert $x \in U \subseteq X$ existeix un entorn obert arconnex de x totalment contingut en U , és a dir, existeix $V \subseteq X$ obert arconnex amb $x \in V \subseteq U$.

Finalment, ens cal una última condició tècnica per a l'espai X :

Definició 3.3. Diem que un espai topològic X és *semilocalment simplement connex* si per a cada punt $x \in X$ existeix un entorn obert $U \ni x$ tal que $i_*(\pi_1(U, x)) = 1$, on $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ és el morfisme induït per la inclusió $i: U \rightarrow X$.

Sota aquestes hipòtesis ja podem demostrar el teorema següent:

Teorema 3.4. *Si X és arconnex, localment arconnex i semilocalment simplement connex. Aleshores, existeix un espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ simplement connex.*

Demostració. Definim $\tilde{X}$ com el conjunt de classes d'homotopia de camins en X començant a x_0 , és a dir,

$$\tilde{X} := \{[\gamma] \mid \gamma: I \rightarrow X \text{ contínua amb } \gamma(0) = x_0\},$$

on $[\gamma]$ denota la classe d'homotopia de $\gamma: I \rightarrow X$ com a camí en X .

Definim $p: \tilde{X} \rightarrow X$ com $p([\gamma]) = \gamma(1)$, que està ben definida perquè dos camins homòtops tenen el mateix punt final (per definició d'homotopia de camins).

Hem de definir una topologia en $\tilde{X}$ que faci que $p: \tilde{X} \rightarrow X$ sigui un espai recobridor i que $\tilde{X}$ sigui simplement connex. Ho farem construint-ne una base, que definirem a partir d'una base de la topologia de X .

Considerem el conjunt d'oberts de X següent:

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid U \text{ obert, arconnex i } i_*(\pi_1(U)) = 1\},$$

on $i_*: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ és el morfisme induït per la inclusió $i: U \rightarrow X$. Ometem els punts base en els grups fonamentals de U i X perquè són arconnexos i, per tant, que el grup fonamental sigui trivial no en depèn. Afirmem que $\mathcal{U}$ és una base de la topologia de X . Cal veure que:

- Donat $x \in X$ i $V \ni x$ un obert de X , existeix $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U \subseteq V$.

En efecte, com que X és semilocalment simplement connex, existeix $U_1 \ni x$ obert de X tal que $i_*(\pi_1(U_1, x)) = 1$. Aleshores, $U_1 \cap V$ també és obert i, com que X és localment arconnex, existeix un altre obert arconnex U_2 amb $x \in U_2 \subseteq U_1 \cap V \subseteq V$. A més, $i_*(\pi_1(U_2, x)) \subseteq i_*(\pi_1(U_1 \cap V, x)) \subseteq i_*(\pi_1(U_1, x)) = 1$, així que $i_*(\pi_1(U_2, x)) = 1$. Per tant, hem trobat un $U := U_2 \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U \subseteq V$, com volíem.

- Donats $U, V \in \mathcal{U}$, $x \in U \cap V$, existeix $W \in \mathcal{U}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

En efecte, $U \cap V$ és un obert de X i, com que X és localment arconnex, existeix U_1 obert arconnex tal que $x \in U_1 \subseteq U \cap V$. A més, $i_*(\pi_1(U_1, x)) \subseteq i_*(\pi_1(U \cap V, x)) \subseteq i_*(\pi_1(U, x)) = 1$, així que $i_*(\pi_1(U_1, x)) = 1$ i, per tant, ja hem trobat $W := U_1 \in \mathcal{U}$ amb $x \in W \subseteq U \cap V$, com volíem.

Per tant, $\mathcal{U}$ és una base de la topologia de X . Anem a definir una base per a una topologia de $\tilde{X}$ a partir d'aquest $\mathcal{U}$. Definim, per a $[\gamma] \in \tilde{X}$ i $U \in \mathcal{U}$ amb $\gamma(1) \in U$, el següent subconjunt de $\tilde{X}$:

$$B([\gamma], U) := \{[\gamma * \eta] \mid \eta: I \rightarrow U \text{ amb } \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

El conjunt $B([\gamma], U)$ està format les classes d'homotopia dels camins en X que es poden obtenir allargant γ amb un camí que no se surti de U . Observem que $B([\gamma], U)$ està ben definit, és a dir, no depèn del representant de $[\gamma]$ que triem. En efecte, si $\gamma \simeq \gamma'$, aleshores $\gamma(1) = \gamma'(1)$ i, per a cada $\eta: I \rightarrow U$ amb $\eta(0) = \gamma(1) = \gamma'(1)$, tenim que $\gamma * \eta \simeq \gamma' * \eta$.

Afirmem que els conjunts $B([\gamma], U)$ amb $[\gamma] \in \tilde{X}$, $U \in \mathcal{U}$, $U \ni \gamma(1)$, són base d'alguna topologia en $\tilde{X}$. Abans de demostrar-ho observem la següent propietat dels conjunts $B([\gamma], U)$:

$$[\gamma'] \in B([\gamma], U) \iff B([\gamma], U) = B([\gamma'], U) \quad (1)$$

En efecte, de dreta a esquerra és immediat perquè $[\gamma'] = [\gamma' * c_{\gamma'(1)}] \in B([\gamma'], U)$. Recíprocament, si $[\gamma'] \in B([\gamma], U)$, tindrem que $[\gamma'] = [\gamma * \eta]$ per a algun $\eta: I \rightarrow U$. Per tant, tot element de $B([\gamma'], U)$ serà de la forma $[\gamma' * \delta] = [\gamma * \eta * \delta]$, amb $\delta: I \rightarrow U$, i serà per tant de $B([\gamma], U)$; i viceversa, tot element de $B([\gamma], U)$ serà de la forma $[\gamma * \delta] = [\gamma' * \bar{\eta} * \delta]$, amb $\delta: I \rightarrow U$, i serà per tant de $B([\gamma'], U)$.

Ara ja podem demostrar que els conjunts $B([\gamma], U)$ amb $[\gamma] \in \tilde{X}$, $U \in \mathcal{U}$, $U \ni \gamma(1)$ són base d'alguna topologia en $\tilde{X}$. Escrivim $\tilde{\mathcal{U}} := \{B([\gamma], U) \mid [\gamma] \in \tilde{X}, U \in \mathcal{U}, U \ni \gamma(1)\}$. Hem de veure dues coses:

- Donat $[\gamma] \in \tilde{X}$, existeix algun element de $\tilde{\mathcal{U}}$ que el conté.

En efecte, basta prendre $B([\gamma], U) \in \tilde{\mathcal{U}}$ amb $U \in \mathcal{U}$ contenint $\gamma(1) \in X$. I això ho podem aconseguir perquè $\mathcal{U}$ és una base de la topologia de X .

- Donats $B([\gamma], U), B([\gamma'], U') \in \tilde{\mathcal{U}}$ i $[\gamma''] \in B([\gamma], U) \cap B([\gamma'], U')$, existeix $B([\delta], V) \in \tilde{\mathcal{U}}$ tal que $[\gamma''] \in B([\delta], V) \subseteq B([\gamma], U) \cap B([\gamma'], U')$.

En efecte, com que $\mathcal{U}$ és una base de la topologia de X , podem trobar $V \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma''(1) \in V \subseteq U \cap U'$. Ara, tenim que $[\gamma''] \in B([\gamma''], V) \subseteq B([\gamma''], U) \cap B([\gamma''], U') = B([\gamma], U) \cap B([\gamma'], U')$, on a l'última igualtat estem utilitzant (1). Per tant, ja hem trobat el $B([\delta], V) := B([\gamma''], V) \in \tilde{\mathcal{U}}$ que volíem.

Per tant, ja tenim una topologia definida a $\tilde{X}$: la generada per la base $\tilde{\mathcal{U}}$. Ara hem de veure que, amb aquesta topologia, $\tilde{X}$ amb l'aplicació $p: \tilde{X} \rightarrow X$ definida per $p([\gamma]) = \gamma(1)$ és un espai recobridor, i que $\tilde{X}$ és simplement connex.

Per a veure que $p: \tilde{X} \rightarrow X$ és contínua, com que $\mathcal{U}$ és base de X , basta veure que $p^{-1}(U)$ és obert per a tot $U \in \mathcal{U}$. Però, donat $U \in \mathcal{U}$, es té que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma(1) \in U} B([\gamma], U)$, que és unió d'oberts de $\tilde{X}$ i, doncs, també obert de $\tilde{X}$.

Vegem que $p: \tilde{X} \rightarrow X$ és un espai recobridor. Donat $x \in X$, com que $\mathcal{U}$ és base, podem trobar $x \in U \in \mathcal{U}$. Afirmem que $p^{-1}(U)$ es pot posar com a unió disjunta d'oberts de $\tilde{X}$ tals que p restringida a cadascun d'ells dona un homeomorfisme amb U . En efecte, tenim que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma(1) \in U} B([\gamma], U) = \bigsqcup_{\gamma(1) \in U} B([\gamma], U)$, on podem posar l'última unió disjunta perquè dos conjunts $B([\gamma], U)$ i $B([\gamma'], U)$ o bé són iguals o bé són disjunts, per (1).

Ara ens cal comprovar que $p|_{B([\gamma], U)}: B([\gamma], U) \rightarrow U$ és un homeomorfisme.

- p és contínua, perquè és restricció de p , que ja hem vist que ho és.
- És exhaustiva perquè, en ser U un element de $\mathcal{U}$, és arconnex, així que, donat $x \in U$, hi ha un camí $\eta: I \rightarrow U$ amb $\eta(0) = \gamma(1)$, $\eta(1) = x$, i tenim que $x = p([\gamma * \eta])$, amb $[\gamma * \eta] \in B([\gamma], U)$.
- Per a veure que és injectiva, prenem $[\gamma'], [\gamma''] \in B([\gamma], U)$, suposem que $p([\gamma']) = p([\gamma''])$, és a dir, que $\gamma'(1) = \gamma''(1)$, i vegem que $[\gamma'] = [\gamma'']$, és a dir, que γ' i γ'' són homòtops per una homotopia en X . Com que $[\gamma'], [\gamma''] \in B([\gamma], U)$, podem posar $[\gamma'] = [\gamma * \eta']$, $[\gamma''] = [\gamma * \eta'']$ amb $\eta', \eta'': I \rightarrow U$, $\eta'(0) = \eta''(0) = \gamma(1)$ i $\eta'(1) = \eta''(1) = \gamma'(1) = \gamma''(1)$. Tenim que $\eta' * \overline{\eta''}$ és un camí tancat en $\gamma(1)$ totalment contingut en U . Per tant, com que $i_*(\pi_1(U)) = 1$, tenim que $\eta' * \overline{\eta''} \simeq c_{\gamma(1)}$, on $\simeq$ denota la relació d'homotopia de camins en X , de forma que $\eta' \simeq \eta''$ i, per tant, $\gamma' \simeq \gamma * \eta' \simeq \gamma * \eta'' \simeq \gamma''$. Així, $[\gamma'] = [\gamma'']$, com volíem veure.
- Falta veure que té inversa contínua o, equivalentment, que envia oberts a oberts. Basta veure que envia oberts bàsics a oberts. Els oberts bàsics de $B([\gamma], U)$ seran interseccions de conjunts $B([\gamma'], U') \in \tilde{\mathcal{U}}$ amb $B([\gamma], U)$. Com que $B([\gamma], U) \in \tilde{\mathcal{U}}$ i $\tilde{\mathcal{U}}$ és base, cada element $[\gamma''] \in B([\gamma], U) \cap B([\gamma'], U')$ tindrà un entorn de la forma $B([\gamma''], U'')$ totalment contingut a $B([\gamma], U) \cap B([\gamma'], U')$. Per tant, basta veure que les imatges d'aquests entorns són obertes en X . Però $p|_{B([\gamma], U)}(B([\gamma''], U''))$ és obert en X , perquè $p|_{B([\gamma], U)}(B([\gamma''], U'')) = p(B([\gamma''], U'')) = U''$. Justifiquem l'última igualtat. Donat $x \in U''$, com que $U'' \in \mathcal{U}$ és arconnex, existeix $\eta: I \rightarrow U''$ amb $\eta(0) = \gamma''(1)$, $\eta(1) = x$. Ara $[\gamma'' * \eta] \in B([\gamma''], U'')$ i $p([\gamma'' * \eta]) = \eta(1) = x$, així que $x \in p(B([\gamma''], U''))$. Recíprocament, donat un element de $B([\gamma''], U'')$, serà de la forma $[\gamma'' * \eta]$, amb $\eta: I \rightarrow U''$, i tindrem que $p([\gamma'' * \eta]) = \eta(1) \in U''$.

Triem com a punt base de $\tilde{X}$ la classe del camí constant a x_0 , que denotem per $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}]$. Clarament $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Per tant, ja hem justificat que $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ és un espai recobridor.

Per acabar només ens falta veure que $\tilde{X}$ és simplement connex.

