LES MATEMÀTIQUES DEL CUB DE RUBIK

i l'optimització d'un mètode per a la seva resolució a cegues

Berta García Parra

TUTOR: JOAQUÍN PÉREZ

Abril 2018 – Desembre 2018

INS Premià de Mar

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ 5

NOTACIÓ 7

OBJECTIUS 9

1. INTRODUCCIÓ A LA TEORIA DE GRUPS 10

2. APLICACIONS 11

3. PERMUTACIONS 14

4. EL CUB DE RUBIK COM A GRUP 16

5. QUANTES COMBINACIONS DIFERENTS EXISTEIXEN EN EL CUB DE RUBIK 17

5.1. APLICACIONS INJECTIVES O EXHAUSTIVES A CONJUNTS DELS QUALS SAPIGUEM EL SEU CARDINAL 18

5.1.1. TRANSPOSICIONS 19

5.1.2. TRANSPOSICIONS EN LES PERMUTACIONS DEL CUB 20

5.1.3. MÒDUL I PRODUCTE CARTESIÀ DE CONJUNTS 24

5.2. APLICACIONS DE “G” A CONJUNTS MÉS COMPLICATS 26

5.3. CONCRECIÓ DEL CARDINAL DE G 29

5.3.1. TEOREMA FONAMENTAL DEL CUB DE RUBIK 29

5.3.2. LA SIGNATURA D’UNA PERMUTACIÓ 30

5.3.3. DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA FONAMENTAL 31

5.3.4. EXTRACCIÓ DELS ELEMENTS QUE NO COMPLEIXEN EL TEOREMA I VALOR DEL CARDINAL DE G 36

6. OPTIMITZACIÓ D’UN MÈTODE PER RESOLDRE EL CUB DE RUBIK A CEGUES 37

6.1. INTRODUCCIÓ 37

6.2. PRIMER OBJECTIU: RESOLDRE EL CUB A CEGUES 38

6.3. PRIMER ÈXIT DE RESOLUCIÓ A CEGUES 38

6.3.1. RESOLUCIÓ DE CANTONADES AMB EL MÈTODE “OLD POCHMANN” 38

6.3.2. RESOLUCIÓ D’ARESTES AMB EL MÈTODE M2 41

6.3.3. RESOLUCIÓ DE LA SIGNATURA SENAR 43

6.3.4. LA MEMORITZACIÓ DEL CUB AMB PARAULES 44

6.3.5. EXEMPLE DE MEMORITZACIÓ I RESOLUCIÓ A CEGUES AMB EL MEU PRIMER MÈTODE 45

6.4. DISSENY D’UN MÈTODE AVANÇAT D’EXECUCIÓ A CEGUES 47

6.4.1. COMMUTADORS QUE INTERCANVIEN UN 3-CICLE 49

6.4.2. ALGORITMES D’ORIENTACIÓ I CASOS DE SIGNATURA SENAR 51

6.4.3. CONCLUSIÓ DEL MEU NOU MÈTODE 52

7. DISENY D’UN MÈTODE PER MEMORITZAR MÚLTIPLES CUBS A CEGUES 53

7.1. LA MNEMOTÈCNIA 53

7.1.1. MÈTODE DE LA CADENA I DEL RELAT 53

7.1.2. MÈTODE DE LA PINÇA 54

7.1.3. EL MÈTODE DE “LOCI” 55

7.2. APLICACIÓ DE LES TÈCNIQUES AL CUB DE RUBIK 55

CONCLUSIONS 57

BIBLIOGRAFIA Y WEBGRAFIA 59

ANNEXOS 60

*Gràcies al meu tutor **Joaquín Pérez** per guiar els meus passos i orientar-me en l'elaboració d'aquest treball.*

*Gràcies a l'**Alex Olleta**, matemàtic i programador informàtic, per resoldre els meus dubtes de teoria de grups i motivar-me a explorar amb un major interès.*

*Gràcies a en **José María Bea**, Mestre Internacional en Memòria i fundador d'**Escuela de la Memoria**, per endinsar-me en el fascinant món de la memorització, les seves tècniques i aplicacions que també han servit en l'elaboració d'aquest treball.*

*I en especial, un milió de gràcies a la **Facultat de Matemàtiques i Estadística** de la **UPC** de Barcelona, representada en el seu professor **Enric Ventura**, per la seva generositat infinita en totes les explicacions, aclariments i correccions.*

INTRODUCCIÓ

Als set anys vaig descobrir per casualitat el que ara per a mi és un món meravellós: el Cub de Rubik. No concebo la meva vida sense aquesta petita joguina tan enginyosa i didàctica que contínuament em posa a prova amb nous reptes, projectes i il·lusions. He de reconèixer que és un món inesgotable, gairebé infinit, diria jo. Per fer aquesta afirmació em baso en què, tot i que aquest treball està referenciat al clàssic cub 3x3x3, existeixen múltiples figures tridimensionals en forma de puzle, les quals són molt àmplies pel que fa al seu estudi matemàtic. Aquest estudi implica també nombroses formes i mètodes de resolució, avivant així l'enginy i la curiositat dels qui prenen contacte amb aquest món.

A nivell personal i encara que resulti estranya l'afirmació, moltes vegades he pensat que necessitaria almenys cent anys per abastar una desena part de tot "l'Univers Rubik". Òbviament, parlo en sentit figurat, però amb això vull emfatitzar la gran diversitat i possibilitats que tanca aquest món.

Senzillament i com a conseqüència de tot el que s'ha dit, la meva fascinació pel cub em va portar a voler escriure i investigar sobre ell, i aquesta era una gran ocasió per fer-ho i formular-me diverses qüestions.

La primera d'elles va ser essencialment matemàtica i teòrica: "Quantes combinacions diferents poden donar-se en un Cub de Rubik? Puc donar una explicació matemàtica a aquesta conclusió en forma de nombre?" Em va semblar un repte desenvolupar i entendre tot el raonament que havia de dur a terme per arribar a la conclusió plantejada.

La segona qüestió era més pràctica que teòrica i he de dir que no la vaig iniciar amb aquest treball, sinó molt abans, ja que un dels aspectes primordials dins "l'Univers Rubik" per a mi, era la resolució del cub a cegues. En un primer moment, em semblava un truc de màgia la possibilitat de memoritzar-lo per resoldre'l a cegues, i vaig decidir investigar i aprofundir sobre això per aconseguir-ho jo també. Després de complir aquest objectiu inicial, el següent pas era obvi: optimitzar al màxim tots els passos de manera que el temps emprat durant tot el procés es veiés reduït al màxim. Aquest segon objectiu no va ser breu en absolut, ja que es va dilatar en el temps i, de fet, encara avui intento optimitzar les meves tècniques encara més.

La tercera qüestió que em vaig plantejar és conseqüència directa de l'anterior. Si puc memoritzar un cub i resoldre'l a cegues, puc memoritzar en cadena diversos cubs? Quants en 40 minuts? Per a resoldre aquesta qüestió havia de cercar tècniques mnemotècniques que em facilitarien enormement la feina. Tampoc va ser una tasca fàcil, ja que vaig haver d'adaptar diverses metodologies al cub de Rubik.

Per realitzar la part d'investigació matemàtica, la meva metodologia es va basar en la realització d'entrevistes amb el professor Enric Ventura de l'FME i amb el matemàtic Alexander Olleta, i en la relació de les diferents dades extretes per aplicar la teoria matemàtica al Cub de Rubik. A més, assistir al Campionat d'Europa de Cub de Rubik de 2018 em va permetre poder xerrar amb diversos matemàtics que em van solucionar dubtes i em van donar opinions sobre la meva recerca.

Pel que fa a les qüestions de resolució del cub a cegues, el coneixement bàsic el vaig adquirir dialogant amb coneixedors del cub i visualitzant alguns vídeos a la xarxa. A partir d'aquí i pel meu propi compte, vaig buscar tècniques i algoritmes i vaig estudiar apunts elaborats pròpiament per mi.

Pel que fa a la resolució de múltiples cubs a cegues, va ser experimentant que em vaig adonar de la necessitat d'utilitzar tècniques mnemotècniques. Així, vaig explorar en els llibres Consigue una memòria asombrosa, Desarrolla una mente prodigiosa i Técnicas de memoria, i vaig dissenyar una adaptació de les tècniques apreses per al Cub de Rubik. Les entrevistes amb en José María Bea i la realització dels cursos *SuperAprendizaje* i *BrainMaste*r a través d'*Escuela de la Memoria* em van permetre fer petites millores en el meu mètode.

El material que he necessitat per poder realitzar la investigació ha estat escàs, ja que m'he basat en deduccions matemàtiques i provatures amb la meva pròpia capacitat memorística. Per això, puc dir que l'únic que he necessitat han estat cubs, llibres i un ordinador.

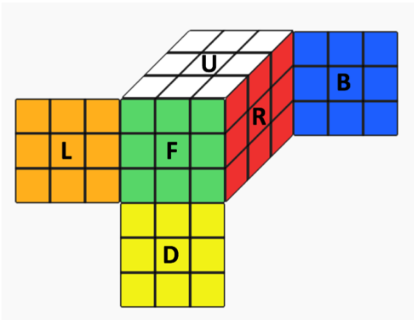
[1]

[1] He d'aclarir que, quan no s'indiqui el contrari, les figures afegides a aquest treball són d'elaboració pròpia amb els programes de CubeExplorer, Excel i Power Point.

NOTACIÓ

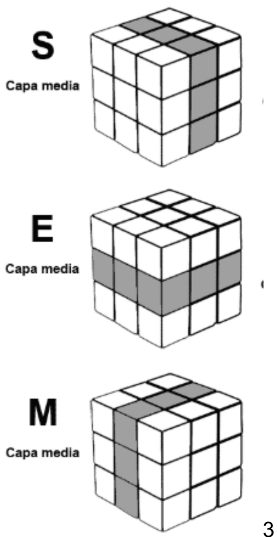
Crec que és important, abans de qualsevol altra consideració, dir que és bàsic per entendre aquest treball conèixer la notació del cub, és a dir, entendre que cada capa, posició i moviment ve representat per un o diversos símbols.

En el següent esquema, observem la notació oficial assignada a cada cara del cub, i la que també faré servir al llarg d'aquest treball:



[2]

Per a indicar les capes intermèdies del cub, encara que no són molt habituals d'anomenar, faré servir aquest esquema:



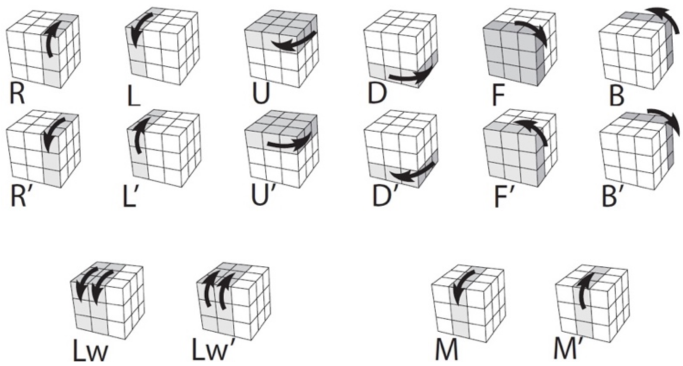
[3]

Per a referir-me a una enganxina o posició concreta del cub, anomenaré les cares en les quals està continguda, que per a cantonades seran tres i per a arestes dues. Per exemple, si em vull referir a la posició on es troba la cantonada blanca que té com a colors contigus vermell i blau, indicaré **UBR**. De la mateixa

[2] Figura 1. Notació de las capes externes del cub
[3] Figura 2. Notació de las capes intermèdies del cub. Recuperat de https://goo.glrSj7AK

manera, si vull referir-me, per exemple, a l'aresta groga que té com a color contigu taronja, indicaré **DL**.

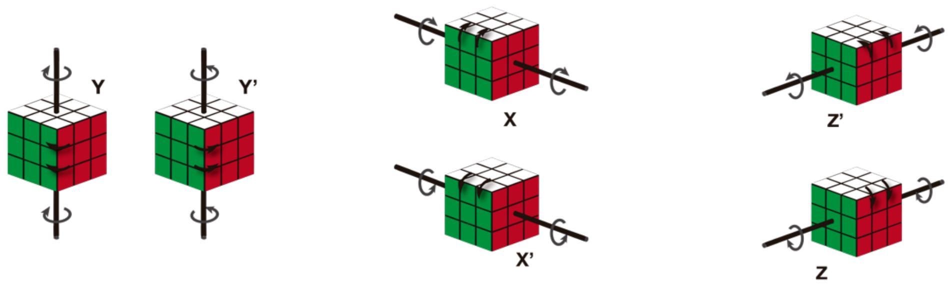
Quan parli de moviments, indicaré també el nom de la capa que es mou i afegiré una cometa a sobre de la lletra en cas que es mogui en sentit contrari a les agulles del rellotge. Així ho observem d’una manera més gràfica en el següent esquema:



[4]

Per a indicar que una capa es mou dues vegades afegiré un **2** després de la lletra. Per exemple, si vull enllaçar un moviment horari de la capa de la dreta amb un moviment doble de la capa superior i amb un altre antihorari de la capa inferior, escriuré **R U2 D '**.

Les rotacions del cub també tindran la seva notació. Encara que les utilitzaré poc, si ho faig, serà seguint el següent esquema:



[5]

I aclarit aquest punt, comencem amb el treball.

---

[4] Figura 3. Notació dels moviments del cub. Recuperat de https://goo.glrSj7AK

[5] Figura 4. Notació de les rotacions del cub. Recuperat de https://goo.gl/7mc9so

OBJECTIUS

Primer objectiu

Arribar a conèixer el nombre exacte de combinacions diferents que poden existir en un Cub de Rubik mitjançant coneixements matemàtics.

Segon objectiu

Investigar un mètode per a aconseguir memoritzar i resoldre a cegues el Cub de Rubik i optimitzar el procés per a reduir el temps de memorització fins als 15 segons i el de resolució fins als 20.

Tercer objectiu

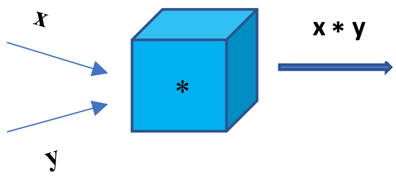
Aconseguir memoritzar més de 20 Cubs de Rubik en menys de 40 minuts per a la seva posterior resolució a cegues.

1. INTRODUCCIÓ A LA TEORIA DE GRUPS

Per definició, un grup consisteix en un conjunt d'objectes, que anomenarem elements, i un operador. Matemàticament, expressarem un grup com $(G, *)$, on G seria el conjunt i $*$ un operador, i la parella d'ambdós s'anomenaria grup.

Per entendre-ho millor, imaginarem una màquina, la qual consta de dues entrades i una sortida. Podem introduir en aquesta màquina tots els objectes que vulguem, però tots ells hauran de pertànyer a un mateix tipus. Si escollim ficar una sèrie de llapis per les entrades de la màquina, després de ser processats, sortirà per l'única sortida existent un sol llapis, resultat dels dos que vam ficar al principi. En aquest exemple, els llapis representarien els elements del conjunt, la màquina l'operació, i la parella d'operació i conjunt vindria a ser el grup.

[6]



Entès això, prosseguiré amb certes característiques que defineixen un grup, és a dir, perquè la parella $(G, *)$ es defineixi com a grup, ha de complir també les propietats que explicaré a continuació.