Comencem veient que és arconnex. Vegem que tot element $[\gamma] \in \tilde{X}$ es pot unir per un camí continu al punt base $\tilde{x}_0$. És a dir, busquem $g: I \rightarrow \tilde{X}$ contínua amb $g(0) = [\tilde{x}_0]$, $g(1) = [\gamma]$. Considerem $g: I \rightarrow \tilde{X}$ donada per $g(t) = [\gamma_t]$, on definim $\gamma_t: I \rightarrow X$ com $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$. Geomètricament, γ_t és el mateix camí γ però recorregut només fins a $\gamma(t)$. Per tant, g comença a (la classe de) el camí constant igual a $\gamma(0) = x_0$ i va estirant-lo fins a ser (la classe de) γ . Clarament tenim que $g(0) = [\tilde{x}_0]$ i $g(1) = [\gamma]$. Falta comprovar que $g: I \rightarrow \tilde{X}$ és continu.

Vegem doncs que $g^{-1}(B([\delta], U))$ és obert de $I = [0, 1]$ per a qualsevol obert bàsic $B([\delta], U) \in \tilde{\mathcal{U}}$. Prenem $[\gamma_{t_0}] \in B([\delta], U)$ i trobem $\varepsilon > 0$ tal que si $|t - t_0| \leq \varepsilon$ aleshores $[\gamma_t] \in B([\delta], U)$. Com que U és obert de X i $\gamma: I \rightarrow X$ és contínua, podem prendre $\varepsilon > 0$ tal que si $|t - t_0| \leq \varepsilon$ aleshores $\gamma(t) \in U$. Vegem que, per a aquests mateixos valors de t , es té que $[\gamma_t] \in B([\delta], U)$ i haurem acabat. Com que $[\gamma_{t_0}] \in B([\delta], U)$,

podem posar $\gamma_{t_0} \simeq \delta * \eta$, amb $\eta: I \rightarrow U$. Ara, si denotem per $\gamma_{t_0,t}$ el camí que fa γ entre t_0 i t , que està totalment contingut en U , perquè $|t - t_0| \leq \varepsilon$, tenim que $\delta * (\eta * \gamma_{t_0,t}) \simeq (\delta * \eta) * \gamma_{t_0,t} \simeq \gamma_{t_0} * \gamma_{t_0,t} \simeq \gamma_t$, així que $[\gamma_t] = [\delta * (\eta * \gamma_{t_0,t})] \in B([\delta], U)$.

Finalment, vegem que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$. Prenem $[f] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ i vegem que $[f] = [c_{\tilde{x}_0}]$. Per a cada $t \in I$, $f(t)$ és un element de $\tilde{X}$, és a dir, la classe d'un camí $I \rightarrow X$. Com que $[f] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, tenim que $f(0) = f(1) = [\tilde{x}_0] = [c_{x_0}]$. Considerem el camí $\gamma: I \rightarrow X$ que formen els punts finals dels camins $f(t)$ en X , és a dir, $\gamma := p \circ f$, que serà un camí en X tancat en x_0 . Si veiem que $[\gamma] = [c_{x_0}]$ haurem acabat, perquè tindrem que $p_*([f]) = [p \circ f] = [\gamma] = [c_{x_0}]$ i doncs que $[f] = [c_{\tilde{x}_0}]$, per injectivitat de p_* . Considerem ara un altre camí a $\tilde{X}$, aquell que a cada t és aquest camí γ però recorregut només fins a $\gamma(t)$, és a dir, $g: I \rightarrow \tilde{X}$ donat per $g(t) = [\gamma_t]$, on $\gamma_t: I \rightarrow X$ ve donat per $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$. Tenim que $f, g: I \rightarrow \tilde{X}$ són, els dos, aixecaments de $\gamma: I \rightarrow X$. En efecte, γ ja estava definit com $\gamma = p \circ f$, i $p(g(t)) = p([\gamma_t]) = \gamma_t(1) = \gamma(t)$. Com que, a més, $f(0) = [c_{x_0}] = g(0)$, tenim, per unicatat d'aixecaments de camins, que $f = g$. Aplicat a $t = 1$ resulta que $[c_{x_0}] = f(1) = g(1) = [\gamma_1] = [\gamma] = [p \circ f] = p_*([f])$. Com que p_* és injectiva, concloem que $[f] = [c_{\tilde{x}_0}]$, que és el que volíem veure. $\square$

Anem a veure que, de fet, podem utilitzar aquest espai recobridor simplement connex per a construir espais recobridors arconnexos realitzant cada subgrup de $\pi_1(X, x_0)$.

Teorema 3.5. *Siguin X arconnex, localment arconnex i semilocalment simplement connex i $H \leq \pi_1(X, x_0)$. Aleshores, existeix un espai recobridor arconnex $p_H: (X_H, x_{0,H}) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H})) = H$.*

Demostració. La idea de la demostració és que, per la Proposició 2.17, els elements de $p_*(\pi_1(X_H, x_{0,H}))$ són exactament les classes de camins en X tancats en x_0 que, en aixecar-los a X_H començant a $x_{0,H}$, són tancats en $x_{0,H}$. Per tant, per a cada $[\gamma] \in H \leq \pi_1(X, x_0)$, volem que l'aixecament de γ a X_H començant a $x_{0,H}$ sigui tancat, perquè així $[\gamma]$ estarà a $p_*(\pi_1(X_H, x_{0,H}))$, que és el que volem. Partim de l'espai recobridor simplement connex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ construït al Teorema 3.4. Podem aixecar γ a un camí $\tilde{\gamma}$ en $\tilde{X}$ començant en $\tilde{x}_0$. Concretament, una manera d'escriure aquest aixecament és $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t]$, definit com al Teorema 3.4, així que $\tilde{\gamma}$ tindrà punt final $[\gamma_1] = [\gamma]$. Perquè l'aixecament $\tilde{\gamma}$ de γ sigui tancat haurem d'identificar el seu punt final $[\gamma]$ amb $\tilde{x}_0$. Per tant, construïrem X_H a partir de $\tilde{X}$ fent quocient per una relació d'equivalència que identifiqui $[\gamma] \in \tilde{X}$ i $\tilde{x}_0$ si $[\gamma] \in H \leq \pi_1(X, x_0)$.

Per tant, considerem un espai recobridor simplement connex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, que existeix pel Teorema 3.4, i la següent relació d'equivalència en $\tilde{X}$:

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \iff \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ i } [\gamma * \overline{\gamma'}] \in H$$

Observem en particular que $[\gamma] \sim \tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$ si i només si $\gamma(1) = x_0$ i $[\gamma] = [\gamma * \overline{c_{x_0}}] \in H$, que és el que volíem intuïtivament.

Cal veure que $\sim$ és una relació d'equivalència i que, si definim $X_H := \tilde{X} / \sim$ i $x_{0,H} := \pi(\tilde{x}_0)$, on $\pi: \tilde{X} \rightarrow X_H$ és la projecció al quocient, aleshores tenim que $p_H: (X_H, x_{0,H}) \rightarrow (X, x_0)$ és un espai recobridor i que $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H})) = H$. Que X_H és arconnex és immediat, en ser un quocient de $\tilde{X}$, que és arconnex.

Que $\sim$ és relació d'equivalència és immediat de les propietats que fan que H sigui subgrup:

- Reflexivitat: Donat $[\gamma] \in \tilde{X}$, tenim que $[\gamma] \sim [\gamma]$ perquè $[\gamma * \overline{\gamma}] = [c_{x_0}] \in H$, perquè H conté l'element neutre de $\pi_1(X, x_0)$ en ser-ne subgrup.

- Simetria: Donats $[\gamma], [\gamma'] \in \tilde{X}$ amb $[\gamma] \sim [\gamma']$, tenim que $[\gamma * \bar{\gamma}] \in H$ i, per tant, per ser H subgrup, que $[\gamma' * \bar{\gamma}] = [\gamma * \bar{\gamma}] \in H$, de manera que $[\gamma'] \sim [\gamma]$.
- Transitivitat: Donats $[\gamma], [\gamma'], [\gamma''] \in \tilde{X}$ amb $[\gamma] \sim [\gamma']$ i $[\gamma'] \sim [\gamma'']$, tenim que $[\gamma * \bar{\gamma}], [\gamma' * \bar{\gamma}'] \in H$ i, per ser H subgrup, $[\gamma * \bar{\gamma}'] = [\gamma * \bar{\gamma}] * \gamma' * \bar{\gamma}'' = [\gamma * \bar{\gamma}][\gamma' * \bar{\gamma}'] \in H$, de manera que $[\gamma] \sim [\gamma'']$.

Per tant, ja podem definir l'espai quocient $X_H := \tilde{X}/\sim$, la projecció al quocient $\pi: \tilde{X} \rightarrow X_H$ i el que serà el punt base de l'espai recobridor, $x_{0,H} := \pi(\tilde{x}_0)$. Definim $p_H: X_H \rightarrow X$ com l'única aplicació que fa commutar el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X_H \\ & \searrow p & \downarrow p_H \\ & & X \end{array}$$

Està ben definida perquè si $[\gamma] \sim [\gamma']$ aleshores $p([\gamma]) = \gamma(1) = \gamma'(1) = p([\gamma'])$. A més, és contínua per la propietat universal de la topologia quocient, i $p_H(x_{0,H}) = p_H(\pi(\tilde{x}_0)) = p(\tilde{x}_0) = x_0$. Per tant, tenim ben definida una aplicació contínua $p_H: (X_H, x_{0,H}) \rightarrow (X, x_0)$. Vegem que és un espai recobridor de X .

Donat un punt $x \in X$, amb les notacions de la demostració del Teorema 3.4, hi ha un entorn $p \in U \in \mathcal{U}$ de manera que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\gamma(1) \in U} B([\gamma], U)$ i $p|_{B([\gamma], U)}: B([\gamma], U) \rightarrow U$ és un homeomorfisme. Tenim per tant que $p_H^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma(1) \in U} \pi(B([\gamma], U))$. Vegem que la unió és disjunta, en el sentit que dos $\pi(B([\gamma], U)), \pi(B([\gamma'], U))$ o bé són iguals o bé són disjunts, i que $p_H|_{\pi(B([\gamma], U))}: \pi(B([\gamma], U)) \rightarrow U$ és un homeomorfisme.

Que $p_H: B([\gamma], U) \rightarrow U$ és un homeomorfisme és immediat sabent que $p: B([\gamma], U) \rightarrow U$ ho és, pel següent diagrama commutatiu (per a alleugerir la notació obviem les restriccions):

$$\begin{array}{ccc} B([\gamma], U) & \xrightarrow{\pi} & \pi(B([\gamma], U)) \\ & \searrow p & \downarrow p_H \\ & & U \end{array}$$

L'aplicació p_H és injectiva perquè, donats dos elements $\pi([\delta]), \pi([\delta']) \in \pi(B([\gamma], U))$ amb $p_H(\pi([\delta])) = p_H(\pi([\delta']))$, tenim que $p([\delta]) = p([\delta'])$ i, com que p és injectiva, deduïm que $[\delta] = [\delta']$ i que $\pi([\delta]) = \pi([\delta'])$. I és exhaustiva perquè, donat $y \in U$, com que p és exhaustiva, existeix $[\delta] \in B([\gamma], U)$ tal que $p([\delta]) = y$, i aleshores $\pi([\delta])$ és un element de $\pi(B([\gamma], U))$ tal que $p_H(\pi([\delta])) = y$. És contínua per la propietat universal de la topologia quocient. I té inversa contínua perquè $p_H^{-1} = \pi \circ p^{-1}$, i π i p^{-1} són contínues.

Vegem que la unió és disjunta. Suposem doncs que $\pi(B([\gamma], U)) \cap \pi(B([\gamma'], U)) \neq \emptyset$ i vegem que $\pi(B([\gamma], U)) = \pi(B([\gamma'], U))$. Prenem doncs $[\delta] \in B([\gamma], U)$ i $[\delta'] \in B([\gamma'], U)$ suposant que $\pi([\delta]) = \pi([\delta'])$, és a dir, que $[\delta] \sim [\delta']$, i comprovem que $\pi(B([\gamma], U)) = \pi(B([\gamma'], U))$. Per la propietat (1) que vam demostrar en el teorema anterior, sabem que $B([\gamma], U) = B([\delta], U)$ i que $B([\gamma'], U) = B([\delta'], U)$. Per tant, cada element de $B([\gamma], U)$ es pot posar com $[\delta * \eta]$ amb algun $\eta: I \rightarrow U$ i, simètricament, tot element de $B([\gamma'], U)$ es pot posar com $[\delta' * \eta']$, amb $\eta': I \rightarrow U$. Però, aleshores, cada element $[\delta * \eta] \in B([\delta], U) = B([\gamma], U)$ està identificat amb l'element $[\delta' * \eta] \in B([\delta'], U) = B([\gamma'], U)$ corresponent al mateix $\eta: I \rightarrow U$: clarament $(\delta * \eta)(1) = \eta(1) = (\delta' * \eta)(1)$ i $[\delta * \eta * \bar{\delta'} * \eta] = [\delta * \eta * \bar{\eta} * \bar{\delta'}] = [\delta * \bar{\delta'}] \in H$, perquè $[\delta] \sim [\delta']$ per hipòtesi. Com que cada element de $B([\gamma], U)$ està identificat amb un element de $B([\gamma'], U)$ i viceversa, concloem que $\pi(B([\gamma], U)) = \pi(B([\gamma'], U))$.

Només falta veure que $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H})) = H$. Recordem que els elements de $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H})) = H$ són les classes de camins en X tancats en x_0 tals que el seu aixecament a X_H començant en $x_{0,H}$ és tancat en $x_{0,H}$. Anem a veure la igualtat utilitzant aquesta caracterització.

Donat $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, sigui $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}$ el seu aixecament a $\tilde{X}$ amb punt inicial $\tilde{x}_0$. Explícitament, podem escriure $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t]$, la classe del camí γ recorregut només fins a $\gamma(t)$. Aleshores, l'aixecament de γ a X_H amb punt inicial $x_{0,H}$ és, per unicitat dels aixecaments de camins, $\pi \circ \tilde{\gamma}$. Aleshores, $[\gamma]$ serà de $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H}))$ si i només si aquest aixecament és tancat en $x_{0,H}$, és a dir, si i només si el punt final de $\pi \circ \tilde{\gamma}$ és $x_{0,H}$. Vegem que això és equivalent al fet que $[\gamma]$ sigui de H . El punt final de $\pi \circ \tilde{\gamma}$ és $\pi(\tilde{\gamma}(1)) = \pi([\gamma_1]) = \pi([\gamma])$. Per tant, el punt final de $\pi \circ \tilde{\gamma}$ serà $x_{0,H} = \pi(\tilde{x}_0) = \pi([c_{x_0}])$ si i només si $[\gamma] \sim [c_{x_0}]$. Com que $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, γ és tancat en x_0 i, per tant, $\gamma(1) = x_0 = c_{x_0}(1)$, així que $[\gamma] \sim [c_{x_0}]$ si i només si $[\gamma * \overline{c_{x_0}}] \in H$, per definició de $\sim$. Però $[\gamma * \overline{c_{x_0}}] = [\gamma]$, de manera que hem demostrat que $[\gamma] \in (p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H})) \iff [\gamma] \in H$, així que concloem que $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_{0,H})) = H$, que era el que ens quedava per demostrar. $\square$

3.2 Lemes d'aixecament generals

Un cop demostrat que, si X és arcconnex, localment arcconnex i semilocalment simplement connex, per a cada subgrup de $\pi_1(X, x_0)$ existeix un espai recobridor arcconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ és aquest subgrup, considerem la unicitat (llevat d'isomorfisme) d'aquest espai recobridor. El resultat principal en aquest sentit el donarem en la propera secció. Per a demostra-lo, ens caldran uns resultats anàlegs al Lema 2.14 d'aixecament d'homotopies que caracteritzin quan podem aixecar aplicacions contínues sortint d'espais topològics Y més arbitraris, no només homotopies (és a dir, sortint de $Y \times I$, amb Y arbitrari) i que ens diguin quan aquests aixecaments són únics.

El primer resultat és sobre l'existència de tals aixecaments:

Lema 3.6. *Suposem que tenim un espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ i una aplicació contínua $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, amb Y arcconnex i localment arcconnex.*

Aleshores, existeix un aixecament $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ de f si i només si $f_(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Demostració. Suposem que existeix un aixecament, és a dir, que tenim $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ satisfent que $p \circ \tilde{f} = f$. Qualsevol element de $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ és de la forma $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$, amb $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$. Però $[f \circ \gamma] = [p \circ \tilde{f} \circ \gamma] = p_*([\tilde{f} \circ \gamma]) \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Per tant, ja hem justificat que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Recíprocament, suposem que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Construïm l'aixecament $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ com segueix: donat $y \in Y$, prenem un camí $\gamma: I \rightarrow Y$ de y_0 a y (podem perquè Y és arcconnex); aleshores, considerem el camí $f \circ \gamma$ en X ; per l'Observació 2.15, existeix un únic aixecament $\tilde{f} \circ \gamma: I \rightarrow \tilde{X}$ de $f \circ \gamma$ començant en $\tilde{x}_0$; definim $\tilde{f}(y) := \tilde{f} \circ \gamma(1)$.

Vegem que $\tilde{f}$ està ben definit. Prenem dos camins γ, γ' en Y de y_0 a y . Aleshores, $\gamma * \overline{\gamma'}$ és un camí en Y tancat en y_0 . Ara, com que $[f \circ (\gamma * \overline{\gamma'})] = f_*([\gamma * \overline{\gamma'}]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, deduïm que $f \circ (\gamma * \overline{\gamma'})$ ha de ser homòtop a un camí $I \rightarrow X$ tancat en x_0 tal que el seu aixecament a $\tilde{X}$ començant en $\tilde{x}_0$ és tancat en $\tilde{x}_0$. Per l'Observació 2.16 d'aixecament d'homotopies de camins, l'aixecament de $f \circ (\gamma * \overline{\gamma'})$ a $\tilde{X}$ començant en $\tilde{x}_0$ també ha de ser tancat en $\tilde{x}_0$. Per tant, per unicitat d'aixecament de camins, ha de coincidir amb $(\tilde{f} \circ \gamma) * (\tilde{f} \circ \overline{\gamma'})$. Però si aquest camí està ben definit, ha de ser que $\tilde{f} \circ \gamma(1) = \tilde{f} \circ \gamma'(1)$, així que $\tilde{f}$ està ben definit.

Finalment, vegem que $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ és contínua. Sigui $y \in Y$ i $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ un obert contenint $\tilde{f}(y)$. Trobem un obert $V \ni y$ tal que $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. És senzill comprovar que podem suposar que $\tilde{U}$ és una capa per p d'un obert $f(y) \in U \subseteq X$. Com que f és contínua i Y és localment arconnex, existeix un obert arconnex $V \ni y$ tal que $f(V) \subseteq U$. Ara, fixat un camí γ en Y de y_0 a y , donat qualsevol camí δ en V de y a un punt $\delta(1)$ de V arbitrari, l'aixecament del camí $f \circ (\gamma * \delta)$ a $\tilde{X}$ començant en $\tilde{x}_0$ tindrà punt final en $\tilde{U}$: el seu aixecament és $(\widetilde{f \circ \gamma}) * (\widetilde{f \circ \delta})$, on $\widetilde{f \circ \gamma}$ és l'aixecament de $f \circ \gamma$ a $\tilde{X}$ començant en $\tilde{x}_0$ i $\widetilde{f \circ \delta}$ és l'aixecament de $f \circ \delta$ a $\tilde{X}$ començant en el punt final de $\widetilde{f \circ \gamma}$, que és, per definició, $\tilde{f}(y) \in \tilde{U}$; com que, per construcció, $f \circ \delta$ està totalment contingut en U i $\tilde{U}$ es projecta homeomòrficament en U per p , deduïm que $\widetilde{f \circ \delta}$ està totalment contingut en $\tilde{U}$; en particular, el seu punt final està en $\tilde{U}$. Per tant, per definició de $\tilde{f}$, tenim que $\tilde{f}(\delta(1)) \in \tilde{U}$. Com que $\delta(1)$ era un punt arbitrari de V , concloem que $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. $\square$

Finalment, un resultat sobre la unicitat d'aquests aixecaments:

Lema 3.7. *Donat un espai recobridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$ i una aplicació contínua $f: Y \rightarrow X$ amb Y connex, si dos aixecaments $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Y \rightarrow \tilde{X}$ coincideixen en un punt, aleshores han de ser iguals.*

Demostració. Siguin $y \in Y$ i U un entorn de $f(y) \in X$ uniformement recobert per p . Siguin $\tilde{U}_1$ i $\tilde{U}_2$ les capes de U contenint $\tilde{f}_1(y)$ i $\tilde{f}_2(y)$, respectivament. Per continuïtat de $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$, existeix un entorn $N \ni y$ que va a parar a $\tilde{U}_1$ per $\tilde{f}_1$ i a $\tilde{U}_2$ per $\tilde{f}_2$.

D'una banda, si $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$, aleshores $\tilde{U}_1$ i $\tilde{U}_2$ són dues capes diferents de U (altrament, la capa $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$ contindria dos punts diferents que van a parar a y per p , així que p no podria ser un homeomorfisme entre $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$ i U). Aleshores, les capes $\tilde{U}_1$ i $\tilde{U}_2$ són disjunts i, per tant, $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ són diferents en tot l'entorn $N \ni y$. Fent aquest argument per a tots els punts $y \in Y$ on $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ difereixin tenim que el conjunt de punts de Y on $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ són diferents és obert. Per tant, el conjunt de punts de Y on $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ coincideixen és tancat.

D'altra banda, si $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, aleshores és clar que, per definició, $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$. Ara, com que $p \circ \tilde{f}_1 = f = p \circ \tilde{f}_2$ i p és injectiva en $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$, concloem que $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ coincideixen en tot l'entorn $N \ni y$. Repetint aquest raonament per a tots els punts $y \in Y$ on $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ siguin iguals concloem que el conjunt de punts de Y on $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ coincideixen és obert.

Per tant, el conjunt de punts de Y on $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ coincideixen és obert i tancat alhora. Com que Y és connex, només pot ser o buit o tot Y . Com que, per hipòtesi, no és buit, ha de ser tot Y , és a dir, en tots els punts $y \in Y$ s'ha de satisfer que $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$. $\square$

3.3 Unicitat d'espais recobridors

Considerem la unicitat de l'espai recobridor arconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ sigui un subgrup donat de $\pi_1(X, x_0)$, sempre sota les hipòtesis que X sigui arconnex, localment arconnex i semilocalment simplement connex, que són les que ens han permès demostrar-ne l'existència.

És clar que sense restringir-nos com a mínim a espais recobridors connexos no podríem tenir unicitat: en efecte, sempre que tinguéssim un espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, podríem considerar un nou espai recobridor $p': (\tilde{X} \sqcup \tilde{X}, \tilde{x}_{0,1}) \rightarrow (X, x_0)$ sortint de la unió disjunta de dos $\tilde{X}$ que en cadascun dels dos $\tilde{X}$ coincidís amb p , on denotem per $\tilde{x}_{0,1}$ el punt corresponent al $\tilde{x}_0$ de la primera còpia de $\tilde{X}$ en la unió disjunta. Els dos espais recobridors no serien isomorfs perquè $\tilde{X}$ no és homeomorf a la unió disjunta $\tilde{X} \sqcup \tilde{X}$: el segon té el doble de components connexes que el primer. En canvi, com que el grup fonamental d'un espai només depèn de la component arconnexa del punt base, sí que tindrem que $p'_*(\pi_1(\tilde{X} \sqcup \tilde{X}, \tilde{x}_{0,1})) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

De fet, ens estem limitant a considerar espais recobridors arconnexos, però això no és més restrictiu, perquè si X és localment arconnex (com estem suposant), també ho serà $\tilde{X}$ i, per tant, $\tilde{X}$ serà connex si i només si és arconnex. Ho veiem en els dos resultats següents.

Lema 3.8. *Donat un espai recobridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$, si X és localment arconnex, també ho és $\tilde{X}$.*

Demostració. Sigui $\tilde{x} \in \tilde{X}$ i $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ un obert de $\tilde{X}$. Volem trobar un obert arconnex de $\tilde{X}$ conenint $\tilde{x}$ i contingut en $\tilde{U}$. Sigui $x = p(\tilde{x})$. Com que $p: \tilde{X} \rightarrow X$ és un espai recobridor, existeix un obert $V \ni x$ uniformement recobert per p . Tenim que $\tilde{x} \in p^{-1}(V)$, així que podem considerar $\tilde{V}$ la capa (que és un obert) de V que contingui $\tilde{x}$. Tindrem doncs que $p|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow V$ serà un homeomorfisme. Considerem $\tilde{U} \cap \tilde{V}$, que és un obert de $\tilde{V}$. Per tant, $p(\tilde{U} \cap \tilde{V})$ serà un obert de V i, per tant, un obert de X . Com que X és localment arconnex, existeix un obert arconnex $W \subseteq p(\tilde{U} \cap \tilde{V})$. Ara $\tilde{W} := (p|_{\tilde{V}})^{-1}(W)$ serà un obert arconnex contenint $\tilde{x}$ i contingut en $\tilde{U}$. $\square$

Lema 3.9. *Si X és localment arconnex, aleshores X és connex si i només si és arconnex.*

Demostració. Tot espai arconnex és connex, independentment de si és localment arconnex. Vegem el recíproc sota la hipòtesi que X és localment arconnex.

Prenem $x \in X$ i considerem la component arconnexa de x :

$$C = \{y \in X \mid \exists \gamma: I \rightarrow X \text{ camí continu de } x \text{ a } y\}.$$

Volem veure que $C = X$. Com que X és connex i $C \neq \emptyset$ (ja que conté x), basta veure que C és oberta i tancada.

Vegem en primer lloc que C és oberta. Prenem $y \in C$. Com que X és localment arconnex, existeix un obert arconnex $U \ni y \subseteq X$. Afirmem que $U \subseteq C$. En efecte, donat $z \in U$, com que $y \in U$ i U és arconnex, existeix un camí δ de y a z . Com que $y \in C$, existeix un camí γ entre x i y . Per tant, $\gamma * \delta$ és un camí de x a z , el que ens diu que $z \in C$.