L'operació és tancada, és a dir, per a tots els elements del conjunt, si són operats, el seu resultat també pertany al mateix conjunt i, per tant, al grup. Així doncs, segons aquesta característica dels grups, si els elements anomenats x i y pertenyen a G, l'element $x * y$ pertany també a G. Matemàticament, expressaríem:

$$\forall\, x, y \in G, x * y \in G$$

L'associació dels elements del conjunt en l'operació no importa. Per tant, matemàticament podríem afirmar que per a qualssevol elements (diguem-ne x, y i z) compresos en el grup (G), podran ser agrupats de diferents maneres en l'operació i l'element que resulti serà el mateix. Aquesta propietat l'anomenarem "associativa" i matemàticament l'expressaríem:

$$\forall\, x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$$

[6] Figura 5. Metàfora del concepte de grup

Existeix un element neutre en el conjunt, és a dir, un element que no repercuteix a l'hora d'operar, i que podríem considerar-lo com un element identitat. Matemàticament, diríem que existeix un element neutre (diguem-li **e**) pertanyent al grup, que operat al costat de qualsevol altre element, resulta igual que aquest últim element. Matemàticament, expressaríem:

$$\exists\, \mathrm{e} \in \mathrm{G}, \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{G} \,/\, (\mathrm{e} * \mathrm{x}) = \mathrm{x}$$

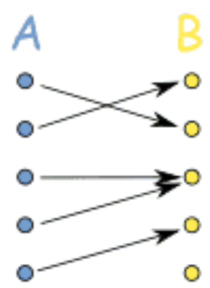
I l'última propietat la definiríem com "propietat inversa", és a dir, per a qualsevol element (diguem-li $\mathbf{x}$), comprès en el grup, existeix un altre element (diguem-li $\boldsymbol{x^{-1}}$) pertanyent al mateix conjunt, que està relacionat amb $\mathbf{x}$ i és el seu element invers. Si operem aquests dos elements, l'element resultant serà l'element neutre ($\mathbf{e}$) del conjunt. Matemàticament, expressaríem aquesta propietat com:

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{G}, \exists\, x^{-1} \in \mathrm{G} \,/\, (\mathrm{x} * x^{-1}) = \mathrm{e}$$

Diem que un grup és commutatiu quan l'alteració en l'ordre dels elements del conjunt no afecta l'element resultant després de realitzar l'operació. No tots els grups posseeixen aquesta propietat i, per això, distingim grups commutatius i grups no commutatius.

2. APLICACIONS

Una aplicació és una relació entre els elements de dos conjunts, en què cap element del primer està vinculat amb més d'un element del segon, tal com observem a continuació, prenent com a conjunts **A** i **B**.

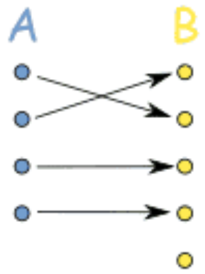


[7]

Per contra, si un valor del conjunt **A** està vinculat a dos elements de **B**, no consideraríem aquesta relació com una aplicació, ja que cada valor del primer conjunt ha de tenir com a màxim una sola imatge.

[7] Figura 6. Exemple d'aplicació. Recuperat de https://goo.gl/7SLPGn

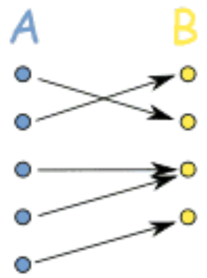
Una aplicació es considera injectiva quan cap element del conjunt d'arribada és imatge de més d'un element del conjunt de partida. Tornant a prendre com a conjunts **A** i **B**, aquest seria un exemple d'aplicació injectiva:



[8]

Considerem dos conjunts $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ i $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$ .Seria la funció $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2$ injectiva? No, ja que en ser representada com una paràbola, hi ha valors del conjunt d'arribada als que els corresponen dos valors del conjunt de partida. Per contra, consideraríem $\boldsymbol{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ una aplicació injectiva, ja que no hi ha cap element del conjunt d'arribada que sigui imatge de més d'un element del conjunt de partida.

Vegem ara com es defineix una aplicació exhaustiva. Perquè la funció sigui considerada com a tal, tots els elements del conjunt d'arribada han der ser imatge, d'almenys, un element del conjunt de partida, tal com observem a continuació amb els conjunts **A** i **B**.



[9]

Tornem a considerar dos conjunts $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ i $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$. Seria aleshores la funció $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}$ exhaustiva? Per a comprovar-ho, hem de verificar que el valor de tots els possibles elements del conjunt d'arribada sigui igual al recorregut, és a dir, al subconjunt definit per tots aquells elements del conjunt d'arribada que són imatge d'un o més elements del conjunt de partida. Si això és així, la funció serà exhaustiva, perquè el recorregut serà igual al conjunt d'arribada i tots els elements del conjunt $\mathbf{Y}$ seran imatge, d'almenys, un element del conjunt $\mathbf{X}$.

---

[8] Figura 7. Exemple d'aplicació injectiva. Recuperat de https://goo.gl/7SLPGn
[9] Figura 8. Exemple d'aplicació exhaustiva. Recuperat de https://goo.gl/7SLPGn

Si agafem l'element -$\mathbf{2}$ del conjunt $\mathbf{Y}$ observem com aquest no és imatge de cap element del conjunt $\mathbf{X}$, ja que no podem solucionar la següent equació en nombres reals:

$$\boldsymbol{x^2 - 1 = -2}$$
$$\boldsymbol{x^2 = -2 + 1}$$
$$\boldsymbol{x^2 = -1}$$

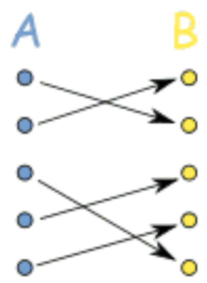
Llavors, podem afirmar que l'element ***-2*** no pertany al recorregut i, per tant, l'aplicació no és exhaustiva.

Per trobar el recorregut de la funció aïllarem $\mathbf{x}$, de manera que:

$$\boldsymbol{x^2 = y + 1\,;\; x = \pm\sqrt{(y+1)}}$$
$$\boldsymbol{y + 1 \geq 0}$$

En solucionar la inequació trobem que $\boldsymbol{y \geq -1}$. Tots els elements del conjunt $\mathbf{Y}$ menors que -$\mathbf{1}$ no pertanyeran al recorregut de la funció, i només pertanyeran al recorregut i seran imatge d'almenys un element del conjunt $\mathbf{X}$ els elements de $\mathbf{Y}$ compresos en el rang [-$\mathbf{1}, +\infty$).

Finalment, diem que una aplicació és bijectiva si és injectiva alhora que exhaustiva, tal com observem en aquest exemple:



[10]

[10] Figura 9. Exemple d'aplicació bijectiva. Recuperat de https://goo.gl/7SLPGn

3. PERMUTACIONS

Podríem considerar una permutació com un canvi en la manera en què es disposen els elements d'un mateix conjunt. Totes les permutacions són aplicacions bijectives, ja que els elements del conjunt es combinen entre ells i això fa que no hi hagi dos elements del mateix conjunt amb la mateixa imatge i que a totes les imatges els correspongui un element del primer conjunt. El conjunt d'aplicacions bijectives d'un conjunt en ell mateix, és a dir, el conjunt de permutacions diferents de tal conjunt, es representa com $\boldsymbol{S_n}$.

Suposem el conjunt $\mathbf{X} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$. La permutació d'aquests elements es representaria per la funció $\mathbf{f}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, la qual assigna a cada valor del conjunt $\mathbf{X}$ un altre del mateix conjunt. Quantes permutacions es podrien establir amb aquests tres elements? Partim de tres possibilitats diferents de permutació. Si comencem per l'element $\mathbf{1}$, aquest pot relacionar-se amb qualsevol dels elements de $\mathbf{X}$, que són $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ i $\mathbf{3}$. Un cop s'ha relacionat amb un d'ells, ja només quedaran dues possibilitats a les quals pugui anar el segon element. L'últim element només tindrà una única opció, que serà relacionar-se amb l'element que quedi. Per tant, les diferents combinacions que hi ha de permutació de tres elements són sis, i les calcularíem com:

$$\mathbf{3! = 3 * 2 * 1 = 6}$$

Aquestes sis permutacions diferents serien les següents, considerant la segona fila de cada matriu como el destí de la primera fila:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Definirem el conjunt $\mathbf{G}$ com les sis permutacions possibles dels elements de $\mathbf{X}$. Establirem a més una operació, $*$, que en aquest cas serà la forma de "jugar" amb els elements, és a dir, compondre una sèrie de permutacions de manera que quedin una darrere l'altra . La parella del conjunt i l'operació serà el grup i, en aquest cas, l'anomenarem $\boldsymbol{S_3}$.

Ja tenim definit el grup, però per què l'hem anomenat $\boldsymbol{S_3}$? Com he dit abans, el conjunt de permutacions diferents d'un conjunt es representa com $\boldsymbol{S_n}$. $\boldsymbol{S_3}$ fa referència a les permutacions de tres elements, i tres són tots els valors que té $\mathbf{X}$. Per això, el nostre grup es diu així.

Hem vist que l'operació del grup és compondre, que significa fer una continuació dels elements. Si composem $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, l'element resultant ha de ser un altre pertanyent al mateix conjunt, ja que, si no fos així, $\boldsymbol{S_3}$ no es podria considerar un grup, segons la seva definició. Per calcular aquest element resultant, compondrem les dues permutacions, de tal manera que l'element $\mathbf{1}$ passarà al $\mathbf{3}$, l'element $\mathbf{2}$ passará a l'$\mathbf{1}$ i, a continuació, tornarà al **2**. L'element $\mathbf{3}$ passarà al $\mathbf{2}$ y després a l'1.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Efectivament, l'element resultant d'aquesta composició és $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, que pertany al conjunt.

L'element neutre del conjunt $\mathbf{G}$ és $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, ja que prenent $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ com a elements del conjunt $\mathbf{X}$, es compleix que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

Cada permutació de $\boldsymbol{S_3}$ té la seva inversa, pertanyent també al conjunt, de tal manera que operades aquesta i la inversa, resulta la permutació neutra. Podem observar que l'element invers de $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, ja que $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, sent $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ l'element neutre.

I què passaria si invertíssim l'ordre dels elements $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ a l'hora d'operar-los? Representarien el mateix element $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$? Podem comprovar que no. En el primer cas, la permutació resultant és $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, i en el segon és $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. Com que no representen el mateix element, podem afirmar que $\boldsymbol{S_3}$ és un grup no commutatiu, ja que l'alteració en l'ordre dels elements del conjunt afecta l'element resultant després de realitzar l'operació.

4. EL CUB DE RUBIK COM A GRUP

El Cub de Rubik es defineix com a grup, doncs compleix totes les característiques necessàries per a anomenar-se com a tal.

Començarem definint el conjunt d'elements, que en el nostre cas serà el cúmul dels moviments del cub. Aquesta és una llista llarguíssima, ja que existeixen els elements simples $\mathbf{1}$, U, D, R, L, F, B, els seus inversos i nombroses combinacions diferents amb tots ells que representen posicions en el cub diferents. Com que no podem escriure tots els elements del conjunt, representarem $\mathbf{G} = \{\textbf{moviments del cub}\}$. El nostre operador, $*$, serà una concatenació de seqüències de moviments. Per expressar els elements, gairebé sempre ometrem el símbol $*$ i interpretarem $\mathbf{fg}$ com $\mathbf{f} * \mathbf{g}$. La parella del conjunt d'elements - tots els moviments del cub -, juntament amb l'operació - empalmar seqüències de moviments - , serà el grup, i el representarem com $(\mathbf{G}, *)$.

Un cop definit el grup, analitzarem si compleix totes les propietats.

En primer lloc, podem dir que l'operació està clarament tancada, ja que si empalmem un moviment del conjunt amb un altre, l'element resultant serà una seqüència de moviments que pertanyerà al mateix conjunt. Un exemple pràctic seria el següent, on després d'operar els dos elements $\mathbf{R}$ i $\boldsymbol{L}^{2}$, l'element resultant és $\mathbf{R}\boldsymbol{L}^{2}$, que pertany també al conjunt:

$$\mathbf{R}\ \boldsymbol{L}^{2} = \mathbf{R}\boldsymbol{L}^{2}$$

El grup també compleix la propietat associativa, ja que no importa la manera com agrupem els moviments, sempre i quan l'ordre en què es realitzin les operacions sigui conservat. Podem observar aquesta propietat en el següent exemple:

$$(\mathbf{F}\ \boldsymbol{B}^{2})\ \boldsymbol{L}^{2} = \mathbf{F}\ (\boldsymbol{B}^{2}\boldsymbol{L}^{2}) = \mathbf{F}\boldsymbol{B}^{2}\boldsymbol{L}^{2}$$

Tot element del cub té un altre invers, tal com indica la propietat. Si $\mathbf{F}$ és el moviment del cub que gira la cara frontal en el sentit de les agulles del rellotge, llavors $\mathbf{F}^{-1}$, l'invers de $\mathbf{F}$, mou la cara frontal en sentit contrari a les agulles del rellotge. Suposem que hi ha una seqüència de moviments, posem com a exemple $\mathbf{FR}$, llavors la inversa de $\mathbf{FR}$ és $\mathbf{R}^{-1}\ \mathbf{F}^{-1}$, ja que per invertir les operacions s'han de fer en ordre contrari. Podem dir que l'invers d'un element, simplement "el desfà". Quan parlem del cub, de vegades expressarem els moviments inversos com $\mathbf{a'}$, prenent com $\mathbf{a}$ un moviment del cub.

L'element neutre l'anomenarem **1**, i correspon a no canviar el cub en absolut, és a dir, si operem amb una sèrie de moviments i l'element final resulta no haver modificat el cub, podrem dir que aquest és l'element **1**:

$$R^2 \ \mathrm{B} \ \ D^{-1} \ \mathrm{D} \ B^{-1} \ R^2 \ = \ R^2\mathrm{B}D^{-1}\mathrm{D}B^{-1}R^2 \ = \ R^2\mathrm{B}B^{-1}R^2 \ = \ R^2R^2 \ = \ 1$$

Ens acabem d'adonar també que hi ha maneres diferents de representar un mateix moviment, element del conjunt, ja que hi ha seqüències diferents de girs que fan el mateix efecte. En el cas anterior d'exemple, les cinc igualtats representen l'element **1** i, per tant, la mateixa posició en el cub.

Ja podem confirmar que el Cub de Rubik es comporta com a grup, ja que compleix les quatre propietats bàsiques. L'únic que ens queda per analitzar és si és o no un grup commutatiu. Repercuteix l'ordre en què operem els moviments en l'element final? La resposta és sí, ja que la posició final del cub és diferent:

$$\left.\begin{array}{l} R \ \ F^{-1} = RF^{-1} \\ F^{-1} \ \ R = F^{-1}R \end{array}\right\} \ RF^{-1} \neq F^{-1}R$$

Hem pogut observar que, si alterem l'ordre dels elements inicials R i $\mathrm{F'}$, després d'operar-los, l'element que resulta no és el mateix. Tanmateix, sí que hi ha elements que commuten, doncs $\mathrm{RL} = \mathrm{LR}$, però com hem vist, no són tots, de manera que ens trobem davant d'un grup no commutatiu.

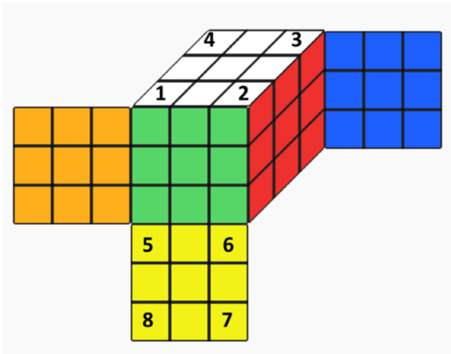
5. QUANTES COMBINACIONS DIFERENTS EXISTEIXEN EN EL CUB DE RUBIK

Ara, el nostre objectiu serà aproximar-nos al cardinal de G, és a dir, al nombre d'elements que posseeix aquest conjunt. Com hem vist, és un cardinal molt gran, però no infinit com seria el de $\mathbb{R}$. Per fer-ho, definirem aplicacions injectives i exhaustives de G a altres conjunts més senzills dels quals sapiguem el seu cardinal. D'aquesta manera, traurem conclusions i cada vegada ens aproximarem més al valor del cardinal de G.

Suposem que tenim un conjunt H, el cardinal del qual és 1000, i establim una aplicació injectiva $\mathrm{f}\colon \mathrm{G} \to \mathrm{H}$. Sabent això, podem deduir que el cardinal de G serà igual o menor que 1000, però en cap cas major, ja que llavors, en tenir el conjunt de partida G més elements que el conjunt d'arribada H, alguns elements de G tindrien la mateixa imatge en H, de manera que la funció ja no seria injectiva.

Suposem que tenim un altre conjunt $\mathbf{K}$, el cardinal del qual és 500, i establim una aplicació exhaustiva $\mathbf{f}: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}$. Llavors, ja podem saber que el cardinal de $\mathbf{G}$ serà igual o major que 500, ja que si l'aplicació és exhaustiva, tots els elements de $\mathbf{K}$ seran imatge d'almenys un element de $\mathbf{G}$, i si el conjunt $\mathbf{G}$ fos menor que $\mathbf{K}$, alguns elements de $\mathbf{K}$ no serien imatge.