Vegem que C és tancada. Anem a veure que $\overline{C} = C$. Prenem $z \in \overline{C}$ i vegem que $z \in C$. Com que X és localment arconnex, existeix un obert arconnex $U \ni z \subseteq X$. Per definició d'adherència, $C \cap U \neq \emptyset$. Podem prendre doncs $y \in C \cap U$. Ara, com que $y, z \in U$ i U és arconnex, existeix un camí δ de y a z . Com que $y \in C$, existeix un camí γ de x a y . Per tant, $\gamma * \delta$ és un camí de x a z i concloem que $z \in C$. $\square$

Pensem en l'exemple dels espais recobridors arconnexos de $\mathbb{S}^1$, $p: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, x_0)$ amb subgrup associat el subgrup trivial de $\langle a \rangle = \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ i $p_n: (\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, x_0)$ corresponent al subgrup $\langle a^n \rangle$ (les notacions són les mateixes que vam utilitzar en els Exemples 2.4 i 2.5 i quan vam calcular els subgrups associats, a la Secció 3.1). En aquest cas, els espais recobridors corresponents a subgrups diferents són no isomorfs: vam veure-ho a l'Observació 2.12 usant que tenien graus diferents. En vista d'això, potser voldríem demostrar que dos espais recobridors arconnexos tenen el mateix subgrup associat si i només si són isomorfs. Això no és cert en general, però. En general cal tenir cura d'on van a parar els punts base a través de l'isomorfisme: els espais recobridors arconnexos $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ i $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ tindran el mateix grup associat si i només si són isomorfs per un isomorfisme enviant $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$. És a dir, podrien existir dos espais recobridors arconnexos que fossin isomorfs però que tot i això tinguessin grups associats diferents perquè, tot i existir isomorfismes entre ells, cap d'aquests isomorfismes enviés el punt base d'un al punt base de l'altre. El resultat concret és el següent:

Proposició 3.10. *Sigui X arconnex i localment arconnex i siguin $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ i $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ dos espais recobridors arconnexos. Aleshores, $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ si i només si els espais recobridors $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ i $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ són isomorfs via un isomorfisme enviant el punt base $\tilde{x}_1$ d'un al punt base $\tilde{x}_2$ de l'altre (diem que l'isomorfisme preserva els punts base).*

Demostració. Comencem suposant que tenim un isomorfisme d'espais recobridors $f: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$, on la notació ja indica que $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. És a dir, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow[\cong]{f} & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Com que f és un homeomorfisme i $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, el morfisme induït f_* és un isomorfisme entre $\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ i $\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Per tant,

$$(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2 \circ f)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(f_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$$

Recíprocament, suposem que $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ i construïm un isomorfisme entre $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ i $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ enviant $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$. Considerem el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Observem que, en ser X localment arconnex, també ho són $\tilde{X}_1$ i $\tilde{X}_2$, pel Lema 3.8. Per tant, se satisfan totes les hipòtesis per a aplicar el Lema 3.6 d'existència d'aixecaments, i podem aixecar $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ a una aplicació contínua $\tilde{p}_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. És a dir, tenim que $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$ i que $\tilde{p}_1(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. De la mateixa manera, podem aixecar $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ a una aplicació contínua $\tilde{p}_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$. Es té doncs que $p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2$ i que $\tilde{p}_2(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. És a dir, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightleftharpoons[\tilde{p}_2]{\tilde{p}_1} & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Observem que $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ i $\text{id}_{\tilde{X}_1}$ són aixecaments a $\tilde{X}_2$ de la mateixa aplicació, perquè $p_2 \circ \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = p_1 \circ \tilde{p}_2 = p_2 = p_2 \circ \text{id}_{\tilde{X}_2}$. A més, coincideixen en el punt $\tilde{x}_2$. Per tant, se satisfan les hipòtesis per a aplicar el Lema 3.7 d'unicitat d'aixecaments i concloure que $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \text{id}_{\tilde{X}_1}$.

De la mateixa manera podem deduir que $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \text{id}_{\tilde{X}_2}$. Per tant, $\tilde{p}_1: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ és un homeomorfisme (d'invers $\tilde{p}_2$) tal que $p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$, així que és un isomorfisme d'espais recobridors. A més, envia el punt base $\tilde{x}_1$ al punt base $\tilde{x}_2$, així que hem acabat. $\square$

És natural preguntar-se si per als espais recobridors arcconnexos que siguin isomorfs, encara que potser no per un isomorfisme enviant el punt base d'un al punt base de l'altre, els seus subgrups estan relacionats d'alguna manera. La Proposició 3.10 ens diu que en general no seran iguals, però vegem que seran sempre conjugats l'un de l'altre.

Proposició 3.11. *Sigui X arcconnex, localment arcconnex i semilocalment simplement connex. Dos espais recobridors arcconnexos $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ i $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ són isomorfs si i només si els seus subgrups associats, $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ i $(p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$, on $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ i $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ són punts base qualssevol dins les respectives fibres de x_0 , són conjugats.*

Demostració. Comencem suposant que $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ i $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ són isomorfs per un isomorfisme f enviant el punt base $\tilde{x}_1$ a $f(\tilde{x}_1)$, que no és necessàriament el punt base $\tilde{x}_2$. És a dir, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow[\cong]{f} & (\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1)) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Prenem $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}_2$ un camí de $f(\tilde{x}_1)$ a $\tilde{x}_2$. Sigui $\gamma = p_2 \circ \tilde{\gamma}$ la seva projecció a X , que és tancat en x_0 . Aleshores, utilitzant la Proposició 1.11 i aquest diagrama commutatiu, obtenim el següent (escrivim p_{i*} en lloc de $(p_i)_*$ per a simplificar la notació):

$$\begin{aligned} p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)) &= p_{2*}([\tilde{\gamma}]^{-1} \pi_1(\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1)) [\tilde{\gamma}]) \\ &= [p_2 \circ \tilde{\gamma}]^{-1} p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1))) [p_2 \circ \tilde{\gamma}] \\ &= [\gamma]^{-1} p_{2*}(f_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))) [\gamma] \\ &= [\gamma]^{-1} p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) [\gamma]. \end{aligned}$$

Per tant, els subgrups $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ i $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ són conjugats.

Recíprocament, suposem que $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ i $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ són conjugats. Aleshores, podem escriure $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)) = [\gamma]^{-1} p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) [\gamma]$ per a algun $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

Sigui $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \tilde{X}_1$ l'aixecament de γ a $\tilde{X}_1$ començant en $\tilde{x}_1$. Aleshores, utilitzant un altre cop la Proposició 1.11,

$$\begin{aligned} p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)) &= [\gamma]^{-1} p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) [\gamma] \\ &= p_{1*}([\tilde{\gamma}]^{-1} \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) [\tilde{\gamma}]) \\ &= p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{\gamma}(1))). \end{aligned}$$

Per tant, per la Proposició 3.10, tenim que existeix un isomorfisme entre $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ i $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ (enviant $\tilde{\gamma}(1)$ a $\tilde{x}_2$). $\square$

Com que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ és abelià, tots els seus subgrups són normals (és a dir, coincideixen amb tots els seus conjugats). Per això en l'exemple dels espais recobridors de $\mathbb{S}^1$ perdiem la subtilesa que espais recobridors corresponents a subgrups diferents poden ser tot i això isomorfs, només que no per un isomorfisme que preservi els punts base. En efecte, si existissin uns tals espais recobridors de $\mathbb{S}^1$ haurien de correspondre a subgrups de $\mathbb{Z}$ diferents però conjugats, i això ja hem justificat que no pot ser.

Aquest mateix argument funciona sempre que $\pi_1(X, x_0)$ sigui abelià, així que obtenim el següent corol·lari:

Corol·lari 3.12. *Si $\pi_1(X, x_0)$ és abelià, aleshores dos espais recobridors de X són isomorfs si i només si ho són per un isomorfisme preservant punts base. És a dir, si $\pi_1(X, x_0)$ és abelià, donats dos espais recobridors $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ i $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ isomorfs, per a qualssevol $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ hi ha un isomorfisme d'espais recobridors $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ enviant $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$.*

Demostració. És el mateix argument que hem fet per a $X = \mathbb{S}^1$: si $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ i $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ fossin isomorfs però no existís cap isomorfisme entre ells enviant $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$, aleshores $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ i $(p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ serien subgrups de $\pi_1(X, x_0)$ diferents però conjugats, però això no pot ser si $\pi_1(X, x_0)$ és abelià, perquè tots els seus subgrups són normals. $\square$

3.4 Classificació d'espais recobridors arcconnexos

Ajuntant els resultats de les últimes seccions en un únic teorema obtenim el resultat final d'aquest capítol:

Teorema 3.13. *Sigui X un espai topològic arcconnex, localment arcconnex i semilocalment simplement connex. Aleshores, hi ha una bijecció entre les classes d'isomorfisme preservant els punts base d'espais recobridors arcconnexos $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ i els subgrups del grup fonamental $\pi_1(X, x_0)$ de X . Concretament, la bijecció fa correspondre, a cada espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, el subgrup $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$. A més, la mateixa assignació induïx una bijecció entre classes d'isomorfisme d'espais recobridors arcconnexos (potser no preservant els punts base) i les classes de conjugació de subgrups de $\pi_1(X, x_0)$. El subgrup $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ associat a $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ és isomorf a $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ i té índex el grau de l'espai recobridor.* $\square$

Finalment, observem que si definim un ordre en el conjunt d'espais recobridors arcconnexos com

$$\begin{aligned} [p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)] &\geq [p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)] \\ &\iff \\ \text{existeix un recobriment } p: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) &\rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \text{ tal que } p_1 = p_2 \circ p, \end{aligned}$$

és a dir, un espai recobridor és “més gran” (intuïtivament, “més alt”) que un altre si el recobreix, aleshores el Lema 3.6 ens permet demostrar que la bijecció inverteix els ordres. Explícitament,

$$[p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)] \geq [p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)] \iff (p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subseteq (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

Per tant, qualsevol espai recobridor simplement connex de X serà també un espai recobridor de qualsevol altre espai recobridor arcconnex de X (perquè el seu subgrup associat és el trivial, que és subgrup de qualsevol altre subgrup de $\pi_1(X, x_0)$). A més, és únic llevat d'isomorfisme preservant punts base (qualsevol espai recobridor simplement connex tindrà per grup associat el grup trivial). Se l'anomena, per tant, el *recobriment universal* de X .

D'altra banda, l'espai recobridor associat al subgrup total $\pi_1(X, x_0) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ és l'espai recobridor trivial $\text{id}: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$. Per tant, el fet que tot subgrup de $\pi_1(X, x_0)$ estigui entre el subgrup trivial i el total ens diu que tot espai recobridor arconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ està entre el recobriment universal i l'espai recobridor trivial.

Una primera conseqüència del Teorema 3.13 és que l'existència d'espais recobridors arconnexos no trivials d'un espai topològic X està completament lligada al fet de tenir grup fonamental no trivial, que intuïtivament interpretem com la presència de forats 1-dimensionals en X . Si un espai té grup fonamental trivial, aleshores el seu únic possible espai recobridor arconnex (llevat d'isomorfisme preservant punt base) és el trivial, i viceversa, si el grup fonamental d'un espai no és trivial, aleshores té algun espai recobridor arconnex no trivial:

Corol·lari 3.14. *Sigui X arconnex, localment arconnex i semilocalment simplement connex. Aleshores, $\pi_1(X, x_0) = 1$ si i només si tot espai recobridor arconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ és isomorf preservant punts base a l'espai recobridor trivial $\text{id}: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$.*

Demostració. En efecte, $\pi_1(X, x_0)$ és trivial si i només si té un únic subgrup. Pel teorema de classificació, això és equivalent al fet que, llevat d'isomorfisme preservant punts base, existeixi un únic espai recobridor arconnex $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$. Com que l'espai recobridor trivial $\text{id}: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ sempre és un espai recobridor arconnex, això últim és equivalent al fet que qualsevol espai recobridor arconnex sigui isomorf preservant punts base al trivial. $\square$

4. Aplicacions a teoria de grups

Hem demostrat, amb el teorema de Seifert-van Kampen, que podem veure el grup lliure de rang κ com el grup fonamental del bouquet de circumferències de cardinal κ . A més, és clar que el bouquet de circumferències és arconnex, localment arconnex i semilocalment simplement connex: tots els punts excepte el punt on s'enganxen les circumferències tenen entorns oberts arbitràriament petits homeomorfs a $\mathbb{R}$ i, per tant, arconnexos i simplement connexos; d'altra banda, el punt per on s'enganxen les circumferències té entorns oberts arbitràriament petits homeomorfs a κ còpies de $\mathbb{R}$ enganxades per un punt, així que també arconnexos i simplement connexos. Per tant, la teoria desenvolupada al capítol anterior ens permet identificar els subgrups de F_κ amb els espais recobridors de $\bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}_\alpha^1$, $\#A = \kappa$ (amb punt base x_0 el punt per on les circumferències estan enganxades).

Aquest enfoc per a estudiar els subgrups del grup lliure és molt fèril. En aquest capítol donem només alguns exemples de la gran quantitat de resultats algebraics que es poden demostrar geomètricament utilitzant la teoria d'espais recobridors.

4.1 Subgrups dels grups lliures

Amb aquest punt de vista, anem a demostrar el fet següent:

Teorema 4.1. *El grup lliure de rang κ , per a $\kappa \in [2, \aleph_0]$, conté subgrups lliures de qualsevol rang finit, i fins i tot infinit numerable.*

La notació $[2, \aleph_0]$, que utilitzarem més vegades, significa tots els cardinals entre 2 i $\aleph_0$, inclosos. És a dir, tots els cardinals finits més grans o iguals que dos juntament amb el cardinal infinit numerable.

Aquest comportament difereix radicalment del dels espais vectorials o dels grups abelians lliures $\mathbb{Z}^n$: un K -espai vectorial de dimensió n només pot contenir subespais de dimensió com a molt n i, de la mateixa manera, tots els subgrups de $\mathbb{Z}^n$ són isomorfs a $\mathbb{Z}^m$ per a algun $m \leq n$. En canvi, el resultat anterior dona al reticle de subgrups d'un grup lliure un cert caràcter fractal. Per exemple, F_2 té un subgrup propi isomorf a F_3 , que, al seu torn, té un subgrup propi isomorf a F_2 si considerem només els dos primers elements d'una base, que tindrà un altre subgrup propi isomorf a F_3 , i així successivament.

Observem que basta demostrar l'enunciat per a F_2 . En efecte, cada grup lliure $F_3, F_4, \dots, F_n, \dots, F_{\aleph_0}$ conté un subgrup isomorf a F_2 : el generat per només els dos primers elements d'una base. Per tant, haurem vist que aquest subgrup té subgrups isomorfs a cada F_κ , $\kappa \in [0, \aleph_0]$ i, per tant, que cadascun dels grups grans també els té.

Ens centrem doncs en el grup F_2 . Volem trobar-ne subgrups isomorfs a cada F_κ per a $\kappa \in [0, \aleph_0]$. És clar que té subgrups isomorfs a $1 = F_0$, a F_1 i a F_2 : el primer és el subgrup trivial; el segon, el subgrup generat per només un dels dos generadors del grup ambient, i el tercer és el propi grup ambient. Per a trobar els altres, pensem F_2 com el grup fonamental de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, posem que amb punt base x_0 el punt on s'uneixen les dues circumferències. Per tant, d'acord amb el teorema 3.13, serà suficient trobar, per a cada $\kappa \in [3, \aleph_0]$, un espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0)$ arconnex tal que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong F_\kappa$.

Segui γ el camí en $\mathbb{S}^1$ tancat en x_0 que dona una volta a la circumferència esquerra una vegada a velocitat constant (posem que en sentit antihorari). Definim δ com el camí anàleg en la circumferència dreta. Les classes d'homotopia de camins de γ i δ , que denotarem per a i b , són una base de $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0)$, és a dir, $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \cong F_{\{a,b\}}$.

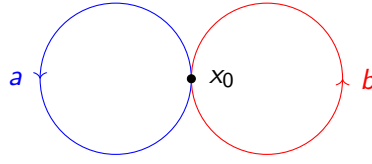


Figura 9: L'espai $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$; a i b són les classes d'homotopia dels camins en blau i vermell, respectivament

Considerem l'espai recobridor $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0)$ representat a la Figura 10, on les arestes blaves i vermelles les enviem a γ i a δ , respectivament, en els sentits indicats. En els dibuixos escrivim a i b (i no γ i δ), respectivament, perquè ens serà més útil després per a calcular els subgrups associats. Els punts $\tilde{x}_0$ i $\tilde{x}_1$ (en negre) són les antiimatges de x_0 .

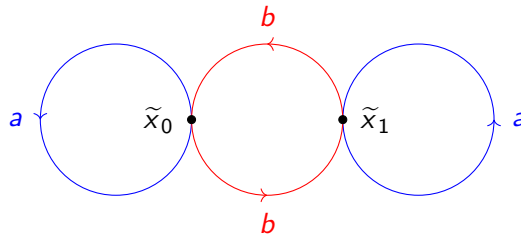


Figura 10: Un espai recobridor $\tilde{X}$ de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

Podem calcular el grup fonamental $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ amb el teorema de Seifert-van Kampen. Considerem un recobriment de $\tilde{X}$ format per tres oberts que tinguin per retractes de deformació la circumferència esquerra, la circumferència del mig i la unió de la meitat inferior de la circumferència del mig amb la circumferència dreta, respectivament. Cadascun d'aquests oberts és homotòpicament equivalent a $\mathbb{S}^1$, les seves interseccions dos a dos són contràctils i la seva intersecció triple també (en particular, són arconnexes). Per tant, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_3$.

Però podem calcular explícitament una base de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Els grups fonamentals dels tres oberts del recobriment estan generats, respectivament, per les classes d'homotopia dels camins següents: el que recorre la circumferència esquerra de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_0$ en sentit antihorari, el que recorre la circumferència del mig de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_0$ en sentit antihorari, i el que va de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$ per la part de sota de la circumferència del mig, fa una volta a la circumferència dreta de $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_1$ en sentit antihorari i torna a $\tilde{x}_0$ per la part de sota de la circumferència del mig (podem suposar que ho fan tot a velocitat constant).

Per tant, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq F_{\{a,b\}}$ estarà generat per les imatges per p_* d'aquests generadors. Mirant la Figura 10, deduïm que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$. Per tant, $\langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$ és un subgrup de $F_{\{a,b\}}$ isomorf a F_3 .

De forma anàloga podem construir espais recobridors que donin lloc a F_κ per a $\kappa = n$ finit. Només cal considerar els espais recobridors següents (segons si n és parell o senar):

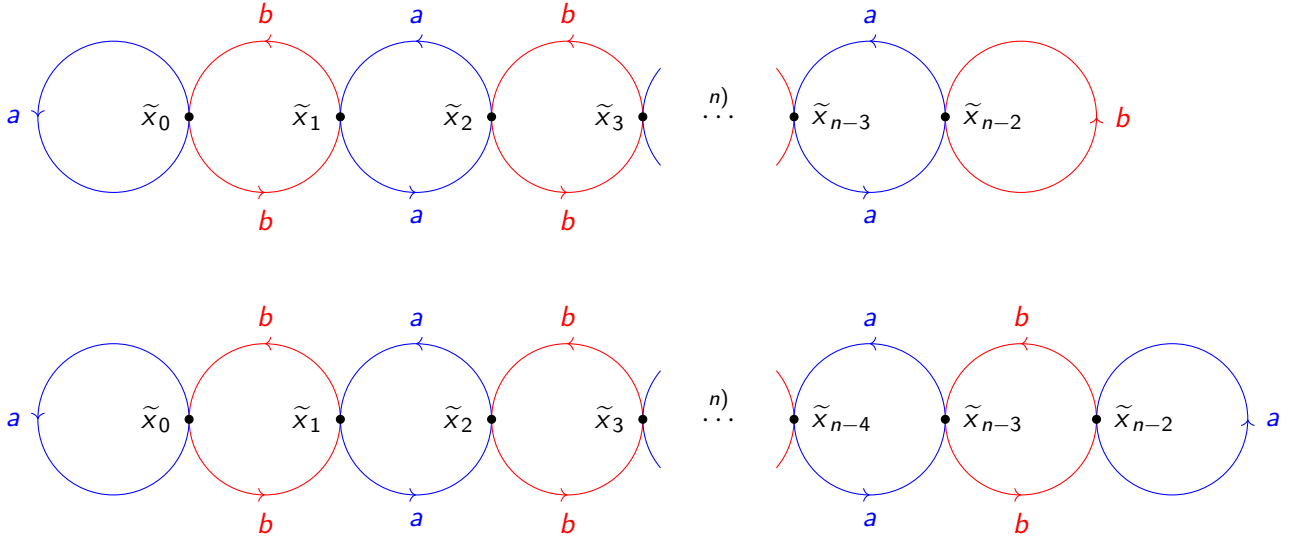


Figura 11: Espais recobridors de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ que donen lloc a subgrups de F_2 de rang finit n arbitrari. A dalt, per a n parell; a baix, per a n senar.

Raonant anàlogament a com hem fet en el cas $n = 3$, aquests espais recobridors ens donen subgrups de F_2 isomorfs a F_n per a cada n . En podem calcular una base llegint les paraules en a i b que obtenim seguint el camí que recorre la primera circumferència i, per a $k = 0, \dots, n - 2$, els camins que van des de $\tilde{x}_0$ fins a $\tilde{x}_k$ per les arestes de sota, donen una volta a la circumferència que es troben a la dreta i tornen a $\tilde{x}_0$ per on han vingut. Per exemple, per als primers valors de n obtenim $F_4 \cong \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, baba^{-1}b^{-1} \rangle \leq F_2$ i $F_5 \cong \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, bab^2a^{-1}b^{-1}, babab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle \leq F_2$.

Per al subgrup isomorf a $F_{\aleph_0}$ podem considerar per exemple el següent espai recobridor amb infinites (numerales) circumferències:

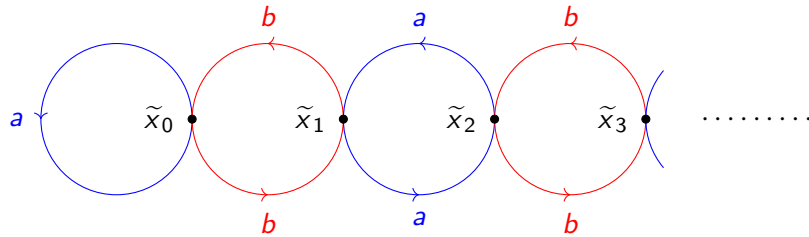


Figura 12: Un espai recobridor de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ que dona lloc a un subgrup de F_2 de rang infinit numerable

Observem que el conjunt de subgrups de $F_{\aleph_0}$ és no numerable. En efecte, com a mínim podem construir-ne un per cada subconjunt diferent de la seva base: el subgrup generat pels elements d'aquest conjunt. Com que la base és infinita numerable i el conjunt de les parts d'un conjunt numerable és no numerable, concloem que hi ha un nombre infinit no numerable de subgrups de $F_{\aleph_0}$. A més, com que acabem de demostrar que tots els grups lliures de rang com a mínim 2 tenen un subgrup isomorf a $F_{\aleph_0}$, deduïm que F_{κ} , per a $\kappa \geq 2$, té un nombre infinit no numerable de subgrups.

4.2 Grafs i el teorema de Nielsen-Schreier

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar el teorema de Nielsen-Schreier, que diu que tot subgrup d'un grup lliure és lliure. Aquesta propietat potser no és tan esperable després d'haver vist en la secció anterior que una propietat que sembla tan natural com aquesta, com és que un subgrup lliure no pugui tenir subgrups de rang estrictament més gran que el seu, hagi resultat ser falsa.

Nielsen va demostrar aquesta propietat de forma algebraica per a subgrups finitament generats el 1921, i Schreier va publicar una demostració de la versió general el 1927, també amb arguments algebraics, tot i que també en va descriure una interpretació geomètrica. Es pot trobar indicada la demostració original de Nielsen i la reinterpretació geomètrica de la prova de Schreier a [Sti93].

Nosaltres utilitzarem la teoria d'espais recobridors per a donar una demostració topològica molt més simple del teorema. La prova que donarem passa per dos resultats generals: primer, que tot espai recobridor d'un graf és un graf i, segon, que el grup fonamental d'un graf és lliure. Un cop vist això el teorema es deduirà immediatament de la teoria desenvolupada en els capítols anteriors: tot grup lliure es pot veure com el grup fonamental d'un bouquet de circumferències X , que, com veurem, és un graf; per tant, un subgrup qualsevol d'aquest grup lliure serà isomorf al grup fonamental d'algun espai recobridor de X ; com que X és un graf, aquest espai recobridor també serà un graf (pel primer resultat), i el seu grup fonamental, per tant, serà lliure (pel segon resultat).

Per a poder demostrar-ho, primer cal definir exactament què volem dir quan parlem de *grafs*:

Definició 4.2. Un *graf* X és un espai topològic que es pot obtenir partint de la unió disjunta d'un espai discret X^0 amb una família $\{I_\alpha\}_\alpha$ on cada I_α és una còpia de l'interval tancat $I \subseteq \mathbb{R}$, identificant cada extrem de cada interval amb un punt de X^0 . És a dir,

$$X = \left(X^0 \sqcup \bigsqcup_\alpha I_\alpha \right) / \sim$$

on $\sim$ és una relació d'equivalència que relaciona cada extrem de cada I_α amb algun punt de X^0 i res més. Dotem X de la topologia quocient respecte $\sim$ de la topologia unió disjunta en $X^0 \sqcup \bigsqcup_\alpha I_\alpha$ (X^0 té la topologia discreta i cada I_α , la topologia euclidiana com a interval tancat I).

Els *vèrtexs* de X són els punts de $\pi(X^0)$ ($\pi: X^0 \sqcup \bigsqcup_\alpha I_\alpha \rightarrow X$ és la projecció al quocient) i les *arestes* de X , els quocients de cada I_α , és a dir, els subconjunts $e_\alpha := \pi(I_\alpha) \subseteq X$.

Observem que aquesta definició admet arestes d'un vèrtex a si mateix i múltiples arestes diferents entre dos vèrtexs fixats.

Observació 4.3. Amb la topologia de què hem dotat X , un subconjunt $A \subseteq X$ és obert si i només si la seva intersecció amb cada aresta és oberta. Per tant, una aplicació sortint d'un graf és contínua si i només si ho és restringida a cada aresta.