Numerant cada cantonada del cub arbitràriament tenim que:



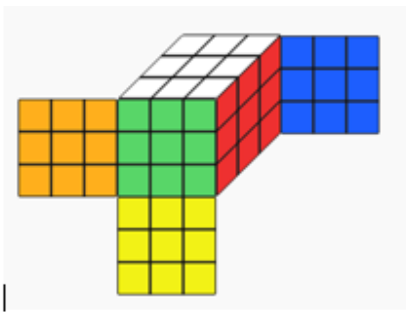
[11]

5.1. APLICACIONS INJECTIVES O EXHAUSTIVES A CONJUNTS DELS QUALS SAPIGUEM EL SEU CARDINAL

Podem crear una aplicació $\mathbf{f}: \mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8}$, sent $\boldsymbol{S_8}$ el conjunt de permutacions de les vuit cantonades del cub, és a dir, cada element de $\boldsymbol{S_8}$ representarà una de les posicions diferents de les cantonades, sense tenir en compte la seva orientació ni tampoc la posició i orientació de les arestes.

Seria $\mathbf{f}: \mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8}$ injectiva? No, ja que hi ha elements de $\mathbf{G}$ als quals els correspon la mateixa posició de cantonades. Per exemple, el moviment **1** tindria com a imatge $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ i la seva representació en el cub seria la següent:

$$\mathbf{1} =$$



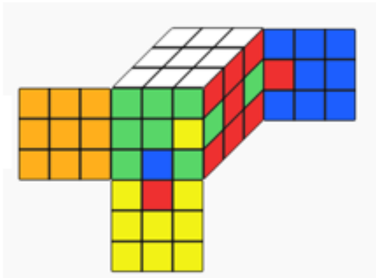
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

[12]

[11] Figura 10. Codificació de les cantonades del cub
[12] Figura 11. Exemple de moviment i la seva imatge

El moviment $\mathbf{E\,R^{-1}\,D\,R\,E^{-1}\,R^{-1}\,D^{-1}\,R}$ tindria la mateixa imatge, ja que aquest moviment només canvia la posició de les arestes del cub, però no de les cantonades, tal com observem a continuació:

$\mathbf{E R^{-1} D R E^{-1} R^{-1} D^{-1} R =}$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

[13]

La imatge que tots dos moviments representen és la mateixa, ja que la permutació de cantonades resulta ser idèntica, però perquè l'aplicació sigui injectiva, aquests dos moviments han de ser diferents i, tal com hem comprovat, el segon canvia tres arestes del cub i el primer representa el cub en el seu estat resolt. Per tant, confirmem que l'aplicació no és injectiva a causa d'haver trobat dos elements del primer conjunt que van a parar a la mateixa imatge. Com l'aplicació no és injectiva, no podem concloure que $|\boldsymbol{G}| \leq |\boldsymbol{S_8}|$, però tampoc que $|\boldsymbol{G}| > |\boldsymbol{S_8}|$, ja que el no haver estat aquesta aplicació injectiva no nega que es pugui establir una que sí ho sigui de $\mathbf{G}$ a un altre conjunt.

Ara bé, seria $\mathbf{f\colon G \rightarrow \boldsymbol{S_8}}$ exhaustiva? La resposta és sí. Qualsevol permutació de les vuit cantonades del cub la podrem aconseguir mitjançant algun moviment determinat, i això és pel que explicaré a continuació.

5.1.1. TRANSPOSICIONS

Una transposició és una permutació que únicament canvia dos elements, de tal manera que la resta roman en el mateix lloc. Per exemple, si tenim un conjunt $\mathbf{X} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5}\}$ i establim el grup $\boldsymbol{S_5}$, referent a les permutacions d'aquests cinc elements, una de les $\mathbf{5!}$ permutacions diferents que pertanyen a $\boldsymbol{S_5}$ serà $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$, i aquesta serà una transposició, ja que els únics elements que han canviat de posició són dos, l'element $\mathbf{1}$ i el $\mathbf{2}$.

De manera general, si composem una sèrie de transposicions d'un conjunt $\boldsymbol{S_n}$, podrem aconseguir qualsevol permutació de dit conjunt. Suposem el conjunt $\boldsymbol{S_5}$ i la permutació $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{S_5}$. Podrem comprovar que aquesta

[13] Figura 12. Exemple de moviment i la seva imatge

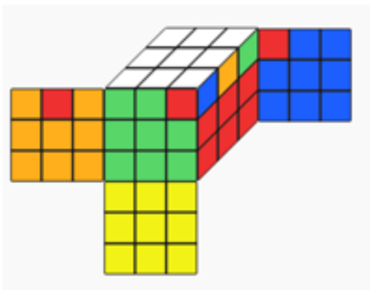
permutació es pot aconseguir component les següents transposicions, totes elles pertanyents a S_5:

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5.1.2. TRANSPOSICIONS EN LES PERMUTACIONS DEL CUB

Si aconseguim trobar els moviments que representen totes les transposicions existents en el conjunt de permutacions de cantonades del cub podrem concloure que, composant-les, es pot obtenir qualsevol permutació de S_8. Per tant, totes les permutacions podran aconseguir-se mitjançant algun moviment i, en conseqüència, l'aplicació $f\colon G \to S_8$ serà exhaustiva.

Existeixen tres transposicions possibles per a S_8, ja que en ser el cub simètric, aquestes tres es van traslladant a la resta de les cantonades. Les tres transposicions serien $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, que permuta dues cantonades contigües del cub, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, que permuta dues cantonades oposades en la mateixa capa, i $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, que permuta dues cantonades oposades totalment. Si busco un moviment del cub que tingui com a imatge cada transposició, trobo, per exemple, els següents:

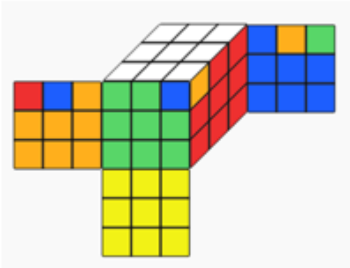
RUR'U'R'FR2U'R'U'RUR'F'=  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

[14]

---

[14] Figura 13. Moviment amb imatge en una transposició

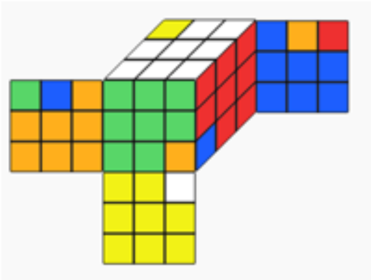
FRU’R’U’RUR’F’RUR’U’R’FRF’=



$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

[15]

RUL’U2RU’R’U2LRU’R2 =



$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

[16]

Sabem que qualsevol permutació de $\boldsymbol{S_8}$ es pot dividir en transposicions, i coneixem moviments específics que representen les transposicions possibles, de manera que totes les permutacions de $\boldsymbol{S_8}$ es podran aconseguir mitjançant algun moviment, element de $\mathbf{G}$. Per acabar de comprovar-ho de manera pràctica, escollirem una permutació a l'atzar de $\boldsymbol{S_8}$ tal com $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$. Si busquem una sèrie de transposicions de forma que la seva composició resulti ser $\boldsymbol{h}$, trobem que:

$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b} * \mathbf{c} * \mathbf{d}$, on $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$.

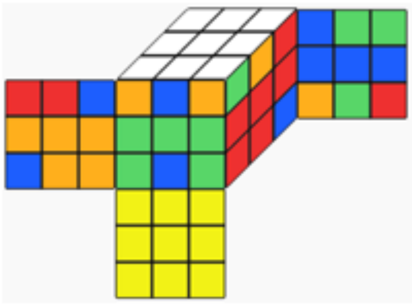
Ara, només ens queda identificar les transposicions $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{d}$ amb una equivalent de les tres possibles que vam veure, i composar els seus corresponents moviments per trobar el moviment que condueix a $\boldsymbol{h}$.

La transposició $\boldsymbol{b}$ canvia les cantonades $\mathbf{1}$ i $\mathbf{2}$, contigües en el cub, i tal com vam veure, aquesta és la imatge de, per exemple, **RUR’U’R’FR2U’R’U’RUR’F’**. La transposició $\boldsymbol{c}$ permuta també dues cantonades del cub, en aquest cas la $\mathbf{1}$ i la $\mathbf{4}$, i el seu moviment podria tornar a ser l’anterior, i la permutació $\boldsymbol{d}$ es torna a

[15] Figura 14. Moviment amb imatge en una transposició
[16] Figura 15. Moviment amb imatge en una transposició

correspondre amb la permutació de dos cantonades contigües, la $\mathbf{7}$ i la $\mathbf{8}$, , i el seu moviment pot ser el mateix. Si composem els 3 moviments, cada un d'ells adaptats a la posició del cub que li correspon per evitar rotacions durant l'execució, obtindrem el moviment per a la permutació $\boldsymbol{h}$.

FUF'U'F'LF2U'F'U'FUF'L' ∗ LUL'U'L'BL2U'L'U'LUL'B' ∗
BDB'D'B'LB2D'B'D'BDB'L' =
FUF'U'F'LF2U'F'U'FUF'UL'U'L'BL2U'L'U'LUL'DB'D'B'LB2D'B'D'BDB'L' =



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

[17]

Com que $\mathbf{f}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_8}$ és una aplicació exhaustiva, tal com acabem de demostrar, concloem que el cardinal de $\mathbf{G}$ ha de ser igual o major que el cardinal $\boldsymbol{S_8}$, y aquest el calcularem com $\mathbf{8!}$

$$|\boldsymbol{G}| \geq |\boldsymbol{S_8}| = 8! = \mathbf{8*7*6*5*4*3*2*1 = 40.320}$$

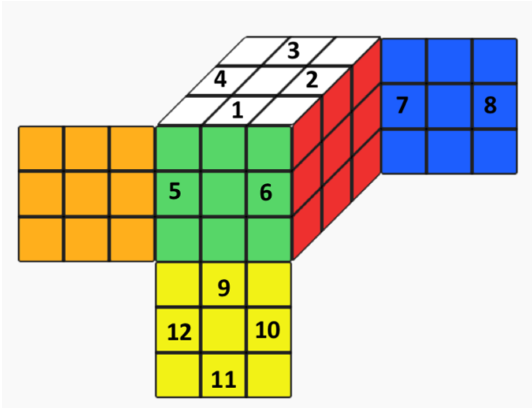
Per a continuar aproximant-nos al valor del cardinal de $\mathbf{G}$, ens interessa trobar un conjunt de cardinal el major possible i que una aplicació de $\mathbf{G}$ a aquest conjunt sigui exhaustiva. Quin conjunt amb cardinal major al de $\boldsymbol{S_8}$ podríem establir? $\boldsymbol{S_{12}}$ seria un bon exemple, ja que fa referència a les permutacions de les dotze arestes del cub i podem calcular el seu cardinal com:

$$\mathbf{12! = 12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1 = 479.001.600}$$

Establim l'aplicació $\mathbf{g}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_{12}}$. Per comprovar si és exhaustiva repetirem tot el procediment realitzat amb l'aplicació $\mathbf{f}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_8}$. Sabem que qualsevol permutació de $\boldsymbol{S_{12}}$ es pot aconseguir composant transposicions d'aquest mateix conjunt. Si trobem totes les transposicions possibles de $\boldsymbol{S_{12}}$ i algun moviment de $\mathbf{G}$ del qual prové cada una, podrem aconseguir qualsevol permutació de les $\mathbf{12!}$ i, a més, un moviment que produeixi cada una.

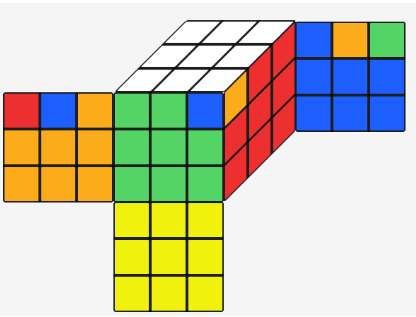
[17] Figura 16. Moviment amb imatge en *h*

Hi ha quatre transposicions possibles per a S_{12}, ja que en ser el cub simètric, aquestes quatre es van traslladant a la resta de les arestes. Numerem les arestes del cub de manera arbitrària i obtenim:

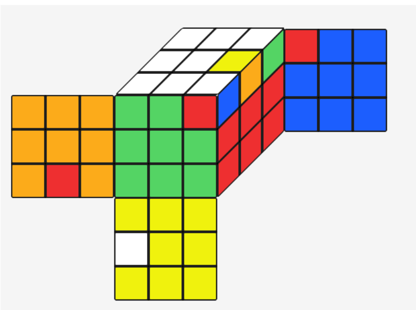


[18]

Les quatre transposicions amb les seves corresponents representacions són:

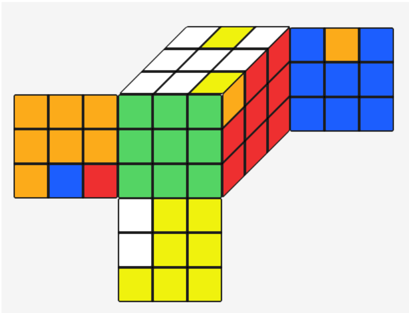

[19]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

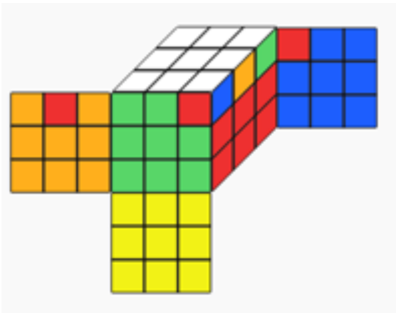

[20]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 12 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

[18] Figura 17. Codificació de les arestes del cub
[19] Figura 18. Moviment amb imatge en una transposició
[20] Figura 19. Moviment amb imatge en una transposició


[21]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 12 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$


[22]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Els moviments que trobo per a les quatre transposicions són, respectivament:
FRU’R’U’RUR’F’RUR’U’R’FRF’
L2RUR’U’R’FR2U’R’U’RUR’F’L2
RLU2F2RLUB2U2R2DF2D2R2U’R2
RUR’U’R’FR2U’R’U’RUR’F’.

Com que les quatre transposicions es poden aconseguir mitjançant moviments determinats que hem trobat, qualsevol permutació de S_{12} es podrà aconseguir composant aquests moviments i, per tant, l'aplicació serà exhaustiva, de manera que:

$$|G| \geq |S_{12}| = 12! = 12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1 = 479.001.600$$

5.1.3. MÒDUL I PRODUCTE CARTESIÀ DE CONJUNTS

Per a aproximar-nos encara més al cardinal de $\mathbf{G}$ i incrementar els nombres calculats, necessitem utilitzar un nou concepte sobre conjunts.

Si $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són dos conjunts, llavors el producte cartesià de $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ és el conjunt constituït per totes les parelles que tenen un primer component d’ $\mathbf{A}$ i un segon component de $\mathbf{B}$.

[21] Figura 20. Moviment amb imatge en una transposició
[22] Figura 21. Moviment amb imatge en una transposició

$$\boldsymbol{A\ x\ B} = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\boldsymbol{a} \in \mathbf{A},\ \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$$

Si $\mathbf{A = \{1, 2, 3\}}$ i $\mathbf{B= \{5, 6\}}$, el producte cartesià d'$\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ serà:

$$\boldsymbol{A\ x\ B} = \{(\mathbf{1},\mathbf{5}),(\mathbf{1},\mathbf{6}),(\mathbf{2},\mathbf{5}),(\mathbf{2},\mathbf{6}),(\mathbf{3},\mathbf{5}),(\mathbf{3},\mathbf{6})\}$$

Clarament, el cardinal del conjunt $\boldsymbol{A\ x\ B}$ serà el cardinal d'$\mathbf{A}$ multiplicat pel cardinal de $\mathbf{B}$.

$$|\boldsymbol{A\ x\ B}| = |\boldsymbol{A}| * |\boldsymbol{B}| = \mathbf{3} * \mathbf{2} = \mathbf{6}$$

Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ són tres conjunts, llavors el producte cartesià d'$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ és el conjunt constituït per tots els trios que tenen un primer component d'$\mathbf{A}$, un segon de $\mathbf{B}$ i un tercer de $\mathbf{C}$.

$$\boldsymbol{A\ x\ Bx\ C} = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|\boldsymbol{a} \in \mathbf{A},\ \mathbf{b} \in \mathbf{B},\ \ \mathbf{c} \in \mathbf{C}\}$$

$$|\boldsymbol{A\ x\ B\ x\ C}| = |\boldsymbol{A}| * |\boldsymbol{B}| * |\boldsymbol{C}|$$

El producte cartesià d'un conjunt, per exemple $\mathbf{A}$, amb si mateix, és $\boldsymbol{A\ x\ A} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{y} \in \mathbf{A}\}$. De la mateixa manera, si elevem aquest mateix conjunt al cub, $\boldsymbol{A\ x\ Ax\ A} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{3}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\boldsymbol{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{y} \in \mathbf{A},\ \mathbf{z} \in \mathbf{A}\,\}$.

El conjunt d'enters de mòdul n, denotat $\mathbb{Z}_n$, és el conjunt de n elements $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, \mathrm{n}-1\}$. Aquest conjunt està dotat de l'anomenada "aritmètica modular", amb la qual cosa podem sumar i multiplicar elements de $\mathbb{Z}_n$ com si es tractés de nombres enters comuns, amb la peculiaritat de que si el resultat surt del rang del conjunt per un extrem, tornem a començar per l'extrem contrari. Exactament igual es fa de manera habitual, **mòdul 12**, en operar amb les hores d'un dia, ja que al cap de 5 hores des de les 10 del matí seran les 3 de la tarda, és a dir, **10+5=15=3** (**mòdul 12**).

Per exemple, si tenim el conjunt $\mathbb{Z}_{\mathbf{3}}$, $\mathbb{Z}$ és el conjunt de nombres enters i **3** el mòdul del conjunt. Agafaríem els nombres enters positius i, llavors, $\mathbb{Z}_3 = \{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}\}$, de manera que, per exemple, l'element **3** $\in \mathbb{Z}$ es representaria com $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}_3$, i l'element $\mathbf{15} \in \mathbb{Z}$ com $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}_3$, és a dir, la resta de la divisió de l'element de $\mathbb{Z}$ entre tres ens donaria l'element per a $\mathbb{Z}_3$.

5.2. APLICACIONS DE "G" A CONJUNTS MÉS COMPLICATS

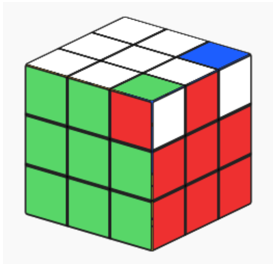
Podríem aproximar-nos més al cardinal de $\mathbf{G}$ establint una altra aplicació més gran que $\mathbf{g}$: $\mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_{12}}$? Coneixem el cardinal del conjunt del producte cartesià de $\boldsymbol{S_8}$ i $\boldsymbol{S_{12}}$. Suposem aquest conjunt, el cardinal del qual és $|\, \boldsymbol{S_8\, x\, S_{12}}| = \mathbf{8!} * \mathbf{12!} = \mathbf{40.320} * \mathbf{479.001.600} = \mathbf{19.313.344.510.000}$. Si aconseguim establir una aplicació exhaustiva $\mathbf{k}$: $\mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8\, x\, S_{12}}$, podrem afirmar que $|\boldsymbol{G}| \geq |\boldsymbol{S_8\, x\, S_{12}}|$

Per la pràctica que porto amb el cub, nego que es pugui establir una aplicació exhaustiva $\mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8\, x\, S_{12}}$ que vagi de cada moviment a la permutació de cantonades i arestes que deixa, ja que hi ha permutacions que no existeixen en el cub, és a dir, no es pot arribar a elles mitjançant cap moviment. Per exemple, no és possible aconseguir una transposició d'arestes sense que permutin també un nombre parell de cantonades. Per això, no podem arribar a la conclusió de que $|\boldsymbol{G}| \geq |\boldsymbol{S_8\, x\, S_{12}}|$, però tampoc podem descartar aquesta opció, ja que és possible que es pugui establir alguna aplicació exhaustiva amb imatge en un altre conjunt (o en el mateix, però amb una distribució diferent de fletxes). Més endavant, en la demostració d'un teorema, entendrem el per què d'aquestes impossibilitats en el cub que jo dedueixo per la meva pròpia experiència i pràctica.

Fins ara, els conjunts amb els quals hem establert aplicacions feien referència únicament a la permutació i no a l'orientació de les peces del cub. Podem enriquir els conjunts amb més informació, ja que el moviment de les peces implica una permutació d'aquestes i també tres maneres diferents de col·locar-se en una posició en el cas de les cantonades, i dos en les arestes.

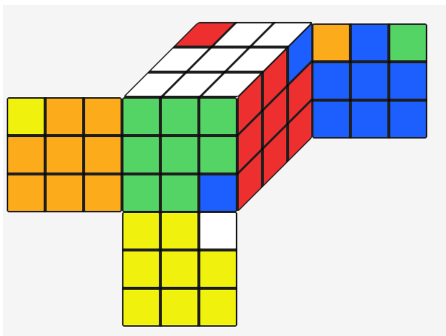
Suposem el conjunt $\mathbb{Z}_3^8$, que fa referència a l'orientació de cantonades. L'exponent és el nombre de dimensions que té el conjunt. Per exemple, si tenim $\mathbb{R}^2$, els valors d'aquest conjunt, producte cartesià de $\mathbb{R}$ es representarien en un gràfic de dues dimensions. Com el cub té 8 cantonades, escrivim $\mathbb{Z}_3^8 = \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3\, x\, \mathbb{Z}_3$, i cada subconjunt $\mathbb{Z}_3$ fa referència a les tres possibles orientacions d'una cantonada. El cardinal de $\mathbb{Z}_3^8$ el calcularem com els tres elements que té $\mathbb{Z}_3$, i aquest nombre multiplicat per si mateix 8 vegades, de manera que obtindrem el nombre d'elements totals de $\mathbb{Z}_3^8$, que és $|\, \mathbb{Z}_3^8| = \mathbf{3^8} = \mathbf{6561}$.

Si voltegem una cantonada una sola vegada en sentit horari, anomenarem a aquesta orientació $\mathbf{1}$, que és un dels tres elements de $\mathbb{Z}_3$; si la voltegem dues vegades en sentit horari, aquesta orientació es correspondrà amb l'element **2**, i si voltegem 3 vegades la cantonada, serà el mateix que no haver-la voltejat i l'orientació prendrà el valor **0**. Per exemple,, $(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \in \mathbb{Z}_3^8$ seria imatge del moviment que té com a representació el següent dibuix:


[23]

Ara, el nostre objectiu és establir una aplicació exhaustiva $\mathbf{j}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_8}\, x\, \mathbb{Z}_3^8$, i si ho aconseguim deduirem que $|\boldsymbol{G}| \geq |\boldsymbol{S_8}\, x\, \mathbb{Z}_3^8| = \mathbf{8}!\, \boldsymbol{x}\, \mathbf{3^8}$.

Totes les possibilitats que incloguin permutació i orientació de cantonades, és a dir, tots els elements de $\boldsymbol{S_8}\, x\, \mathbb{Z}_3^8$ es poden aconseguir mitjançant algun moviment del cub? Per la pràctica que porto, trobo elements que no són possibles en el cub, és a dir, que cap moviment condueix a ells. Per exemple, l'element $(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}, (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}))$ no és imatge de cap moviment, ja que la següent combinació no existeix en el cub pel fet de no poder canviar l'orientació d'una sola peça:

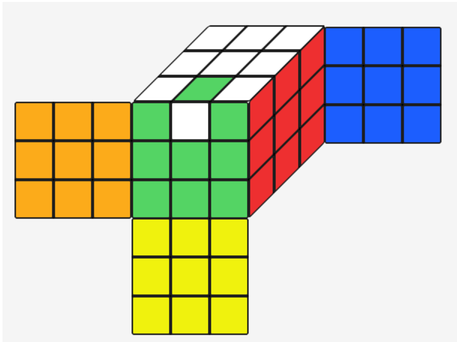

[24]

Com hem trobat un element de $\boldsymbol{S_8}\, x\, \mathbb{Z}_3^8$ que no és imatge de cap element de $\boldsymbol{G}$, l'aplicació $\mathbf{j}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_8}\, x\, \mathbb{Z}_3^8$ no és exhaustiva i no podem concloure encara que $|\boldsymbol{G}| \geq |\boldsymbol{S_8}\, x\, \mathbb{Z}_3^8| = \mathbf{8}!\, \boldsymbol{x}\, \mathbf{3^8}$.

Fem un segon intent, aquest cop amb $\mathbf{m}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_{12}}\, x\, \mathbb{Z}_2^{12}$. El conjunt $\mathbb{Z}_2^{12}$ fa referència a les dues possibles situacions d'orientació d'arestes (**mòdul 2**) i a les dotze arestes que té el cub (**dimensió 12**). Torno a trobar elements de $\boldsymbol{S_{12}}\, x\, \mathbb{Z}_2^{12}$

[23] Figura 22. Representació d'un moviment d'orientació
[24] Figura 23. Combinació impossible en el cub

que no s'aconsegueixen mitjançant cap moviment, com per exemple $\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \end{pmatrix}, (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\right)$, doncs la següent combinació en el cub és impossible:


[25]

Com hem vist, tampoc podem concloure que $|\boldsymbol{G}| \geq \left|\boldsymbol{S_{12}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_2^{12}\right| = \mathbf{12}!\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{2^{12}} = \mathbf{1.961.990.553.600}$, ja que l'aplicació $\mathbf{m}\colon \mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_{12}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_2^{12}$ no és exhaustiva.

Fem un tercer intent amb l'aplicació $\mathbf{m}\colon \mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_3^8\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{S_{12}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_2^{12}$, és a dir, el conjunt $\mathbf{G}$ amb imatge en totes les permutacions i orientacions possibles del cub. Clarament, aquesta és l'aplicació menys exhaustiva, ja que hi ha molts elements de $\boldsymbol{S_8}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_3^8\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{S_{12}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_2^{12}$ que no són imatge de cap moviment, perquè si ja existien combinacions impossibles de cantonades sense tenir en compte arestes o d'arestes sense tenir en compte cantonades, més combinacions impossibles existiran tenint en compte permutació i orientació de cantonades i arestes en un sol conjunt. Tanmateix, sí que podem dir que ens trobem davant d'una aplicació injectiva. No hi ha dos moviments diferents que tinguin la mateixa imatge, és a dir, la mateixa permutació i orientació de peces en el cub. Sí que és cert que es pot arribar a la mateixa situació mitjançant moviments que a primera vista semblen diferents, però en aquest cas, els moviments seran els mateixos, expressats d'una manera o una altra. Quan vam veure la teoria de grups aplicada al Cub de Rubik, vam posar un exemple que demostrava que hi ha maneres diferents de representar un mateix moviment, element del conjunt, ja que hi ha seqüències diferents de girs que fan el mateix efecte.

Com que l'aplicació $\mathbf{m}\colon \mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_3^8\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{S_{12}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_2^{12}$ és injectiva, podem concloure que en el conjunt d'arribada hi haurà, com a mínim, el nombre d'elements que hi ha en el conjunt de partida, ja que no poden existir dos elements del primer conjunt amb la mateixa imatge.

[25] Figura 24. Combinació impossible en el cub

$$|G| \leq \left| S_8 \, x \, \mathbb{Z}_3^8 \, x \, S_{12} \, x \, \mathbb{Z}_2^{12} \right| = 8! * 3^8 * 12! * 2^{12} = 519.024.039.293.878.272.000$$

5.3. CONCRECIÓ DEL CARDINAL DE G

Ara sabem que $|G| \geq |S_{12}|$ i que $|G| \leq \left| S_8 \, x \, \mathbb{Z}_3^8 \, x \, S_{12} \, x \, \mathbb{Z}_2^{12} \right|$, amb la qual cosa concloem que $12! \leq |G| \leq 8! * 3^8 * 12! * 2^{12}$. Ja coneixem el rang en què se situa el cardinal de G, però ara hem de concretar-lo. Moltes de les aplicacions exhaustives que hem intentat establir durant la investigació no han tingut èxit perquè hi havia permutacions que no s'aconseguien mitjançant cap moviment del cub. Si traiem tots els elements de $S_8 \, x \, \mathbb{Z}_3^8 \, x \, S_{12} \, x \, \mathbb{Z}_2^{12}$ que no són imatge de cap element de G, obtindrem el recorregut de la funció, és a dir, tots els elements de $S_8 \, x \, \mathbb{Z}_3^8 \, x \, S_{12} \, x \, \mathbb{Z}_2^{12}$ que sí que són imatge d'algun element de G. A aquest conjunt que tingui únicament els elements que siguin imatge l'anomenarem $K \subseteq S_8 \, x \, \mathbb{Z}_3^8 \, x \, S_{12} \, x \, \mathbb{Z}_2^{12}$. L'aplicació $\mathbf{G} \to \mathbf{K}$ serà bijectiva, doncs ja era injectiva abans de restringir elements, i com només pertanyeran a $\mathbf{K}$ els elements del recorregut, també serà una aplicació exhaustiva. El cardinal de $\mathbf{K}$, per tant, serà igual al cardinal de $\mathbf{G}$. El que hem de fer doncs, és trobar $|K|$. Si ho aconseguim, esbrinarem tots els moviments i, per tant, combinacions diferents que té el Cub de Rubik.

5.3.1. TEOREMA FONAMENTAL DEL CUB DE RUBIK

Expressarem cada element de $\mathbf{K}$ mitjançant una permutació de S_8 que anomenarem $r \in S_8$, vuit elements de $\mathbb{Z}_3$ els quals podran prendre valors $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ o $\mathbf{2}$ i que representarem amb el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_8) \in \mathbb{Z}_3^8$, una permutació de S_{12} que anomenarem $s \in S_{12}$, i dotze elements de $\mathbb{Z}_2$ que podran prendre els valors **0** i **1** i que representarem mitjançant el vector $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_{12}) \in \mathbb{Z}_2^{12}$. Per exemple, un element de $\mathbf{K}$ expressat per la configuració $(\mathbf{r}, \vec{v}, \mathbf{s}, \vec{w})$ podria ser

$$(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}, (0,1,1,1,0,0,2,1),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 9 & 11 & 10 & 12 \end{pmatrix}, (0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,0)) \in \mathbf{K}$$

Segons el teorema matemàtic fonamental del Cub de Rubik, diem que un element de $S_8 \, x \, \mathbb{Z}_3^8 \, x \, S_{12} \, x \, \mathbb{Z}_2^{12}$ pertany al conjunt $\mathbf{K}$ i, per tant, és "vàlid", sempre i quan es compleixin les tres condicions que explicaré a continuació.

La primera condició perquè un element sigui "vàlid" és que el sumatori dels elements de $\mathbb{Z}_3^8$ sigui igual a $\mathbf{0}$, és a dir, $\sum_{i=1}^{8} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 0 \; (m\grave{o}dul \; 3)$.

La segona és que el sumatori dels elements de $\mathbb{Z}_2^{12}$ també sigui igual a $\mathbf{0}$, és a dir, $\sum_{i=1}^{12} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12} = \mathbf{0}\ (m\grave{o}dul\ 2)$.

La tercera condició del teorema és que la signatura de r sigui igual a la de s , és a dir, $sgn(r) = sgn(s)$, i per entendre aquesta condició tractarem d'explicar alguns conceptes.

5.3.2. LA SIGNATURA D'UNA PERMUTACIÓ

La signatura d'una permutació, també anomenada paritat, està relacionada amb el nombre de transposicions amb el qual es descompon aquesta permutació. Diem que la signatura és parella quan la permutació s'escriu com a composició d'un nombre parell de transposicions. Per contra, si s'escriu com a composició d'un nombre senar de transposicions, diem que la signatura és senar.

Sabem que totes les permutacions de S_8 es poden desenvolupar en producte de transposicions, i podem dir també que les transposicions no són úniques, és a dir, que hi ha transposicions diferents les quals es poden compondre per donar la mateixa permutació, i això ho podem comprovar en el següent exemple:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Però en canvi, la paritat del nombre de transposicions sí que és única, és a dir, si aconseguim descompondre una determinada permutació mitjançant un nombre parell de transposicions, totes les diferents descomposicions d'aquesta mateixa permutació tindran també un nombre parell de transposicions; anàlogament, si una determinada permutació es pot descompondre en un nombre senar de transposicions, totes les diferents descomposicions d'aquesta mateixa permutació tindran també un nombre senar de transposicions. La paritat és una propietat intrínseca de la permutació que no depèn de com la descomponem.

5.3.3. DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA FONAMENTAL

Per demostrar que aquestes tres condicions són necessàries necessitem confirmar que tots els moviments existents al cub amb imatge $(\mathbf{r}, \vec{v}, \mathbf{s}, \vec{w})$ les compleixen.

Com tots els moviments del cub procedeixen de moviments elementals, és a dir, es construeixen mitjançant la composició d'aquests, si demostrem que les tres condicions són necessàries per a tots els moviments elementals, haurem demostrat que també ho són per a la resta de moviments.