Observació 4.4. Una base de la topologia d'un graf X està formada pels dos tipus d'oberts següents:

- Intervals oberts dins d'arestes. Si x és un punt a l'interior d'una aresta $e_\alpha = \pi(I_\alpha)$ prenem les imatges per π dels intervals oberts (a, b) continguts a l'interior de I_α que continguin el punt $\pi^{-1}(x)$.
- Entorns estrellats dels vèrtexs. Suposem que v és un vèrtex i siguin $\{e_\beta\}_\beta$ les arestes que tenen algun extrem en v . Per a cada $e_\beta = \pi(I_\beta)$, segons si v és la imatge per π de $0 \in I_\beta$ o de $1 \in I_\beta$ (o dels dos), triem un entorn $[0, \epsilon_0)$ de 0 o un entorn $(1 - \epsilon_1, 1]$ de 1 (o els dos). Prenent els entorns que toquin en cada I_β , les seves imatges per π són un entorn obert de v que anomenem un *entorn estrellat* en v .

Observem que els oberts d'aquesta base són tots arconnexos i tenen grup fonamental trivial (és a dir, són simplement connexos). Per tant, tot graf és localment arconnex i semilocalment simplement connex, de forma que els grafs arconnexos satisfan les hipòtesis tècniques per a aplicar-los els resultats generals del capítol passat. D'altra banda, pel Lema 3.9, com que els grafs són localment arconnexos, són arconnexos si i només si són connexos, així que utilitzem els dos termes indistintament.

Definició 4.5. Un *subgraf* d'un graf X és un subespai $Y \subseteq X$ format per una unió de vèrtexs i arestes.

Un *arbre* és un graf contràtil. Diem que T és un arbre en X si T és un subgraf de X que és un arbre. Un *arbre maximal* en X és un arbre en X que contingui tots els vèrtexs de X .

Usant l'axioma de l'elecció podem demostrar que tot graf connex conté algun arbre maximal.

Teorema 4.6. *Tot graf connex X conté algun arbre maximal. A més, tot arbre en X està contingut en algun arbre maximal, del qual és un retracte de deformació.*

Demostració. Descrivim un procés que, donat qualsevol subgraf $X_0 \subseteq X$, ens permet construir un subgraf $Y \subseteq X$ que contingui X_0 i tots els vèrtexs de X i que tingui X_0 per retracte de deformació. Si prenem X_0 com un sol vèrtex de X , aleshores Y és un arbre maximal, i queda demostrada l'existència d'arbres maximals. Si prenem X_0 com qualsevol subarbre de X , aleshores Y és un arbre maximal de X que té X_0 per retracte de deformació, que és l'altra propietat que volem demostrar.

Primer construïm una successió de subgrafs $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ on X_{i+1} s'obté de X_i afegint-li les arestes de $X \setminus X_i$ que tinguin algun extrem en X_i . Observem que cada arista de X o bé és disjunta de $\bigcup_i X_i$ o bé hi està completament continguda. Per tant, $\bigcup_i X_i$ interseca cada arista de X o bé en conjunt buit o bé en l'arista sencera. En qualsevol cas, l'interseca en un conjunt obert i tancat alhora. Per definició de la topologia en X , deduïm que $\bigcup_i X_i$ és obert i tancat en X . Com que X és connex i $\bigcup_i X_i$ no és buit, deduïm que $\bigcup_i X_i = X$.

Construïm ara Y . Definim $Y_0 := X_0$. Inductivament, suposem que Y_i conté tots els vèrtexs de X_i i construïm Y_{i+1} afegint-li a Y_i , per a cada vèrtex de $X_{i+1} \setminus X_i$, una arista que l'uneixi a algun vèrtex de Y_i (n'hi ha alguna perquè, per construcció, cada vèrtex de X_{i+1} està en alguna arista que el connecta amb algun vèrtex de $X_i \subseteq Y_i$). Per a triar quines arestes afegim ens cal en general l'axioma de l'elecció. És clar que Y_i és un retracte de deformació de Y_{i+1} . Una retracció de deformació $F_i: Y_{i+1} \times I \rightarrow Y_{i+1}$ de Y_{i+1} en Y_i consisteix en contreure contínuament cada arista afegida al seu extrem en Y_i . Definim $Y := \bigcup_i Y_i$.

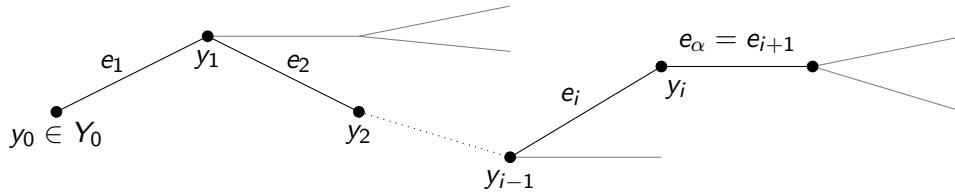


Figura 13: Arestes per on passa l'arista e_α durant la retracció de deformació

Podem construir una retracció de deformació $F: Y \times I \rightarrow Y$ de Y en $Y_0 = X_0$ fent la retracció de deformació de Y_{i+1} a Y_i en l'interval de temps $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$. La retracció resultant és contínua perquè ho és restringida a cada arista. En efecte, donada una arista $e_\alpha \in Y$ qualsevol, existeix un i tal que $e_\alpha \in Y_{i+1} \setminus Y_i$. Definim y_i l'extrem en Y_i de l'arista $e_\alpha =: e_{i+1}$, y_{i-1} l'extrem en Y_{i-1} de l'arista e_i que uneix y_i a y_{i-1} , y_{i-2} l'extrem en Y_{i-2} de l'arista e_{i-1} que uneix y_{i-1} a y_{i-2} , i així successivament (veure la Figura 13).

Aleshores, l'aresta e_α queda fixa per F durant tot l'interval de temps $[0, \frac{1}{2^{i+1}}]$; en l'interval $[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]$, F hi reproduïx la retracció F_i , contraient-la al vèrtex y_i , i, per als intervals de temps $[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}]$ posteriors, comença enviant tota l'aresta e_α a y_{j+1} i acaba enviant-la a y_j , transportant-la contínuament al llarg de e_{j+1} . Ara és fàcil concloure que F és contínua utilitzant el lema d'enganxament i que els oberts d'un graf són aquells que intersequen cada aresta en un conjunt obert. $\square$

Amb aquest teorema ja podem demostrar que el grup fonamental d'un graf és lliure.

Proposició 4.7. *Sigui X un graf connex, $x_0 \in X$ i $T \subseteq X$ un arbre maximal contenint x_0 . Aleshores, $\pi_1(X, x_0)$ és lliure de rang el cardinal del conjunt d'arestes en $X \setminus T$.*

Demostració. Sigui $\{e_\alpha\}_\alpha$ el conjunt d'arestes en $X \setminus T$. Per a cadascuna d'elles triem (amb l'axioma de l'elecció) un punt $x_\alpha \in e_\alpha$ diferent dels extrems. Considerem els oberts de X definits per $U_\alpha := X \setminus \{x_\beta\}_{\beta \neq \alpha}$. Si a una aresta e_α li eliminem el punt x_α , el conjunt resultant té els dos extrems de l'aresta com a retracte de deformació. Per tant, cada obert U_α té $T \cup e_\alpha$ com a retracte de deformació i és, en particular, arconnex. A més, pel mateix motiu, la intersecció de dos o més U_α diferents té T com a retracte de deformació, que, al seu torn, té el punt base x_0 com a retracte de deformació. Per tant, les interseccions de dos o més U_α són arconnexes, i les interseccions dos a dos (o qualssevol, realment) tenen grup fonamental trivial. Per tant, el teorema de Seifert-van Kampen ens diu que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \prod_\alpha^* \pi_1(T \cup e_\alpha, x_0).$$

Per tant, per a concloure el resultat basta veure que $\pi_1(T \cup e_\alpha, x_0) \cong \mathbb{Z}$ per a cada aresta $e_\alpha \in X \setminus T$. Fixem una aresta e_α concreta i li diem e a partir d'ara. Considerem l'espai $(T \cup e)/T$ on identifiquem tots els punts de T en un únic punt. És clar que $(T \cup e)/T$ és homeomorf a $\mathbb{S}^1$. Si veiem que la projecció al quocient $\pi: T \cup e \rightarrow (T \cup e)/T$ és una equivalència homotòpica haurem acabat.

Siguin $u, v \in e \cap T$ els extrems de e . Tenim una retracció de deformació de T en x_0 . Si la restringim a u i a v , obtenim dos camins γ_u i γ_v que van de u a x_0 i de v a x_0 , respectivament. Sigui també γ_{uv} el camí que recorre l'aresta e de u a v a velocitat constant. Podem definir una aplicació (contínua pel lema d'enganxament) $T \cup e \rightarrow T \cup e$ que envia tot T a x_0 i l'aresta e al camí $\overline{\gamma_u} * (\gamma_{uv} * \gamma_v)$. Passant al quocient, això defineix una aplicació $g: (T \cup e)/T \rightarrow T \cup e$ ben definida.

Afirmem que $\pi: T \cup e \rightarrow (T \cup e)/T$ i $g: (T \cup e)/T \rightarrow T \cup e$ són inverses homotòpiques. No ho escrivim del tot formalment, però en donem la idea intuïtiva. D'una banda, $\pi \circ g: (T \cup e)/T \rightarrow (T \cup e)/T$ envia el punt $\pi(T)$ a ell mateix i l'aresta $\pi(e)$ al camí $\pi(\overline{\gamma_u} * (\gamma_{uv} * \gamma_v))$, que és el camí constant en $\pi(T)$ en la primera meitat del temps, dona una volta sencera en el següent quart del temps i torna a ser constant en $\pi(T)$ fins al final. Aquesta aplicació és clarament homòtopa a la identitat, que envia l'aresta $\pi(e)$ al camí que dona una volta sencera de $\pi(T)$ a $\pi(T)$ sense aquests camins constants pre- i post-concatenats.

D'altra banda, $g \circ \pi: T \cup e \rightarrow T \cup e$ envia tot T a x_0 i l'aresta e al camí tancat $\overline{\gamma_u} * (\gamma_{uv} * \gamma_v)$. Podem donar una homotopia entre la identitat en $T \cup e$ i aquesta aplicació fent en T la retracció de deformació de T en x_0 i allargant contínuament l'aresta e pels seus extrems seguint els camins γ_u i γ_v . Concloem que $T \cup e$ és homotòpicament equivalent a $(T \cup e)/T \cong \mathbb{S}^1$, d'on $\pi_1(T \cup e, x_0) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

El resultat anterior és molt potent, permetent-nos calcular el grup fonamental d'un graf connex finit només coneixent-ne el nombre de vèrtexs i d'arestes:

Corol·lari 4.8. *Si X és un graf connex finit amb n vèrtexs i m arestes, aleshores el seu grup fonamental és lliure de rang $m - n + 1$.*

Demostració. En efecte, és ben sabut que tot arbre finit que tingui n vèrtexs té necessàriament $n - 1$ arestes. Aleshores, qualsevol arbre maximal de X conté exactament $n - 1$ arestes. Per tant, la proposició anterior ens diu que el grup fonamental de X és lliure de rang $m - n + 1$. $\square$

L'únic que ens queda per demostrar per a arribar al teorema de Nielsen-Schreier és el resultat següent:

Proposició 4.9. *Sigui X un graf i $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un espai recobridor. Aleshores, $\tilde{X}$ també és un graf. Els vèrtexs i arestes de $\tilde{X}$ es projecten per p sobre vèrtexs i arestes de X , respectivament.*

Demostració. Triem per vèrtexs de $\tilde{X}$ el conjunt discret $\tilde{X}^0 := p^{-1}(X^0)$ (recordem que X^0 eren els vèrtexs de X). Per a cada aresta e_α de X , denotem per $\gamma_\alpha: I \rightarrow X$ el camí que la recorre d'un extrem a l'altre a velocitat constant. Sigui $v_\alpha \in X^0$ el vèrtex inicial de e_α (és a dir $v_\alpha := \gamma_\alpha(0)$). Aleshores, per a cada punt $\tilde{v}_{\alpha,\beta} \in p^{-1}(v_\alpha)$ en la fibra de v_α , existeix un únic aixecament $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}: I \rightarrow \tilde{X}$ de γ_α que comença en $\tilde{v}_{\alpha,\beta}$. El punt final de $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}$ és un punt de $\tilde{X}^0$, perquè el punt final de γ_α és un vèrtex de X . D'aquesta manera és fàcil definir una estructura de graf en el conjunt $\tilde{X}$ prenent com a vèrtexs les antiimatges dels vèrtexs de X i com a arestes, les imatges $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}(I)$ dels aixecaments $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}$ per a cada α i β . En fer aquesta construcció no ens deixem cap punt de $\tilde{X}$. En efecte, donat $\tilde{x} \in \tilde{X}$, si $p(\tilde{x})$ és un vèrtex de X , aleshores $\tilde{x}$ és un dels vèrtexs de $\tilde{X}$. Si no, $x := p(\tilde{x})$ ha de ser un punt interior d'alguna aresta de X , diguem e_α . Aleshores, hi ha un camí en X que recorre l'aresta e_α des de x fins al vèrtex inicial v_α de e_α . L'aixecament d'aquest camí començant en $\tilde{x}$ acabarà en algun punt $\tilde{v}_{\alpha,\beta}$ en la fibra de v_α . Aleshores, el punt $\tilde{x}$ estarà en l'aresta $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}(I)$ de $\tilde{X}$, per unicitat dels aixecaments de camins.