Les dues primeres condicions del teorema es compleixen en qualsevol moviment elemental, i ho observem clarament executant qualsevol d'ells al cub, ja que veiem que després de realitzar el moviment, l'orientació de les cantonades i de les arestes no canvia. Per exemple, si apliquem el moviment $\mathbf{U'}$ sobre un cub resolt, la permutació de cantonades i arestes sí que varia, però l'orientació de cadascuna de les peces segueix prenent el valor $\mathbf{0}$, amb la qual cosa, tant el sumatori dels elements de $\mathbb{Z}_3^8$, com el dels de $\mathbb{Z}_2^{12}$ continua sent $\mathbf{0}$.

Per a comprovar la tercera condició, trio el moviment $\mathbf{U'}$ del cub i, tot seguit, em fixo en la imatge que presenta en l'aplicació $\mathbf{f}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_8}$ i en $\mathbf{g}\colon \mathbf{G} \to \boldsymbol{S_{12}}$. L'element de $\boldsymbol{S_8}$ que és imatge d'$\mathbf{U'}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, , i si l'intento descompondre en transpoicions trobo que una opció és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Observo que he aconseguit descompondre la permutació $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ en un nombre senar de transposicions. Si ara miro la imatge en $\boldsymbol{S_{12}}$, l'efecte que causa és el mateix, de tal manera que la permutació també es podrà descompondre en un nombre senar de transposicions, com ara $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. Per al moviment $\mathbf{U'}$ es compleix la tercera condició, ja que tant la signatura de la permutació d'arestes com la de cantonades és imparella, i com tots els moviments elementals causen el mateix efecte sobre les peces, només cal haver comprovat la condició amb el moviment $\mathbf{U'}$ per afirmar que qualsevol moviment elemental del cub tindrà com a imatge una permutació de cantonades i una permutació d'arestes que es puguin descompondre cadascuna d'elles en un nombre senar de transposicions.

Per això, com a curiositat, l'única combinació no possible pel que fa a la permutació del cub és la transposició de dues peces, ja que **1** és un nombre senar i això indicaria que la signatura de la permutació d'arestes i la de permutació de cantonades no són del mateix tipus. Tot i que és cert que hi ha combinacions impossibles que a primera vista semblen permutacions majors que una transposició, si realment són impossibles, totes elles es podran reduir a una transposició d'arestes o de cantonades aplicant moviments que sí tinguin una imatge de permutació.

Per exemple, jo sé que no hi ha un moviment que realitzi el parell de permutacions
$(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \end{pmatrix}),$
i com observem, això no és una transposició. Tanmateix, sí que ho podem reduir mitjançant algun moviment al cas impossible, per exemple amb **R’DR’U2RD’R’U2R2**. D'aquesta manera, aplicant el moviment sobre el cub barrejat amb l'anterior parella de permutacions, se'ns presentaria al cub $(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \end{pmatrix}),$
que sí que és una parella de transposició de cantonades i identitat.

Afirmem doncs, que les tres condicions del teorema són necessàries, perquè es compleixen en qualsevol moviment elemental del cub i, la resta de moviments, per molt complexos que siguin, es poden obtenir com a composició dels moviments elementals.

Ara que ja entenem el que diu el teorema i el motiu pel qual ho diu, escollirem a l'atzar alguns elements de $\boldsymbol{S_8} \; \boldsymbol{x} \; \mathbb{Z}_3^8 \; \boldsymbol{x} \; \boldsymbol{S_{12}} \; \boldsymbol{x} \; \mathbb{Z}_2^{12}$ i comprovarem si compleixen les tres condicions i, en conseqüència, podrien pertànyer a $\mathbf{K}$.

Seria l'element $(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}, (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{1}),$
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \end{pmatrix}, (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}))$
“vàlid”? Segons la primera condició, aquest element podria ser "vàlid", ja que si fem la suma $\mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{6}$ i dividim el resultat entre tres, no obtenim residu, és a dir, l'element $\mathbf{6}$ es representa com $\mathbf{0}$ a $\mathbb{Z}_3$. La segona condició també es compleix, ja que $\mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{4}$, i si dividim aquest valor entre el mòdul, la resta de la divisió val cero, amb la qual cosa, l’element $\mathbf{4}$ es representaria com $\mathbf{0}$ a $\mathbb{Z}_2$. Tanmateix, la tercera

condició del teorema no es compleix. La signatura de la permutació de cantonades és senar, ja que la permutació és ja una única transposició, i en canvi, la signatura de la permutació d'arestes és parella, ja que per aconseguir aquesta permutació puc compondre, per exemple, una mateixa transposició dues vegades. Com $\boldsymbol{sgn(r) \neq sgn(s)}$, l'element que acabem d'analitzar no pertany a $\mathbf{K}$ i, per tant, no és imatge de cap moviment del cub.

Seria en canvi l'element $(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}, (\mathbf{0,0,0,0,0,0,0,0}),$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \end{pmatrix}, (\mathbf{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0})$ "vàlid"? Totes les peces del cub estan en la seva orientació correcta i, per això, tant el sumatori dels elements de $\mathbb{Z}_3^8$ com el de $\mathbb{Z}_2^{12}$ resulta ser $\mathbf{0}$. Les dues primeres condicions del teorema es compleixen. La tercera condició també és certa per a aquest element, ja que la permutació d'arestes és la mateixa que en l'exemple anterior, on ja vam veure que la signatura era parell, i la signatura de la permutació de cantonades torna a ser parell, ja que jo puc aconseguir aquesta permutació per la composició, respectivament, de les transposicions $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$. En complir, l'element, les tres condicions que diu el teorema, podria pertànyer a $\mathbf{K}$ i, per tant, ser imatge d'algun moviment de $\mathbf{G}$.

Ara bé, ¿que compleixi un element les tres condicions del teorema significa que pertanyi estrictament a $\mathbf{K}$? Hem demostrat que si falla alguna de les tres, l'element no és imatge de cap moviment de $\mathbf{G}$, però ara hem de demostrar que si les tres condicions es compleixen aquest element segur que pertany a $\mathbf{K}$ i, en conseqüència, és imatge, d'almenys, un moviment del cub.

La pregunta que ens farem és: "Donat $(\mathbf{r}, \vec{\boldsymbol{v}}, \mathbf{s}, \vec{\boldsymbol{w}})$ complint les tres condicions del teorema, per què hi ha un moviment de $\mathbf{G}$ que el realitza?" I per respondre-la, farem les convenients demostracions "anant cap enrere", és a dir, a partir d'una configuració $(\mathbf{r}, \vec{\boldsymbol{v}}, \mathbf{s}, \vec{\boldsymbol{w}})$ buscarem un moviment que porti al cub resolt, o dit d'una altra manera, a l'element $(\textbf{identitat}, (\mathbf{0,0,0,0,0,0,0,0}), \textbf{identitat}, (\mathbf{0,0,0,0,0,0,0, 0, 0, 0, 0, 0}))$. D'altra banda, com el teorema és el resultat de diversos lemes matemàtics, anirem anomenant i demostrant cada un d'ells de manera ordenada.[26]

[26] Nota: tots els lemes del teorema estan extrets dels apunts que vaig agafar en una de les entrevistes amb el professor Enric Ventura de la *Facultat de Matemàtiques i Estadística* de la UPC.

Lema 1

El primer lema del teorema diu que, "donat $(\mathbf{r}, \vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{s}, \vec{\boldsymbol{w}})$ complint las tres propietats, existeix un moviment $\boldsymbol{M_1}$ que el transforma en $(\mathbf{identitat}, \vec{\boldsymbol{v}}', \boldsymbol{s}', \vec{\boldsymbol{w}}')$", considerant la cometa anomenada "prima" com a indicació d'un altre element diferent dins de les possibilitats que hi ha.
Com l'aplicació $\mathbf{f}\colon \mathrm{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8}$ és exhaustiva tal com vam demostrar anteriorment, qualsevol permutació de $\boldsymbol{S_8}$ procedeix d'algun moviment, de manera que si partim de $(\mathbf{r}, \vec{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{s}, \vec{\boldsymbol{w}})$ i busquem un moviment que comporti a la identitat de permutació de cantonades, sense tenir en compte res més, sempre hi haurà algun. Afirmem doncs, que hi ha un moviment $\boldsymbol{M_1}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M_1}) = \boldsymbol{r}^{-1}$, i llavors $(\mathbf{r}, \vec{\boldsymbol{v}}, \mathbf{s}, \vec{\boldsymbol{w}}) * \boldsymbol{M_1} = (\mathbf{identitat}, \vec{\boldsymbol{v}}', \mathbf{s}', \vec{\boldsymbol{w}}')$.

Lema 2

El segon lema diu que "per cada dues cantonades del cub hi ha un moviment $\boldsymbol{M_2}$ que canvia les seves orientacions (no la posició) i no afecta cap altra cantonada".

Per demostrar el lema anterior, hem de trobar un moviment que resolgui totes les possibilitats diferents d'orientació de dues cantonades del cub, que són tres, ja que en ser el cub simètric, aquestes es van traslladant a la resta de les cantonades. Els tres casos possibles són: $(\mathbf{1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0})$, $(\mathbf{1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0})$, $(\mathbf{1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0})$ i alguns dels moviments que trobo per resoldre'ls són, respectivament: **UL'U2LUL'ULRU2R'U'RU'R'U'**, **URU'L'UR'U'RUR'U'LURU'R'**, **L'UR'U2L'D'LUL'DL2URU'**.

Lema 3

El tercer lema indica que, "si $(\mathbf{identitat}, \vec{\boldsymbol{v}}', \boldsymbol{s}', \vec{\boldsymbol{w}}')$ compleix les tres condicions del teorema, llavors existeix un moviment $\boldsymbol{M_3}$ tal que $(\mathbf{identitat}, \vec{\boldsymbol{v}}', \boldsymbol{s}', \vec{\boldsymbol{w}}') * \boldsymbol{M_3} = (\mathbf{identitat}, \vec{\mathbf{0}}, \mathbf{s}'', \vec{\boldsymbol{w}}'')$", considerant el vector $\vec{\mathbf{0}}$ com el format pels vuit elements de $\mathbb{Z}_3^8$ amb valor $\mathbf{0}$.

Per demostrar-lo, trio dues cantonades que tinguin un valor d'orientació diferent a $\mathbf{0}$, és a dir, que no estiguin en la seva orientació correcta. Aplicant el segon lema un o diversos cops segons necessiti, almenys una de les dues cantonades acabarà ben orientada si aplico el moviment corresponent, és a dir, que "a priori" se'ns podrien presentar les situacions $(\mathbf{identitat}, \vec{\mathbf{0}}, \boldsymbol{s}'', \vec{\boldsymbol{w}}'')$ ó $(\mathbf{identitat}, \boldsymbol{set}\ \mathbf{0}\ \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{un}\ \mathbf{1}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{un}\ \mathbf{2},\ \mathbf{s}'', \vec{\boldsymbol{w}}'')$, però com partim de suposar la primera condició del teorema i, per tant, el sumatori dels elements de $\mathbb{Z}_3^8$ és igual a $\mathbf{0}$, aquesta segona opció és impossible.

Lema 4

Establim l'aplicació $\mathrm{H} \to \boldsymbol{S_{12}}$, considerant H com el subconjunt pertanyent a G de tots els moviments del cub que no varien la posició i orientació de les cantonades. Clarament, aquesta no és una aplicació exhaustiva, ja que hi ha permutacions d'arestes que no s'aconsegueixen mitjançant moviments que no canviïn també alguna cantonada, com ara la transposició de dues arestes, que únicament es pot aconseguir intercanviant també dues cantonades.

El quart lema del teorema diu que "la imatge de $\mathrm{H} \to \boldsymbol{S_{12}}$ és $\boldsymbol{A_{12}} \subseteq \boldsymbol{S_{12}}$, sent $\boldsymbol{A_{12}}$ el conjunt de tots els elements de $\boldsymbol{S_{12}}$ que es descomponen en un nombre parell de transposicions".

Per demostrar-lo, sigui $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{A_{12}}$, és a dir, $\in \boldsymbol{S_{12}}$ i descomponible en un nombre parell de transposicions, $\boldsymbol{\sigma} = \big((\boldsymbol{trs1}) * (\boldsymbol{trs2})\big) * \big((\boldsymbol{trs3}) * (\boldsymbol{trs4})\big) *$ ... Si trobem totes les possibilitats d'agrupar parelles de transposicions de $\boldsymbol{S_{12}}$, totes elles seran de $\boldsymbol{A_{12}}$ i, component-les, podrem aconseguir qualsevol permutació de $\boldsymbol{A_{12}}$. El que ens caldrà serà buscar un moviment que solucioni cadascuna d'aquestes diferents transposicions i, llavors, haurem demostrat el quart lema del teorema. N'hi haurà prou amb realitzar les parelles de transposicions amb un punt en comú, ja que la resta es poden anar traslladant en el cub i seran les mateixes. La llista de commutadors d'arestes exposada en els annexos mostra exemples de moviments que resolen cadascuna de les diferents possibilitats de parelles de transposicions amb l'aresta 9 en comú i que, per tant, component aquestes dues transposicions, s'aconsegueix un 3-cicle (una permutació de tres elements). La llista de commutadors esmentada representaria el doble de permutacions necessàries per demostrar el lema, ja que els moviments que vaig trobar tenien en compte l'orientació de les corresponents arestes, doncs la seva finalitat, com veurem futurament, era resoldre el cub a cegues de manera efectiva.

Lema 5

El cinquè lema indica que "si $(\mathbf{identitat}, \vec{\mathbf{0}}, \mathbf{s''}, \vec{\boldsymbol{w}}'')$ compleix les tres condicions necessàries del teorema, llavors hi ha un moviment $\boldsymbol{M_4}$ tal que $(\mathbf{identitat}, \vec{\mathbf{0}}, \mathbf{s''}, \vec{\boldsymbol{w}}'') * \boldsymbol{M_4} = (\mathbf{identitat}, \vec{\mathbf{0}}, \mathbf{identitat}, \vec{\boldsymbol{w}}'')$".

Per demostrar l'anterior lema, ens fixem en què $\mathbf{s''}$, en complir les tres condicions necessàries, s'ha de descompondre en un nombre parell de transposicions, ja que si $\boldsymbol{sgn}(\boldsymbol{identitat}) = \boldsymbol{sgn}(\boldsymbol{s''})$ i sabem que la signatura de la identitat és parella, la signatura de $\mathbf{s''}$ serà parella a la força. Per tant, sabent que la seva signatura és parella i aplicant el quart lema, demostrem el cinquè lema, ja que podem resoldre qualsevol permutació d'arestes que tinguem.

Lema 6

El sisè lema diu que "per cada dues arestes existeix un moviment $\boldsymbol{M_5}$ que canvia la seva orientació i no fa variar res més en tot el cub".

Si agafem totes les possibilitats diferents d'orientació de dues arestes en el cub i trobem un moviment que les resolgui, haurem demostrat el lema. Les quatre possibilitats diferents són: $\mathbf{(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)}$, $\mathbf{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)}$, $\mathbf{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)}$ i $\mathbf{(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)}$, i quatre moviments que trobo que les resolguin són, per exemple: **Rw U R' U' Rw' U2 R U R U' R2 U2 R**, **M U' M U' M U2 M' U' M' U' M' U2**, **M B' M B2 M' B' M' B' M' B2 M B'**, **B M B' M B2 M' B' M' B' M' B2 M B2**, respectivament.

Lema 7

Para acabar, el setè i últim lema indica que, "si $\mathbf{(identitat, \vec{0}, identitat, \vec{w}''')}$ compleix les tres condicions necessàries, llavors existeix un moviment $\boldsymbol{M_6}$ tal que $\mathbf{(identitat, \vec{0}, identitat, \vec{w}''')} * \boldsymbol{M_6} = \mathbf{(identitat, \vec{0}, identitat, \vec{0})}$".

Com suposem que es compleixen les tres condicions, el sumatori dels elements de $\vec{\boldsymbol{w}}'''$ ha de ser $\mathbf{0}$. Amb la qual cosa, no pot haver-hi un nombre senar d'arestes a orientar, ja que llavors, el sumatori resultaria en 1. Aplicant el sisè lema, podrem reorientar las arestes de dos en dos mitjançant moviments determinats, fins a obtenir finalment el cub resolt.

5.3.4. EXTRACCIÓ DELS ELEMENTS QUE NO COMPLEIXEN EL TEOREMA I VALOR DEL CARDINAL DE G

L'únic que ens queda per investigar és quants elements no compleixen les tres condicions del teorema. Així, esbrinarem el valor del cardinal de $\mathbf{K}$ extraient aquests elements que no pertanyen al conjunt, i l'aplicació passarà de ser injectiva a ser injectiva i exhaustiva, és a dir, bijectiva. Llavors, deduirem que $|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{K}|$.

La primera condició del teorema la compliran una tercera part dels elements, ja que cada cantonada té tres possibilitats d'orientació, i $\sum_{i=1}^{8} \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_4} + \boldsymbol{v_5} + \boldsymbol{v_6} + \boldsymbol{v_7} + \boldsymbol{v_8}$ podrà valdre **0**, **1** o **2**, de manera que només ens quedarem amb els que compleixin $\sum_{i=1}^{8} \boldsymbol{v_i} = \mathbf{0}$.

Per extreure els elements que no compleixen la segona condició, haurem de dividir entre dos, ja que cada aresta té dues possibilitats diferents d'orientació i $\sum_{i=1}^{12} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12}$ pot valdre **0** o **1**, però només són vàlids aquells elements els quals $\sum_{i=1}^{12} v_i = \mathbf{0}$.

Finalment, la tercera condició del teorema la compliran la meitat dels elements de $S_8 \; x \; \mathbb{Z}_3^8 \; x \; S_{12} \; x \; \mathbb{Z}_2^{12}$, ja que hi ha quatre possibilitats pel que fa a la paritat: que tant la d'arestes com la de cantonades sigui parella, que ambdues siguin senars, que la d'arestes sigui parella i la de cantonades senar, i viceversa. Compliran la tercera condició únicament els elements la paritat de cantonades i d'arestes dels quals correspongui amb un dels dos primers casos, és a dir, el 50% dels elements. Haurem de dividir $S_8 \; x \; \mathbb{Z}_3^8 \; x \; S_{12} \; x \; \mathbb{Z}_2^{12}$ entre 2 per extreure els elements que no compleixen la tercera condició.

Si extraiem els elements que no pertanyen a K obtenim que:

$$|G| = |K| = \frac{8! * 3^8 * 12! * 2^{12}}{2 * 3 * 2} = 43.252.003.274.489.856.000$$

Concloem, després de tota aquesta investigació, que el Cub de Rubik té, exactament, $\mathbf{43.252.003.274.489.856.000}$ possibilitats diferents de combinació.

6. OPTIMITZACIÓ D'UN MÈTODE PER RESOLDRE EL CUB DE RUBIK A CEGUES

6.1. INTRODUCCIÓ

El que intentaré exposar a continuació és la meva investigació fins a aconseguir, no només resoldre el cub a cegues, sinó una optimització d'aquest mètode que em permetés rapidesa i efectivitat. Per a això, calia trobar la manera idònia de complementar dues qüestions principals. La primera era la realització del mínim nombre de moviments possibles. Amb això, aconseguiria l'esmentada rapidesa. La segona qüestió era la recerca d'aquests moviments de manera que les peces que permutessin fossin les mínimes possibles. Amb això aconseguiria que la memorització del cub, per a la posterior resolució, fos efectiva, ja que si es realitzen moviments que permuten gran nombre de peces, la imatge del cub canvia més del que és estrictament necessari, la qual cosa dificulta una correcta resolució. A menys peces involucrades en la permutació, més controlable és la seva resolució.

6.2. PRIMER OBJECTIU: RESOLDRE EL CUB A CEGUES

El meu inici amb la investigació es va centrar en la segona qüestió: buscar permutacions que canviessin les mínimes peces del cub. Tal com vam veure anteriorment en la trajectòria fins a trobar el cardinal de $\mathbf{G}$, les transposicions són permutacions que canvien únicament dos elements, i component les transposicions d'un mateix conjunt s'aconsegueix qualsevol permutació de dit conjunt. Les transposicions eren l'eina que jo necessitava per dissenyar un primer mètode, potser una mica lent, però que em permetés el meu primer objectiu: resoldre el cub a cegues.

Vaig començar amb la resolució de cantonades. Tal com vam veure, en el conjunt $\boldsymbol{S_8}$ hi ha tres transposicions diferents. A la recerca del cardinal de $\mathbf{G}$, a part de trobar aquestes transposicions, vaig trobar un moviment del qual provenia cadascuna. Ara, el que havia de fer era buscar una manera senzilla de resoldre el cub utilitzant com a base els moviments de $\mathbf{G}$ que tenien com a imatge una de les tres transposicions de $\boldsymbol{S_8}$, i així, amb ajuda de conjugacions[27], podria resoldre qualsevol permutació de cantonades.

Investigant una bona tècnica per memoritzar el cub i fent servir el sistema d'execució plantejat - adaptat també per a arestes -, podia arribar a confeccionar un mètode que em permetés resoldre el cub a cegues, i aquest era el primer pas que necessitava per poder investigar més endavant mètodes més efectius.

6.3. PRIMER ÈXIT DE RESOLUCIÓ A CEGUES

6.3.1. RESOLUCIÓ DE CANTONADES AMB EL MÈTODE "OLD POCHMANN"

Va ser llavors quan vaig descobrir un mètode que s'adaptava al que jo volia.

L'anomenat mètode d'*Old Pochmann* de resolució de les cantonades del cub consisteix en jugar amb l'efecte que causa el moviment **RU'R'U'RUR'F'RUR'U'R'FR**

[27] El recurs de la conjugació en el cub consisteix en realitzar un o diversos moviments elementals per portar determinades peces a una posició que ens interessi, fer a continuació un algoritme específic que permuti o orienti unes peces específiques i, a continuació, desfer els moviments de la conjugació executant els inversos (desconjugació). D'aquesta manera, podem intercanviar molt poques peces en el cub, ja que encara que els moviments de la conjugació poden alterar la posició de gran nombre de peces, després aquests es retrocedeixen i només es veuen afectats el nombre de peces que canviava l'algoritme. L'estructura de tot el procés seria $\boldsymbol{YXY^{-1}}$.

en la aplicació $\mathbf{m}$: $\mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S_8}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_3^8\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{S_{12}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbb{Z}_2^{12}$ per canviar la resta de les cantonades amb ajut de conjugacions. La imatge del moviment resulta en $(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0,$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

A continuació, explico el mètode detalladament.

Anomenarem a l'adhesiu **UBL** recambra, ja que serà la cantonada guia que ens indicarà la següent cantonada a permutar, i **RFD** serà el nostre adhesiu destí, és a dir, serà a on conjugarem la cantonada que ens interessi per ser permutada. La conjugació ha de tenir com a condició la no alteració de la peça **4** en quant a la seva permutació i orientació, ja que aquesta és una de les dues peces que canvien en la transposició i és la que fem servir com a recambra.

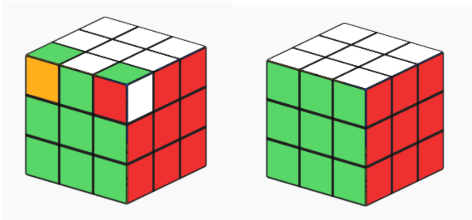
El procés començarà fixant-nos en l'adhesiu recambra. Si no està en la posició correcta mirarem a quina posició l'hem de permutar. Si per exemple veiem que hauria d'estar a l'adhesiu **UBR**, portarem l'adhesiu que hi hagi en aquesta posició mitjançant una conjugació a la posició de destí, realitzarem un moviment que tingui com a imatge $(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}, (0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0),$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0))$, que com vam veure anteriorment en la recerca del cardinal de $\mathbf{G}$, un dels més ràpids és: **RU'R'U'RUR'F'RUR'U'R'FR** i, finalment, desfarem la conjugació. D'aquesta manera, haurem permutat l'adhesiu recambra amb l'adhesiu **UBR** i, per tant, ja tindrem la primera cantonada col·locada a la posició que li correspongui. Amb el mateix procediment acabarem permutant la resta de cantonades del cub.

Les conjugacions per portar la peça a permutar a l'adhesiu destí són molt deductives i hi ha moltes opcions diferents, però per evitar equivocacions és bo buscar un exemple de cadascuna i practicar-les moltes vegades fins a automatitzar-les. A continuació, exposo les millors conjugacions de cada adhesiu de cantonades a l'adhesiu **RFD** que vaig trobar a l'iniciar-me amb aquest mètode.

INICI	DESTÍ	CONJUGACIÓ
RFD	RFD	-
DFR	RFD	R’ D’
FRD	RFD	D R
FLD	RFD	D
DFL	RFD	F’
LFD	RFD	D2 R
BDL	RFD	D’ R
DBL	RFD	D F’
LBD	RFD	D2 R
RBD	RFD	R
BDR	RFD	D’
DBR	RFD	R2 F
UBR	RFD	R’ D’
BRU	RFD	R’ F
RBU	RFD	R2
RFU	RFD	R’
FRU	RFD	F2 D
UFL	RFD	F R’
LFU	RFD	F2
FLU	RFD	F’ D

És possible que en algun moment ens trobem en la posició de recambra l'adhesiu que li correspon. Aquest ja és al seu lloc correcte i, per tant, no l'hem de permutar. Com seguim amb el procediment si fèiem servir com a guia aquest adhesiu? El que podem fer és escollir un altre adhesiu de cantonades del cub que no estigui al seu lloc, portar-lo a la posició destí amb la corresponent conjugació i intercanviar-lo amb la recambra. D'aquesta manera, ja tindrem un nou adhesiu per permutar a la recambra i podrem seguir amb el procediment habitual.

Una altra circumstància possible és que no totes les cantonades del cub s’hagin de permutar, ja que algunes poden estar en la seva posició correcta, i en aquest cas podran estar ben orientades o no. En les següents dues imatges observem com els dos cubs tenen ben permutades les cantonades **1** i **2**, però l'orientació que aquestes tenen en cada cub és diferent.

 [28]

En el primer cas, hauríem d'orientar les dues cantonades en sentit oposat (la cantonada **1** en sentit horari i la **2** en sentit anti horari) i, en el segon cas, les cantonades ja estan en l'orientació correcta. A aquest tipus de peces les anomenarem inactives, ja que no es permuten i, per tant, no es veuen involucrades, però algunes sí que requereixen d'un moviment per col·locar-se en la seva correcta orientació.

De possibilitats diferents de cantonades inactives hi ha moltíssimes. Ens podem trobar des de zero fins a vuit inactives en les cantonades d'un cub a resoldre (excloent una sola cantonada, que ja vam veure que era un cas impossible segons el teorema fonamental), i aquestes poden tenir dos sentits diferents d'orientació. Per a cada cas, existiran també molts algoritmes que les resolguin, però de moment, podem fer servir únicament una seqüència formada pels quatre moviments simples **R 'D' R D** que, jugant amb ella, ens permetrà acabar orientant el que vulguem. Més endavant, veurem en un exemple pràctic com utilitzar aquesta seqüència per orientar cantonades. Òbviament, és un procediment més lent, però per al primer objectiu era suficient. Posteriorment, ja vaig haver d'investigar i aprendre desenes d'algoritmes d'orientació per aconseguir velocitat, tal com explicaré en les properes pàgines del treball.

6.3.2. RESOLUCIÓ D'ARESTES AMB EL MÈTODE M2

Per aconseguir resoldre les arestes a cegues, la idea bàsica és la mateixa que amb el mètode per cantonades. Del que es tracta és de realitzar moviments que permutin el mínim nombre de peces possibles perquè la posició del cub barrejat que haguem memoritzat prèviament amb prou feines es modifiqui. I per a això, existeix un mètode anomenat **M2** que vaig descobrir dialogant en una competició de Cub de Rubik de Saragossa.

Ara, la nostra posició recambra és **DF** i la nostra posició destí, **UB**. Per intercanviar aquests dos adhesius podrem fer servir un algoritme molt senzill: **M2**. El procediment doncs, a excepció dels adhesius de la capa intermèdia **M**, consistirà en enviar mitjançant una conjugació l'adhesiu a permutar a l'adhesiu **UB**, realitzar l'algoritme **M2** i desfer la conjugació. Estrictament, la conjugació

[28] Figura 25. Exemple de diferents orientacions

que realitzem no podrà alterar la capa **M**, ja que és on es troben els nostres dos adhesius clau (recambra i destí). Els adhesius **UF, FU, DB** i **BD**, en ser impossible realitzar el procediment habitual amb ells pel fet de ser la seva posició correcta una de la capa intermèdia **M**, requeriran d'un algoritme propi per permutar-se fins a la seva correcta posició. A la següent taula mostro les millors conjugacions i algoritmes que vaig trobar a l'iniciar-me en aquest mètode:

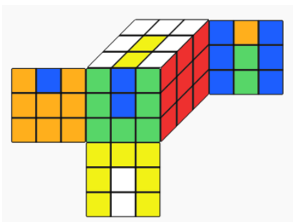
INICI	DESTÍ	CONJUGACIÓ	ALGORITME
FL	UB	U’ R U	-
LF	UB	B L2 B’	-
RF	UB	B’ R2 B	-
FR	UB	U R U’	-
BR	UB	U R’ U’	-
RB	UB	Uw R Uw’	-
BL	UB	U’ L U	-
LB	UB	Uw R’ Uw’	-
UL	UB	L’ U’ L’ U	-
LU	UB	B L’ B’	-
UR	UB	R’ U R U’	-
RU	UB	B’ R B	-
LD	UB	B R’ B’	-
DL	UB	U’ L2 U	-
RD	UB	B’ R’ B	-
DR	UB	U R2 U’	-
DF	UB	-	M2
DF	BU	-	R’ U R U’ Uw R Uw’ M2 Uw R’ Uw’ U R’ U’ R
DF	UF	-	U2 M’ U2 M’
DF	FU	-	D M’ U R2 U’ M U R2 U’ D’ M2
DF	BD	-	M2 D U R2 U’ M’ U R2 U’ M D’
DF	DF	-	M U2 M U2

L'únic inconvenient que ens trobem amb aquest mètode són els efectes secundaris que causa la realització de l'algoritme **M2**. Tal com ens interessa, a l'executar aquest moviment, els adhesius **DF** i **UB** queden intercanviats. No obstant, no són els únics que es permuten. La imatge del moviment **M2** en S_{12} és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 2 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 10 & 1 & 12 \end{pmatrix}$, de tal manera que també es veuen afectades les peces **1** i **11**. En executar un nombre parell de vegades l'algoritme **M2** des d'un cub resolt, observem com els efectes s'anul·len i el cub segueix resolt. Anàlogament, si realitzem un nombre senar de llançaments i, per tant, un nombre senar de vegades l'algoritme **M2**, la capa intermèdia **M** quedarà desajustada, de manera que els adhesius que en teoria es troben en les posicions **UF, FU, DB** i **BD** es trobaran ara en la posició oposada, és a dir, l'adhesiu **UF** es trobarà al **DB**, el **DB** al **UF**, el **FU** al **BD**, i el **BD** al **FU**. Això voldrà dir que abans d'executar un algoritme per a permutar una de les peces de la capa intermèdia **M**, haurem de pensar si la capa està desajustada o no i, en cas afirmatiu, executar l'algoritme que correspon amb l'adhesiu oposat.

Per orientar les peces inactives d'arestes que tinguem, només caldrà aprendre'ns un algoritme que orienti dues arestes qualssevol, perquè com ja vam veure en l'estudi del teorema fonamental del cub, no existeix el cas d'orientació d'un nombre imparell d'arestes, amb la qual cosa, en tots els casos d'arestes a permutar que tinguem, podrem agrupar de dos en dos per executar l'algoritme que ens sabem, i podrem utilitzar el recurs de la conjugació per portar les dues peces a orientar a la posició que exigeixi aquest algoritme . L'algoritme més pràctic per utilitzar és el que orienta dues arestes enfrontades, que com ja vam veure anteriorment és: **M U' M U' M U2 M' U' M' U' M' U2.**

6.3.3. RESOLUCIÓ DE LA SIGNATURA SENAR

Els algoritmes que feia servir de base per a permutar cantonades i arestes no només intercanvien les dues peces que ens interessen. En el cas de l'algoritme per cantonades, a part de permutar les peces **4** i **6**, també permuta les arestes **3** i **4**, i en el cas de l'algoritme per arestes, a l'executar-lo, totes les peces de la capa intermèdia **M** canvien de posició. Per aquesta raó, quan la signatura de la permutació d'arestes sigui senar, i per conseqüència, també ho sigui la de cantonades, en haver permutat un nombre senar de peces en cada cas, i per tant, haver executat un nombre senar de vegades l'algoritme corresponent, aquests efectes secundaris que causa cada algoritme es veuran reflectits en el cub, i per això, en finalitzar amb la resolució a cegues, si hem executat tot correctament, el cub quedarà de la següent manera:


[29]

Per arreglar aquests efectes, realitzem un algoritme tal com **D 'L2 D M2 D' L2 D** i el cub queda totalment resolt.