Cal comprovar que la topologia de $\tilde{X}$ com a graf (és a dir, la que diu que un subconjunt seu és obert si i només si interseca cada aresta $\tilde{\gamma}_{\alpha,\beta}(I)$ en un conjunt obert) i la que tingués originalment (que feia que $p: \tilde{X} \rightarrow X$ fos contínua i, de fet, un espai recobridor) coincideixen. L'observació clau és que, com que hem construït les arestes de $\tilde{X}$ com aixecaments de les arestes de X , els oberts bàsics de la topologia de $\tilde{X}$ com a graf (construïts com a l'Observació 4.4) són capes per p dels oberts bàsics de la topologia del graf X . Anem a veure que aquesta base genera la topologia original de $\tilde{X}$. És clar que cadascun dels oberts bàsics com a graf és obert en la topologia original, en ser una capa d'un obert (bàsic) de X .

D'altra banda, vegem que, donat un obert $\tilde{V}$ de la topologia original de $\tilde{X}$ i un punt $\tilde{x} \in \tilde{V}$, existeix un d'aquests oberts que contingui $\tilde{x}$ i totalment contingut en $\tilde{V}$, d'on es dedueix que els oberts bàsics de la topologia de $\tilde{X}$ com a graf també són una base de la seva topologia original, i haurem acabat. Sigui $x := p(\tilde{x})$. Per definició d'espai recobridor, existeixen oberts $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ i $U \ni x$ tals que $p|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ és un homeomorfisme. Ara, $\tilde{V} \cap \tilde{U}$ és un obert de $\tilde{U}$, així que $p(\tilde{V} \cap \tilde{U}) = p|_{\tilde{U}}(\tilde{V} \cap \tilde{U})$ és un obert de U , de forma que existeix un obert V de X tal que $p(\tilde{V} \cap \tilde{U}) = V \cap U$. Com que U és obert de X , també ho és $V \cap U$. Per tant, existeix un obert bàsic de X , diguem-li B , tal que $x \in B \subseteq V \cap U$. Ara, la capa $\tilde{B}$ de B que contingui $\tilde{x}$ serà un obert bàsic de la topologia de $\tilde{X}$ com a graf satisfent que $\tilde{x} \in \tilde{B} \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{U} \subseteq \tilde{V}$, que és el que volíem. $\square$

Ara ja podem demostrar el teorema de Nielsen-Schreier:

Teorema 4.10 (de Nielsen-Schreier). *Tot subgrup d'un grup lliure és lliure.*

Demostració. Sabem que el grup lliure de rang κ és isomorf al grup fonamental del bouquet de circumferències de cardinal κ . Anomenem aquest espai X . És clar que X és un graf (té un únic vèrtex i una aresta per cada circumferència, i vam veure a l'Exemple 1.32 que els conjunts oberts de X eren aquells que intersecaven cada circumferència en un conjunt obert, així que la seva topologia també coincideix amb que

té com a graf). Per tant, X és localment arconnex i semilocalment simplement connex, com hem vist a l'Observació 4.4. A més, és clarament arconnex. Per tant, tot subgrup del grup lliure serà isomorf al grup fonamental d'un espai recobridor arconnex de X , pel Teorema 3.13. Però qualsevol espai recobridor arconnex de X serà un graf (arconnex), per la Proposició 4.9, i tindrà, per tant, grup fonamental lliure, per la Proposició 4.7. $\square$

4.3 Subgrups d'índex finit dels grups lliures de rang finit

Considerem X el bouquet de $n < \infty$ circumferències, que denotem per $C_1, \dots, C_n$, i x_0 el punt per on s'uneixen. Si denotem per a_i la classe d'homotopia del camí γ_i en X que dona una volta a C_i a velocitat constant, sabem que $\pi_1(X, x_0) = F_{\{a_1, \dots, a_n\}} \cong F_n$. Sigui $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un espai recobridor no necessàriament arconnex. En vista de la Proposició 4.9, $\tilde{X}$ és un graf, amb vèrtexs la fibra de x_0 i arestes els aixecaments dels camins γ_i a $\tilde{X}$ començant en cadascun d'aquests vèrtexs.

Una manera senzilla de visualitzar aquests espais recobridors és dibuixar el graf $\tilde{X}$ i, en cadascuna de les seves arestes, posar una etiqueta a_i segons en quina aresta de X es projecta, i una fletxa per a indicar en quin sentit ho fa, com fèiem en la Secció 4.1. De cada vèrtex $\tilde{v} \in \tilde{X}$ surt exactament una aresta amb l'etiqueta a_i , corresponent a l'únic aixecament del camí γ_i a $\tilde{X}$ començant en $\tilde{v}$; de la mateixa manera, a cada vèrtex $\tilde{v} \in \tilde{X}$ hi arriba exactament una aresta (que pot coincidir amb l'anterior) amb l'etiqueta a_i , corresponent a l'únic aixecament del camí $\bar{\gamma}_i$ a $\tilde{X}$ començant en $\tilde{v}$. Per tant, el nombre d'arestes de $\tilde{X}$ és n vegades el seu nombre de vèrtexs. Els vèrtexs de $\tilde{X}$ són la fibra de x_0 , així que n'hi ha tants com el grau de p (que pot ser infinit). Però si p té grau $k < \infty$, aleshores $\tilde{X}$ és un graf amb k vèrtexs i nk arestes. En resum, si $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ és un espai recobridor de grau finit $k < \infty$ del bouquet de $n < \infty$ circumferències, aleshores podem pensar-lo com un graf amb k vèrtexs i nk arestes, amb un d'aquests vèrtexs (el punt base) destacat i les arestes orientades i etiquetades amb les lletres $a_1, \dots, a_n$ de forma que en cada vèrtex hi entra i en surt exactament una aresta amb cada etiqueta.

Utilitzant la correspondència entre espais recobridors arconnexos i subgrups del grup fonamental, podem traduir el resultat anterior sobre espais recobridors a un resultat sobre els subgrups del grup lliure $F_n \cong \pi_1(X, x_0)$. Recordem que el grau d'un espai recobridor arconnex es tradueix en l'índex del subgrup corresponent, per la Proposició 2.18. Per tant, traduint el resultat combinatori anterior, podem obtenir el teorema següent:

Teorema 4.11 (Fórmula de Schreier). *Tots els subgrups d'índex k finit del grup lliure de rang n finit són isomorfs entre si. Concretament, tots són lliures de rang $nk - k + 1$.*

Demostració. Qualsevol subgrup d'índex k del grup lliure F_n és isomorf al grup fonamental d'algun espai recobridor arconnex de grau k del bouquet de n circumferències. Per la discussió prèvia al teorema, aquest espai recobridor arconnex és un graf arconnex amb k vèrtexs i nk arestes. Pel Corol·lari 4.8, el seu grup fonamental és lliure de rang $nk - k + 1$. $\square$

Aquesta forma de pensar els subgrups d'índex k del grup lliure F_n com grafs amb punt base amb k vèrtexs i nk arestes orientades i etiquetades és molt fructífera. Per exemple, com que de grafs amb un nombre finit de vèrtexs i d'arestes n'hi ha un nombre finit, deduïm que, per a cada $k < \infty$, F_n té un nombre finit de subgrups d'índex k , així que F_n té un nombre infinit numerable de subgrups d'índex finit. A la Secció 4.1 vam veure que F_n tenia un nombre infinit no numerable de subgrups, així que la gran majoria d'ells han de ser d'índex infinit: com que només F_n només té una quantitat numerable de subgrups d'índex finit, el nombre de subgrups de F_n d'índex infinit ha de ser infinit no numerable.

De fet, estudiant més detingudament aquests grafs, podem donar una fórmula recursiva per al nombre de subgrups d'índex k de F_n . Concretament, recuperarem la següent fórmula, publicada originalment el 1949 per Marshall Hall, amb una demostració algebraica (veure [Hal49]):

$$N_{k,n} = k(k!)^{n-1} - \sum_{i=1}^{k-1} [(k-i)!]^{n-1} N_{i,n},$$

on $N_{k,n}$ és el nombre de subgrups d'índex k de F_n , i sabem que $N_{1,n} = 1$ per a tot n , perquè tot grup és el seu únic subgrup d'índex 1. La demostració va ser lleugerament modificada i relacionada amb la teoria d'espais recobridors per Jin Ho Kwak i Jaeun Lee a [KL01]. Aquí ens basem en el raonament exposat a [NS06].

Donem el raonament per a F_2 , que serà fàcilment generalitzable a F_n amb n finit arbitrari. Ja sabem que per a comptar els subgrups d'índex k de F_2 basta comptar (les classes d'isomorfisme preservant punt base de) espais recobridors arconnexos de grau k de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ amb punt base x_0 . També hem vist que podem representar qualsevol espai recobridor (arconnex o no) com un graf amb k vèrtexs (la fibra de x_0) i $2k$ arestes orientades amb etiquetes a, b (segons si es projecten en una o altra de les dues circumferències de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ i en quin sentit) de forma que a cada vèrtex hi arriba i en surt exactament una aresta amb cada etiqueta.

L'observació clau és que, per aquesta última propietat, podem codificar un tal espai recobridor com un parell de permutacions de k elements (una per cada generador de F_2), és a dir, com un element de $S_k \times S_k$. Per a fer-ho etiquetem els vèrtexs de l'espai recobridor amb els nombres $1, 2, \dots, k$, on posem l'etiqueta 1 al punt base per conveniència i etiquetem la resta de vèrtexs de qualsevol manera. Ara, podem construir una permutació $\sigma_a \in S_k$ mirant les arestes amb etiqueta a (i una altra permutació $\sigma_b \in S_k$ mirant les que tenen l'etiqueta b) interpretant una aresta que vagi del vèrtex i al vèrtex j com dient que $\sigma_a(i) = j$. Així, associem a aquest espai recobridor l'element $(\sigma_a, \sigma_b) \in S_k \times S_k$. És fàcil veure com invertir aquest procés per a trobar un espai recobridor associat a qualsevol element de $S_k \times S_k$.

Exemple 4.12. Suposem, per exemple, que volem obtenir els subgrups de F_2 d'índex 2. Per la discussió anterior, n'hi haurà com a molt quatre, corresponents als quatre elements de $S_2 \times S_2 = \{(\text{id}, \text{id}), (\text{id}, \tau), (\tau, \text{id}), (\tau, \tau)\}$, on $\tau = (1, 2) \in S_2$. Els espais recobridors corresponents estan representats a la Figura 14. Anomenem aquests quatre espais recobridors $p_i: (\tilde{X}_i, \tilde{x}_i) \rightarrow (X, x_0)$, $i = 1, 2, 3, 4$ en el mateix ordre que en la Figura 14 (el punt base de cadascun d'ells és el vèrtex amb l'etiqueta 1, destacat en el dibuix). Per comoditat, ens referirem a cadascun d'ells per la tupla $(\tilde{X}_i, \tilde{x}_i, p_i)$.

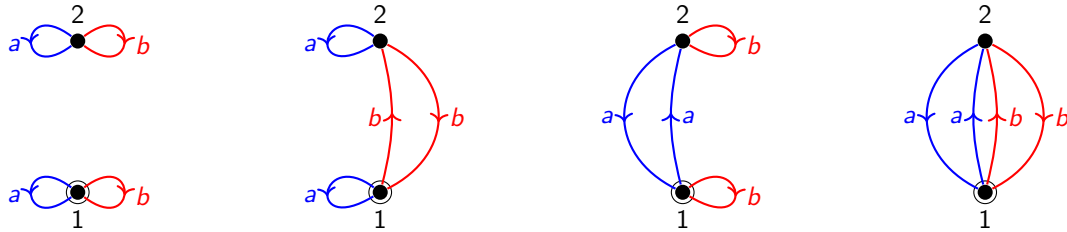


Figura 14: Els espais recobridors de grau dos de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, associats, respectivament, als elements $(\text{id}, \text{id}), (\text{id}, \tau), (\tau, \text{id})$ i (τ, τ) de $S_2 \times S_2$, on $\tau = (1, 2)$

Observem, però, que no podem dir directament a partir d'això que F_2 tingui quatre subgrups d'índex dos. D'una banda, per a comptar els subgrups, és clar que hem de descartar $(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1, p_1)$, perquè no és

arcconnex.

D'altra banda, si volem concloure que els altres tres donen lloc a tres subgrups diferents, una manera de fer-ho és comprovar que no existeix entre ells cap isomorfisme d'espais recobridors que preservi el punt base. D'una banda, $(\tilde{X}_4, \tilde{x}_4, p_4)$ no és isomorf als altres perquè $\tilde{X}_4$ hauria de ser homeomorf a $\tilde{X}_2, \tilde{X}_3$, però, mentre que $\tilde{X}_2$ i $\tilde{X}_3$ es poden desconnectar eliminant-ne un sol punt (qualsevol dels seus vèrtexs), el mateix no és cert per a $\tilde{X}_4$. Podem raonar que tampoc existeix un isomorfisme preservant el punt base entre $(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2, p_2)$ i $(\tilde{X}_3, \tilde{x}_3, p_3)$ perquè l'aresta a tancada en 1 del primer hauria d'anar a una aresta a tancada en 1 en el segon, però no n'hi ha cap.