[29] Figura 26. Cub amb signatura d'arestes i cantonades senar

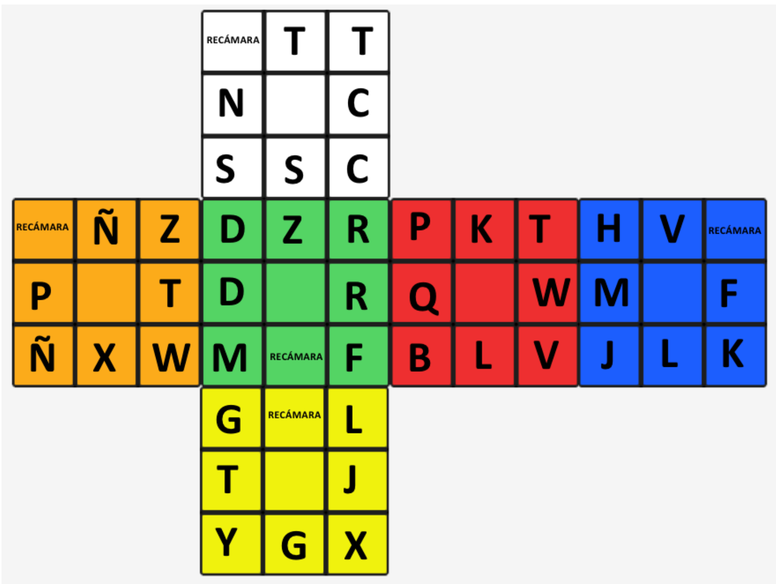
6.3.4. LA MEMORITZACIÓ DEL CUB AMB PARAULES

Un cop entesa la manera més senzilla de resoldre el cub a cegues, calia aprendre a memoritzar el cub. Necessitava trobar una manera fàcil de recollir en la meva memòria totes les dades necessàries.

Vaig decidir codificar cada adhesiu amb una lletra, i aprendre aquest codi de memòria. Jo vaig preferir utilitzar únicament consonants, ja que així, em podria ajudar amb vocals per formar paraules.

Tots sabem que el nombre de consonants de l'abecedari no arriba per codificar tots els adhesius del cub amb lletres diferents, però no suposava un problema per a mi posar la mateixa lletra a dos adhesius diferents, sempre que no fossin el mateix tipus de peça. És a dir, jo podia tenir la lletra **T** de cantonades i la **T** d'arestes, ja que això no era confusible, però mai la mateixa lletra per a dues cantonades o dues arestes.

L'esquema de lletres que vaig idear va quedar de la següent manera:



[30]

Tal com podem observar, als adhesius de les peces que fem servir com recambra, no els vaig posar cap lletra, ja que no cal memoritzar-los, doncs quan la resta d'adhesius es permutin al lloc correcte, a la peça recambra d'arestes i a la de cantonades només els quedarà un lloc lliure per col·locar-se.

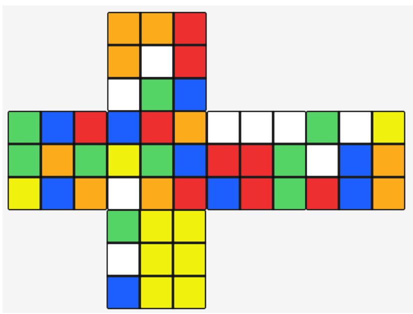
Un cop establert el codi del cub, vaig aprendre que la manera més senzilla de memoritzar, tenint en compte la manera com resoldria, era fixant-me en el destí

[30] Figura 27. Codificació dels adhesius del cub

de cada peça, i fent un recorregut lògic passant per tots els adhesius de cantonades i d'arestes per separat. Després de fer diverses proves vaig decidir que la manera que m'anava millor era començar recorrent les cantonades i, seguidament, les arestes. Començant sempre per la posició de recambra **UBL**, em fixava en la nova posició que havia d'ocupar l'adhesiu que es trobava allà. Si veia que, per exemple, havia d'anar a la posició **FRU**, em fixava llavors en l'adhesiu que hi havia a **FRU** i a on havia d'anar aquest última adhesiu, de manera que acabava recorrent totes les peces del cub en un ordre determinat. En passar per cada peça, anava memoritzant la consonant que tenia segons el meu codi, i per cada dues lletres formava una paraula ajudant-me de vocals. Per memoritzar les peces inactives, memoritzava el nombre de la peça o les peces que havia d'orientar i, en el cas de les cantonades, com es poden donar tres sentits diferents d'orientació, memoritzava **2** si havia d'orientar en sentit horari, o **4** si ho havia de fer en sentit anti horari, de manera que cada inactiva de cantonades representava per a mi un nombre de dos dígits, on el primer feia referència a la posició i el segon al sentit d'orientació.

6.3.5. EXEMPLE DE MEMORITZACIÓ I RESOLUCIÓ A CEGUES AMB EL MEU PRIMER MÈTODE

A continuació, veurem amb un exemple pràctic com realitzava jo el procés complet de memorització i resolució del cub en els meus inicis amb la metodologia explicada anteriorment. Prenguem com a exemple la següent disposició de peces:


[31]

Començo memoritzant cantonades fixant-me en l'adhesiu recambra. Aquest, en ser l'adhesiu taronja acompanyat de groc i verd, és el que -si estigués en la seva posició correcta es diria **W**, segons el meu codi. Em fixo doncs en la posició **W** i veig que aquí hi ha un adhesiu taronja que té en la mateixa peça els colors blanc i verd. Aquest hauria d'anar a la posició **Z**, de manera que la meva vista es dirigeix a l'adhesiu d'aquesta posició. Aquí observo que hi ha un adhesiu vermell

[31] Figura 28. Exemple de cub a resoldre a cegues

al costat dels colors blanc i blau, amb la qual cosa, salto a la posició **N**, que seria la posició correcta per a l'anterior peça. A la **N** veig el color blanc acompanyat del vermell i el verd, de manera que em vaig a la posició **P**. A la **P** veig un adhesiu blanc al costat dels colors blau i taronja, i el lloc d'aquest adhesiu és la recambra, amb la qual cosa el primer cicle ja ha acabat, ja que he iniciat el procediment a la recambra i he tornat a acabar en ella. Fins ara, les lletres que he de recordar són **W, Z, N, C** i la memorització que he fet en forma d'àudio ha estat "Woz nuca". Em fixo ara en qualsevol altre adhesiu, per exemple, el que hi ha a la posició **F**. Aquí em trobo amb que l'adhesiu que hi ha és el que hauria d'estar en la posició **V**, així que em fixo en el que hi ha a **V** i veig que aquest ha de tornar a **F**. D'aquesta manera, tanco un segon cicle, ja que he començat i acabat amb la lletra **F**. Fins ara, la memorització que porto feta és "Woz, NuCa, Fave, Fa". Faig un repàs ràpid de totes les cantonades i observo que per l'única que no he passat és per una inactiva, que he d'orientar en sentit horari. Tal com diu el teorema fonamental del Cub de Rubik, $\sum_{i=1}^{8} v_i = 0$, de manera que, si he d'orientar una peça en sentit horari, és completament segur i obvi que hauré d'orientar també la recambra en sentit anti horari. Aquesta deducció la faig a causa de que la recambra és l'única peça que no he memoritzat perquè només li pot quedar lliure una posició si he permutat correctament la resta de les cantonades. Però el que no sé en un primer moment és com quedarà orientada. Si aplico la condició del sumatori, dedueixo que quedarà a un gir anti horari de la seva correcta orientació. Llavors, per a les inactives, memoritzaria **44, 82**. D'altra banda, a l'haver de permutar un nombre imparell de peces, ja sé que la signatura de la permutació de cantonades és senar, i que a causa dels efectes secundaris dels algoritmes que faci servir, al final de la resolució hauré executar l'algoritme **D’ L2 D M2 D’ L2 D**.

Procedeixo amb la memorització d'arestes. Fixant-me inicialment en la posició recambra d'arestes i seguint el mateix procediment de recorregut que amb les cantonades, obtinc les lletres **T, B, Ñ, F, H**, i en la posició **H** observo que l'adhesiu ha de tornar a la recambra, de manera que tanco un primer cicle d'arestes i el memoritzo com "Tebe, Ñaf, Ho". Decideixo obrir un nou cicle en la posició **R**, que em porta a la **M**, a la **S** i de nou a la **R**. Unint el final del cicle anterior amb el nou, em queda per memoritzar "Tebe, Ñaf, HoRa, MeSa, Ro". A continuació, m'adono de que ja no hi ha més cicles a permutar, però sí em fixo en una aresta inactiva, i dedueixo, segons el teorema fonamental del cub, que hauré d’orientar aquesta aresta inactiva junt amb l'aresta recambra, ja que $\sum_{i=1}^{12} v_i = 0$

A continuació, em poso un antifaç i començo a resoldre el cub a cegues. Començo resolent cantonades executant la conjugació que es correspon amb la primera lletra memoritzada, la **W**. Després d'executar la corresponent conjugació, l'adhesiu que hi havia a la posició **W** ja es troba a la posició destí, realitzo a continuació l'algoritme d*'Old Pochmann* perquè l'adhesiu es col·loqui a la recambra; si desfaig la conjugació, ja queda en la seva correcta posició. Realitzo el mateix procediment amb la resta de les cantonades memoritzades i, a continuació, recordo **44, 82**, de manera que faig una doble rotació **z ' x'** i executo la seqüència **R 'D' R D** dues vegades fins a tenir la peça recambra ben orientada. Ara faig un gir **U'** i repeteixo aquesta seqüència, aquest cop quatre vegades. Retrocedeixo el moviment **U'** executant **U** i retrocedeixo també les rotacions amb **z x**. Així, oriento les dues cantonades.

Per executar les arestes realitzo - per cada consonant memorizada - la conjugació corresponent, l'algoritme **M2** i la desconjugació, excepte amb la lletra **S**, que quan arribo a ella executo l'algoritme per a la lletra **G**, ja que m'adono que la capa **M** estarà intercanviada i, per tant, he de executar l'algoritme invers. A continuació, faig la conjugació **U'** per col·locar-me les dues arestes a orientar enfrontades entre si, faig una rotació del cub amb **x'**, executo l'algoritme d'orientació de dues arestes i retrocedeixo **amb x U**.

Recordo que la signatura de les permutacions era senar. Executo l'algoritme **D' L2 D M2 D' L2 D** i el cub queda totalment resolt.

6.4. DISSENY D'UN MÈTODE AVANÇAT D'EXECUCIÓ A CEGUES

Ja havia aconseguit els meus primers encerts de resolució del cub a cegues. Després d'uns mesos practicant i familiaritzant-me amb la tècnica vaig arribar a dominar-la a la perfecció. Cada vegada anava més ràpida recorrent les peces i memoritzant el cub, cada vegada estava més entrenada per memoritzar gairebé sense repassar, i vaig arribar a memoritzar el cub de manera habitual en uns vint segons i a executar-lo en uns quaranta. El primer objectiu de la meva investigació estava més que aconseguit. Ara, havia de fer un salt endavant. El meu objectiu era trobar un mètode molt més ràpid per memoritzar i resoldre el cub, ja que pretenia poder arribar a completar tot el procés en uns 35 segons o fins i tot en menys.

Vaig començar a buscar maneres per memoritzar més ràpid, però em vaig adonar que el mètode de les lletres era el millor. Havia provat de codificar el cub amb dígits, amb cares de persones conegudes o, fins i tot, amb notes musicals. Però sense cap mena de dubte, les lletres eren la manera més senzilla. No obstant, sabia que sí podia baixar el temps de memorització encara més. L'únic que havia de fer era practicar, i confiar en què aquesta pràctica donaria els seus fruits.

Tot i això, en l'execució, sí que vaig veure clarament una millora important que em podia fer baixar dels quaranta segons als quinze. Mantenint la forma amb la qual memoritzava, si executava algoritmes el més curts possibles que em canviessin 3 adhesius de cantonades o tres d'arestes de cop, evitaria l'ús de la conjugació (abans ajudava a no haver d'aprendre tants algoritmes) i, a més, canviaria més peces en menys temps. És a dir, qualsevol permutació de cantonades o d'arestes que tingués, jo la podia descompondre en gran part o completament en cicles de 3 (o dit d'una altra manera, en parelles de transposicions), i si trobava un algoritme que em resolgués cadascun dels diferents casos de 3-cicles que hi havia, podia resoldre aplicant aquests algoritmes la meitat de permutacions de cantonades o d'arestes que tingués. En els casos en què la signatura de les permutacions fos parella, podria descompondre totalment la permutació en cicles de 3 o parelles de transposicions, però en els que la signatura fos imparella, podria descompondre la permutació en un seguit de 3-cicles juntament amb una transposició de cantonades i una d'arestes. Per aquesta raó, no n'hi havia prou amb els algoritmes que resolguessin 3-cicles per poder resoldre totes les permutacions possibles de $\boldsymbol{S_8\ x\ S_{12}}$, necessitava més algoritmes, però això ho investigaria més endavant, igual que els casos de peces inactives.

Per calcular tots els casos de 3-cicles per als quals necessitava trobar un algoritme, vaig prendre la recambra com a primera enganxina del cicle. L'enganxina que es trobi aquí es pot permutar a **7 * 3 = 21** llocs diferents (7 cantonades excloent la recambra amb 3 possibilitats d'orientació cadascuna), considerant la posició a la qual hagi d'anar com la segona enganxina a permutar del cicle. Alhora, aquesta segona enganxina es pot permutar a **6 * 3 = 18** posicions diferents (6 cantonades restants, cadascuna amb 3 possibilitats d'orientació). Realitzem l'operació **1 * 21 * 18 = 378** i concloem que hi ha 378 cicles de permutació i orientació de 3 cantonades prenent sempre la recambra com a primera a permutar.

Per calcular el nombre de cicles de tres arestes prenent sempre com a primera la recambra, efectuem l'operació **1 * 22 * 20 = 440**, ja que la recambra es pot permutar a 22 posicions diferents, i aquestes, alhora, a 20 que encara queden lliures .

440 + 378 = 818, de manera que havia d'investigar l'algoritme més ràpid que resolgués cada un d'aquests 818 casos, aprendre'ls tots de memòria, reconèixer-los a l'instant i dominar-los a la perfecció.

I la pregunta que em vaig fer va ser " I si executo algoritmes que permutin peces de cinc en cinc? " Però clarament, vaig comprendre que això no era viable, ja que per aconseguir-ho havia d'aprendre més de 140.000 algoritmes diferents d'uns 15 moviments cada un i el seu reconeixement en el cub. Fent servir algoritmes que permutessin un cicle de tres, n'havia d'aprendre 818 d'entre 8 i 12 moviments aproximadament, que tot i ser també un nombre força elevat, vaig pensar que era més assequible.

6.4.1. COMMUTADORS QUE INTERCANVIEN UN 3-CICLE

La manera més ràpida de resoldre qualsevol 3-cicle és fent servir el que en matemàtiques anomenem "commutador". Aplicant el concepte en el cub, el commutador és una seqüència de moviments amb una estructura dividida en quatre parts. La primera és un algoritme $\mathbf{X}$ que es correspon amb una inserció o un intercanvi (més endavant, explicaré aquests conceptes), i aquest pot constar dels moviments simples que siguin, no importa el nombre. La segona és un altre algoritme $\mathbf{Y}$ corresponent amb una inserció o un intercanvi. Finalment, la tercera i quarta part del commutador són la inversa de l'algoritme $\mathbf{X}$ i la inversa de $\mathbf{Y}$. Per tant, l'estructura completa del commutador quedaria com $\boldsymbol{XYX^{-1}Y^{-1}}$.

Els commutadors en el cub no només resolen un 3-cicle. També es fan servir moviments amb estructura de commutador per orientar dues cantonades o dues arestes. Per exemple, tal com vam veure en l'exemple de resolució d'un cub a cegues, la seqüència **R'D'RD** ens servia per orientar cantonades, i si realitzem aquesta seqüència dues vegades (com algoritme $\mathbf{X}$), afegim **U** (com algoritme $\mathbf{Y}$), realitzem la inversa de $\mathbf{X}$ i la inversa de $\mathbf{Y}$, haurem orientat dues cantonades contigües fent servir un commutador.