Una altra manera de veure que els subgrups associats són diferents és utilitzant la caracterització dels seus elements demostrada a la Proposició 2.17, que ens diu que un element de $\pi_1(X, x_0) = F_{\{a,b\}}$ pertany a $(p_i)_*(\pi_1(\tilde{X}_i, \tilde{x}_i))$ si i només si és la classe d'homotopia d'un camí en X tancat en x_0 tal que el seu aixecament a $\tilde{X}_i$ començant a $\tilde{x}_i$ és tancat en $\tilde{x}_i$. Però un element de $\pi_1(X, x_0)$ és una paraula reduïda en $\{a, b\}$, i trobar l'aixecament a $\tilde{X}_i$ començant en $\tilde{x}_i$ d'un representant de la classe d'homotopia que representa aquesta paraula és molt senzill: basta començar en el punt $\tilde{x}_i$ i, a mesura que anem llegint les lletres de la paraula, anar seguint les arestes de $\tilde{X}_i$ que tinguin per etiqueta cadascuna de lletres que llegim (en el sentit de la fletxa si la lletra apareix amb exponent 1 i a l'inrevés si apareix amb exponent -1). Per exemple, la paraula $bab^{-1} \in F_{\{a,b\}} = \pi_1(X, x_0)$ pertany a $(p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$: el camí corresponent a $\tilde{X}_2$ comença al vèrtex 1, puja al vèrtex 2 per l'aresta orientada de 1 a 2 amb etiqueta b , dona una volta a l'aresta amb etiqueta a en el sentit de la fletxa, i torna a baixar al vèrtex 1 per l'aresta amb etiqueta b orientada de 1 a 2, ara recorrent-la en sentit contrari a la fletxa. Com que aquest camí ha resultat ser tancat, deduïm que $bab^{-1} \in (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$. Fent el mateix amb l'espai recobridor $(\tilde{X}_3, \tilde{x}_3, p_3)$, veiem que el camí corresponent a la paraula bab^{-1} no és tancat, així que $bab^{-1} \notin (p_3)_*(\pi_1(\tilde{X}_3, \tilde{x}_3))$. Inspeccionant els grafs és fàcil trobar, per a cada dos d'aquests espais recobridors, un element que estigui en el subgrup associat a un però en el de l'altre, conclouent que els tres subgrups associats són diferents.

En qualsevol cas, concloem que F_2 té exactament tres subgrups d'índex 2. De fet, podem calcular-ne generadors explícitament utilitzant el teorema de Seifert-van Kampen, tal com vam fer a la Secció 4.1. Fent-ho, trobem que els tres subgrups d'índex 2 de $F_{\{a,b\}} \cong F_2$ són $\langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$, $\langle b, a^2, aba^{-1} \rangle$ i $\langle a^2, ab^{-1}, b^2 \rangle$.

Per a fer el mateix per a un índex k genèric, una primera aproximació seria dir que el nombre de subgrups d'índex k de F_2 és $(k!)^2$, però l'exemple anterior ens mostra que, per tal de no sobrecomptar els subgrups, en primer lloc, hem de descomptar els espais recobridors no arcconnexos (per exemple, el corresponent a $(\text{id}, \text{id}) \in S_k \times S_k$ per a $k \geq 2$) i, en segon lloc, hem de comptar com un de sol tots els espais recobridors arcconnexos que siguin isomorfs preservant el punt base.

El segon problema és fàcilment solucionable: observem que els espais recobridors només tenen un punt distingit, el punt base, mentre que quan els comptem com elements de $S_k \times S_k$ estem afegint etiquetes a tots els altres $k - 1$ vèrtexs, i és clar que canviar aquestes etiquetes no canvia la classe d'isomorfisme preservant el punt base de l'espai recobridor. Recíprocament, si dos espais recobridors $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, $p': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$ són isomorfs preservant el punt base, com que l'isomorfisme ha de preservar la fibra de x_0 , els vèrtexs d'un han d'anar als vèrtexs de l'altre. A més, si $\tilde{X}$ té una aresta amb l'etiqueta a (o, respectivament, b) d'un vèrtex amb l'etiqueta i a un vèrtex amb l'etiqueta j , si l'isomorfisme envia els vèrtexs i, j a vèrtexs i', j' de $\tilde{X}'$, és fàcil veure per definició d'isomorfisme d'espais recobridors que l'aresta amb etiqueta a (resp., b) de i a j ha d'anar a parar a una aresta de i' a j' amb etiqueta a (resp., b). Per tant, els elements de $S_k \times S_k$ corresponents als dos espais recobridors són el mateix llevat de reetiquetar els vèrtexs $2, \dots, k$. Per tant, un cop comptats els elements de $S_k \times S_k$ que donen lloc a espais recobridors

arconnexos, per a obtenir el nombre de subgrups d'índex k , haurem de dividir el resultat per $(k-1)!$ per a no tenir en compte les $k-1$ etiquetes dels vèrtexs $2, \dots, k$.

Ja estem en situació de donar la demostració de la fórmula de Marshall Hall, com a mínim per a F_2 :

Teorema 4.13. *El nombre N_k de subgrups de d'índex k de F_2 ve donat per*

$$N_k = k(k!) - \sum_{i=1}^{k-1} [(k-i)!] N_i.$$

Demostració. Ho demostrem per inducció. És clar que la fórmula és certa per a $n = 1$, perquè $1(1) - 0 = 1 = N_1$. Per tant, podem suposar que la fórmula és certa per a tots els nombres naturals menors que n i demostrar-la per a n .

Per tota la discussió prèvia al teorema, partim dels $(k!)^2$ elements de $S_k \times S_k$. Hem de comptar quants d'ells donen lloc a espais recobridors no arconnexos de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, restar-ho de $(k!)^2$ i dividir el resultat per $(k-1)!$ per a tenir el nombre de subgrups d'índex k de F_2 .

Per a comptar el nombre d'elements de $S_k \times S_k$ que donen lloc a espais recobridors no arconnexos, sumem sobre el nombre i de vèrtexs en la component arconnexa del punt base (que té l'etiqueta 1) en l'espai recobridor corresponent a l'element de $S_k \times S_k$. El nombre i sempre és com a mínim 1, perquè el punt base sempre està connectat a si mateix. Tampoc estem interessats en els valors de $i \geq k$, perquè no té sentit que $i > k$ i quan $i = k$ l'espai recobridor és arconnex, i només volem restar els no arconnexos. Per tant, sumem sobre $i = 1, \dots, k-1$.

Per a cada i , hem de triar, d'entre els $k-1$ vèrtexs etiquetats diferents del punt base, quins $i-1$ estan connectats al punt base. El nombre de maneres de fer això és $\binom{k-1}{i-1}$. Aquesta component arconnexa correspondrà, oblidant-nos de les etiquetes dels $i-1$ vèrtexs diferents del punt base, a un subgrup de F_2 d'índex i , i d'aquests n'hi ha N_i . Un cop triat el subgrup de F_2 d'índex i a què correspondrà aquesta component connexa, hi ha $(i-1)!$ maneres de triar quin vèrtex té cada etiqueta. Els $k-i$ vèrtexs restants poden estar o no estar connectats entre ells, així que les arestes a i b entre ells poden definir-hi dues permutacions qualssevol. Tenim $((k-i)!)^2$ formes de definir aquestes dues permutacions.

Ajuntant-ho tot i dividint per $(k-1)!$, com ja hem justificat que havíem de fer, obtenim que

$$N_k = \frac{(k!)^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} N_i (i-1)! ((k-i)!)^2}{(k-1)!} = k(k!) - \sum_{i=1}^{k-1} [(k-i)!] N_i. \quad \square$$

Corol·lari 4.14. *El nombre $N_{k,n}$ de subgrups d'índex k de F_n ve donat per*

$$N_{k,n} = k(k!)^{n-1} - \sum_{i=1}^{k-1} [(k-i)!]^{n-1} N_{i,n}.$$

Demostració. L'argument és el mateix que en el cas de rang 2, només que ara les arestes tenen n etiquetes $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Partint dels $(k!)^n$ elements de $S_k \times S_k \times \dots \times S_k$, un argument completament anàleg al del cas de rang 2 condueix a la fórmula de l'enunciat. $\square$

5. Conclusions

L'objectiu principal d'aquest treball era demostrar el Teorema 3.13, donant una bijecció entre les classes d'isomorfisme preservant punts base dels espais recobridors arconnexos d'un espai topològic arconnex, localment arconnex i semilocalment simplement connex i els subgrups del seu grup fonamental. Per a donar-ne una demostració, hem hagut de passar per alguns resultats tècnics, com els lemes d'aixecament de la Secció 3.2 i, sobretot, la construcció del recobriment universal al Teorema 3.4. Després, els espais recobridors corresponents a la resta de subgrups del grup fonamental es podien construir fàcilment identificant punts del recobriment universal.

Un cop demostrada, hem vist que la correspondència ens permetia donar demostracions senzilles i visuals de teoremes no trivials sobre els subgrups dels grups lliures. En aquest treball hem vist quatre exemples d'aquest tipus d'aplicacions: hem trobat, en qualsevol grup lliure de rang finit o infinit numerable, subgrups de qualsevol rang finit o infinit numerable, i hem demostrat el teorema de Nielsen-Schreier, la fórmula de Schreier i la fórmula de Marshall Hall per al nombre de subgrups d'un índex finit fixat d'un grup lliure de rang finit.

La idea d'estudiar els subgrups dels grups lliures utilitzant grafs mitjançant la correspondència amb espais recobridors es va originar el 1983 amb l'article [Sta83] de Stallings, i des d'aleshores ha evolucionat cap a un punt de vista més combinatori i ha trobat moltes aplicacions. Una continuació natural d'aquest treball consistiria a entendre la versió combinatori de la teoria, on els espais recobridors s'interpreten com autòmats (de Stallings), i estudiar més aplicacions, com les que apareixen a [DV24]. D'altra banda, partint directament del punt en què ho hem deixat en aquest treball, després de comptar quants subgrups d'índex k té F_2 , l'article [NS06] compta quants d'aquests subgrups són normals, però només per a alguns índexs k amb unes descomposicions en factors primers determinades. També es podria continuar investigant si es poden trobar fórmules per al nombre de subgrups normals d'altres índexs k o si els resultats de [NS06] es poden generalitzar a grups lliures de rang finit genèric.

Una continuació de caire més topològic podria consistir en el càlcul del grup fonamental d'altres espais topològics. És ben sabut que tota superfície topològica compacta i connexa és homeomorfa o bé a l'esfera, o bé a la suma connexa de g tors o bé la suma connexa de g plans projectius ($g \geq 1$), però perquè això sigui realment una classificació cal demostrar que cada dues de les superfícies de la llista no són homeomorfes entre si. Una manera de fer-ho és calcular els seus grups fonamentals, cosa que es pot fer amb el teorema de Seifert-van Kampen, i demostrar que aquests grups no són isomorfs entre si. Això està fet, per exemple, a [Hat02] i a [Mas77]. Un altre grup fonamental que seria interessant de calcular és el de l'arracada hawaiana, que ens ha aparegut al treball però que no l'hem arribat a calcular completament. Una referència per a continuar investigant en aquesta línia és [dS92].

Per tant, en acabar aquest treball, se'ns presenten moltes línies d'investigació diferents, d'esperit més algebraic o més topològic segons el cas. Això ens mostra una vegada més el valor teòric dels resultats que aconsegueixen relacionar diferents àrees de les matemàtiques, com en aquest cas la topologia i la teoria de grups.

Referències

- [Bra13] Jeremy Brazas. The hawaiian earring. <https://wildtopology.com/2013/11/23/the-hawaiian-earring/>, 2013.
- [Bro06] Ronald Brown. *Topology and Groupoids*. Booksurge LLC, 3rd edition, 2006.
- [dS92] B. de Smit. The fundamental group of the hawaiian earring is not free. *International Journal of Algebra and Computation*, 2(1):33–37, 1992.
- [DV22] Jordi Delgado and Enric Ventura. Autòmats d'Stallings, un camí d'anada i tornada. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 37(1), 2022.
- [DV24] Jordi Delgado and Enric Ventura. Stallings' automata. In Benjamin Steinberg, editor, *Languages and Automata: GAGTA BOOK 3 (Chapter 3)*, pages 95–160. De Gruyter, October 2024.
- [Gri56] H. B. Griffiths. Infinite products of semigroups and local connectivity. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 6:455–485, 1956.
- [Hal49] Marshall Hall. Subgroups of finite index in free groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 1(2):187–190, 1949.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [KL01] Jin Ho Kwak and Jaeun Lee. *Enumeration of Graph Coverings and Surface Branched Coverings*, volume 1 of *Lecture Note Series*. Com2Mac-KOSEF, Korea, 2001.
- [Mas77] William S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, volume 56 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [MM86] J. W. Morgan and I. Morrison. A van kampen theorem for weak joins. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 53:562–576, 1986.
- [Mun00] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2000.
- [NS06] Samantha Nieveen and Allison Smith. Covering spaces and subgroups of the free group. REU research project report, Oregon State University, Corvallis, OR, 2006.
- [Sta83] John R. Stallings. Topology of finite graphs. *Inventiones Mathematicae*, 71(3):551–565, 1983.
- [Sti93] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1993.