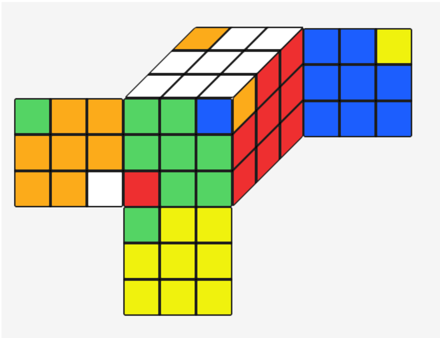
Abans de procedir amb els tipus de commutadors i explicar com els farem servir per resoldre el cub, hem d'entendre dues possibles relacions que poden tenir les peces involucrades en un 3-cicle.

La primera relació que hi pot haver entre dos enganxines és que aquestes siguin intercanviables, és a dir, que amb un sol gir (pot ser doble, és a dir, un mateix gir dues vegades) una de les enganxines pugui ocupar la posició de l'altra. Per exemple, les enganxines **FUL** i **FRD** són intercanviables entre si, ja que realitzant el gir **F2**, cadascuna es col·loca en la posició de l'altra.

La segona relació que pot existir és que una enganxina sigui inserible en una altra, és a dir, que pugui ocupar la posició de l'altra quedant en la mateixa orientació (amb la condició de la no alteració de la posició de la resta de peces que se situen en la capa on es podria produir un intercanvi). Per exemple, l'adhesiu **UBL** és inserible en **FRD** si prenem com intercanviables els adhesius **FRD** i **BDL**, ja que, si executem la seqüència **RU2R'**, aconseguim que **UBL** ocupi la posició **FRD** i les peces de la capa **D** (és la capa que té les nostres dues enganxines intercanviables) no es veuen afectades i romanen en la seva mateixa posició.

Hi ha diversos tipus de commutadors, però la base de tots són els que anomenem "purs", i es caracteritzen per constar de tres girs d'inserció corresponents a una de les estructures **X** o **Y** i un gir d'intercanvi, també corresponent a l'estructura **X** o **Y** que no sigui la inserció.

Vegem ara un exemple pràctic de com resoldria jo, amb un commutador pur, el 3-cicle que apareix a la imatge:

[32]

Em fixo en la relació que hi ha entre les tres peces involucrades, i m'adono de que els adhesius **UBL** i **UFR** són clarament intercanviables, així que ja sé que una de les estructures del commutador serà **U2**. També observo com puc inserir l'adhesiu **LDF** en **UFR** sense afectar la resta de peces de la capa **U**; puc fer-ho mitjançant els moviments **R'DR**, amb la qual cosa, ja tinc l'altra part del commutador. Ara bé, quina d'aquestes dues seqüències es correspon amb la part **X** i quin amb la **Y**? O dit d'una altra manera, quina de les dues, intercanvi o inserció, he executar primer? Si em fixo en l'ordre del cicle, l'adhesiu **UBL** ha d'anar a **LDF**, i **LDF** a **UFR**. La inserció que he trobat situa a **LDF** en **UFR**, de manera que, si executo primer la inserció, en realitzar l'intercanvi aconseguiré que **UBL** es col·loqui en **UFR** per a després, en desfer les estructures, aconseguir que les tres peces estiguin en la seva posició correcta . Per això, l'estructura **X** del commutador es correspondria amb la inserció **R'DR** i l'estructura **Y** amb l'intercanvi **U2**, de manera que l'execució completa de l'estructura **XYX'Y'** quedaria **R'DRU2R'D'RU2**.

L'inconvenient que em vaig trobar va ser que no els 818 3-cicles es poden resoldre amb commutadors purs i, per això, en aquests casos, cal realitzar conjugacions per obtenir aquest tipus de commutadors, o bé realitzar altres

[32] Figura 29. Exemple d'un 3-cicle

algoritmes alternatius que es corresponguin amb estructures com ara les anomenades cicle shift (els tres adhesius es troben a la mateixa capa però cap d'ells és intercanviable entre si) o per special (els tres adhesius són intercanviables entre si, i dos d'ells es troben en una mateixa capa). L'estructura del cicle shift difereix bastant de la del commutador, i potser és per això que em resulta una mica incòmode executar tots els casos de cicle shift amb el procediment habitual. Per això, a la recerca dels 818 algoritmes que necessitava per fer una millora radical en el meu mètode, vaig intentar evitar els algoritmes amb l'estructura de cicle shift reduint aquests casos a altres mitjançant conjugacions. També he de dir que no sempre vaig buscar l'algoritme més curt, ja que moltes vegades 'òptim' no vol dir 'curt', cal intentar trobar un equilibri entre mínims moviments i moviments còmodes per als dits.

Vaig trigar moltes hores en escriure i aprendre tots els algoritmes, i arribar a automatitzar-los em va costar encara molt més temps. Gran part dels algoritmes apresos, els vaig canviar al cap d'uns mesos, ja que anava trobant de millors. Per aquesta raó, la llista que tinc està constantment renovant-se. En els annexos, adjunto la llista actual escanejada amb els 818 algoritmes investigats i apresos.

6.4.2. ALGORITMES D’ORIENTACIÓ I CASOS DE SIGNATURA SENAR

Tal com vaig indicar anteriorment, en els casos en què la signatura de les permutacions fos parella, podria descompondre totalment la permutació en cicles de 3, però en els que la signatura fos imparella, podria descompondre la permutació en un seguit de 3-cicles juntament amb una transposició de cantonades i una d'arestes.

Ja coneixia i sabia aplicar un algoritme per a tots els 3-cicles que necessitava, però quan la signatura de les permutacions era senar, fent servir aquests algoritmes arribava a resoldre el cub fins a obtenir una transposició de cantonades i una altra d'arestes. Necessitava doncs, trobar una manera per acabar de resoldre el cub quan es donés aquesta circumstància.

Si buscava un algoritme per a resoldre tots els casos possibles, n’havia d'aprendre **21 * 22 = 462**, ja que la transposició de cantonades podia ser entre l'adhesiu recambra i qualsevol dels 21 adhesius restants, i la transposició d'arestes entre l'adhesiu recambra i qualsevol dels altres 22 adhesius d'arestes. Aquests algoritmes constarien pràcticament del doble de girs que els commutadors.

Una altra manera era fer servir per a aquestes peces els mètodes d’**OP** (*Old Pochmann*) i **M2**, amb l'execució posterior de l'algoritme **D'L2DM2D'L2D** que vam veure anteriorment, però aquesta opció era més lenta. Tot i això, vaig decidir mantenir-la durant un temps, i un cop haver millorat la resta de parts del procés, aniria investigant i aprenent els 462 algoritmes progressivament durant diversos mesos fins a acabar assolint-los tots. En els annexos, adjunto la llista actual amb tots els casos de paritat que porto apresos fins al moment.

Pel que fa a les peces inactives, vaig pensar que el millor era buscar algoritmes òptims per als casos més comuns, i per a la resta, si mai me'ls trobava, descompondre'ls als casos que coneixia. Així doncs, vaig buscar i vaig aprendre tots els casos possibles d'orientació de dos i tres cantonades, (en total 96 algoritmes diferents) i per a arestes em vaig aprendre tots els casos d'orientació de dues peces utilitzant molt el recurs de la conjugació amb cancel·lacions . Tots els algoritmes d'orientació també estan adjuntats com a annex.

6.4.3. CONCLUSIÓ DEL MEU NOU MÈTODE

Després d'uns mesos de provatures amb el nou mètode, vaig aconseguir baixar els temps d'execució a uns valors d'entre 13 i 18 segons. Pel que fa a la memorització del cub, tan sols amb la pràctica vaig arribar a realitzar-la en menys de 10 segons, normalment entre 7 i 8, cosa que em va sorprendre, ja que no pensava que la millora pogués ser tan gran. Vaig aconseguir el primer lloc en el *Campionat d'Europa de resolució a cegues*, i mesos després vaig aconseguir una marca de 20,38 segons en la realització de tot el procés en el campionat oficial *l'Escorial Open 2018*, la qual cosa va suposar el rècord d'Europa absolut. A més, he batut 14 vegades de forma consecutiva el rècord d'Espanya des de 2015 fins a l'actualitat.

Tot i haver aconseguit el propòsit inicial, seguia millorant i aprenent nous algoritmes, i tot el coneixement que posseïa em va obrir les portes a iniciar-me en la investigació del meu tercer objectiu: arribar a memoritzar múltiples Cubs de Rubik seguits per a la seva posterior resolució a cegues .

7. DISENY D'UN MÈTODE PER MEMORITZAR MÚLTIPLES CUBS A CEGUES

7.1. LA MNEMOTÈCNIA

La mnemotècnia va ser la tècnica que em va ajudar a memoritzar múltiples cubs de Rubik. En el meu cas particular, la investigació es va centrar en estudiar diversos tipus de tècniques per a la seva posterior adaptació al cub. No va ser un aspecte fàcil, ja que la mnemotècnia no està programada per resoldre Cubs de Rubik, sinó que serveix en molts altres camps de forma més àmplia.

Vaig consultar fonts d'Internet, i després de no trobar molta informació, vaig decidir comprar llibres d'autors especialitzats en memòria. Vaig descobrir en aquest moment que s'obria davant els meus ulls un món immens per explorar, fins i tot no només cenyint-me als Cubs de Rubik, fàcilment era extrapolable als meus estudis o altres qüestions quotidianes de la meva vida diària.

Centrant-nos en la matèria que ens ocupa (resolució de múltiples cubs a cegues) tractaré de descriure breument totes les tècniques mnemotècniques que he posat a prova, i d'aquesta manera, explicaré la meva actual, que en essència és una combinació de diverses tècniques amb aportacions pròpies que considero innovadores, ja que no estan descrites en cap manual, però sí que són molt vàlides per a mi, i a les proves em remetré.

7.1.1. MÈTODE DE LA CADENA I DEL RELAT

El mètode de la cadena, com el seu nom indica, consisteix en enllaçar de manera ordenada una sèrie d'elements o paraules mitjançant una associació. Abans de vincular dues paraules entre si, haurem de visualitzar-les molt bé de forma individual. Aquí entren en joc tots els sentits. Mentalment observarem tots els detalls, manipulant tot el que desitgem per cridar l'atenció de la nostra ment. Aquesta és la clau. Un cop visualitzats els dos objectes buscarem una manera de connectar el primer amb el segon, després el segon amb el tercer, i així successivament. Com més inversemblant sigui l'associació que establim, més ens cridarà l'atenció i millor la recordarem.

L'associació de la sèrie de paraules la podem fer com una mena de conte on poden seguir intervenint les paraules anteriors (mètode del relat), o bé de forma individual deixant enrere les paraules que ja estan encadenades (mètode de la cadena). Personalment, crec que el millor és anar combinant les dues maneres segons convingui, i per això explico aquests dos mètodes com un de sol.

Posem un exemple molt pràctic. Hem d'anar a fer la compra i volem recordar tots aquests elements: lleixiu, patates, pasta dentífrica, pa, ambientador, tomàquets, crema solar, plàtans, oli, guants de cuina. Verbalitzar com associaria jo aquestes 10 paraules amb el mètode de la cadena i / o relat no és tasca fàcil, ja que en la meva ment cada associació és un "flash" que dura mig segon, però intentaré explicar-ho el millor possible.

M'imagino que entro en un supermercat enorme i, per a la meva sorpresa, veig que tothom patina lúdicament sobre el sòl, ja que s'ha vessat una gran quantitat de **LLEIXIU**. Em sembla divertit i jo mateixa em disposo a patinar. Com que no tinc patins, una amable dependenta m'ofereix unes **PATATES** ajustables als meus peus. Noto que són dures i estan molt fredes. Una patata comença a rentar-se les dents amb **PASTA DENTÍFRICA**, la qual cosa provoca una rialla immensa d'una allargada barra de **PA**. Percebo l'olor del pa acabat de fer, i aquest es va transformant gradualment en una olor a **AMBIENTADOR**. Aquesta olor causa que uns **TOMÀQUETS** cobrin vida i comencin a fer salts fins caure en un bassal ple de **CREMA SOLAR**. Toco la crema solar i la noto empastifada, desagradable al tacte. Un **PLÀTAN** em crida que aquesta crema no és per a humans, sinó per a plàtans. En aquest moment, agafo el plàtan i automàticament es comença a desfer, fins que cau en una cassola plena d'**OLI** bullint i jo, per rescatar-lo, em poso uns **GUANTS DE CUINA**.

Òbviament, la història és inversemblant, però gràcies a això és impossible no recordar les deu paraules en ordre.

7.1.2. MÈTODE DE LA PINÇA

Com ens podem imaginar amb el nom, aquest mètode consisteix en "penjar" les dades a memoritzar en una sèrie d'elements prèviament establerts, que ens serveixen de pinces. Aquest mètode serveix sobretot per recordar elements en una determinada posició. L'avantatge és que, a diferència de l'anterior mètode, si volem recordar una paraula qualsevol d'una llista, podem fer-ho sense necessitat d'haver de repassar totes les anteriors. És a dir, si volem recordar l'element 6 de la nostra llista, no cal que recorrem tot el camí des del principi. Només cal que pensem quina paraula establerta tenim per a aquest nombre, i amb què l'hem associat.

A mode d'exemple, diré que quan vaig adoptar aquest mètode, em va ser molt fàcil crear les meves 20 primeres "paraules pinça", ja que les seves inicials es corresponien amb l'ordre alfabètic. Les meves primeres paraules van ser ***A****vión,* ***B****utaca,* ***C****aja,* ***D****inero,* ***E****spejo ...* D'aquesta manera vaig ser capaç de vincular els elements desitjats a recordar.

7.1.3. EL MÈTODE DE "LOCI"

Aquest mètode consisteix en associar els elements que volem aprendre en una sèrie de llocs establerts prèviament per nosaltres mateixos. Es tracta d'ubicar els elements a recordar en llocs coneguts, i imaginar-nos que realitzem un recorregut passant per tots ells.

A títol explicatiu diré que els *locis* actuals que faig servir per memoritzar dades amb aquest mètode són llocs de casa meva com ara el menjador, la meva habitació o la cuina, sales o espais del meu institut com la biblioteca, el claustre o el gimnàs, i diferents llocs del poble de la Garriga, que per a mi són molt representatius. D'aquesta manera, recorrent els *locis* en la meva ment (actualment tinc exactament 80) vaig creant històries i en elles ubico les paraules que desitjo recordar.

7.2. APLICACIÓ DE LES TÈCNIQUES AL CUB DE RUBIK

La prova de *Multiblind* consisteix en memoritzar i executar a cegues el màxim nombre de cubs possibles amb un temps límit d'una hora. Partint d'aquesta premissa havia agilitzar al màxim el procés per aconseguir resoldre el màxim nombre de cubs tenint en compte tres fases: la memorització de tots els cubs, el repàs de tot allò memoritzat i l'execució a cegues.

Després d'analitzar tots els possibles mètodes, vaig decidir en un primer moment que el millor era el de la pinça, ja que em resultava més fàcil associar les paraules d'una en una sense necessitat d'haver de crear una llarga història. El mètode de la cadena també es podia adaptar al que volia, però l'inconvenient que li vaig trobar va ser que només oblidant una associació, ja perdia el fil de la resta, i no podia seguir executant.

Posteriorment, per millorar resultats, vaig veure que era més efectiu el mètode de *loci*, ja que podia ubicar les cantonades d'un cub en una habitació, i les arestes en una altra, de manera que les associacions les creava més ràpidament.

Practicant, vaig idear diferents maneres per associar elements, com utilitzar certes paraules de "pont", fer servir el recurs de la memòria verbal per anar més ràpid en casos on l'associació visual fos complicada ...

Vaig realitzar els cursos de *Superaprendizaje* i *BrainMaster* a través *d'Escuela de la Memoria*, amb els que vaig poder experimentar una lleugera millora del meu mètode posant en pràctica qüestions que em van semblar interessants.

Resumint, amb el mètode *loci* de base, aportacions d'altres fonts i les meves pròpies tècniques i maneres d'associar, actualment sóc capaç de memoritzar 38 Cubs de Rubik (un mínim de 380 paraules en ordre) en 30 minuts, repassar-los en 10 minuts, i executar-los a cegues en 20.

Fins a la data d'avui i basant-me en el meu mètode, he batut 12 cops el meu propi rècord nacional, aconseguint a més un subcampionat europeu en aquesta disciplina al juliol de 2018, i així queda reflectit en la meva fitxa de la *WCA (World Cube Association).*[33]

[33] https://www.worldcubeassociation.org/persons/2014PARR02?tab=records

CONCLUSIONS

En aquest treball he tractat de resoldre els tres objectius proposats inicialment.

El primer objectiu ha estat resolt i analitzat amb detall. $43.252.003.274.489.856.000$ són les diferents combinacions que pot tenir un Cub de Rubik, però l'estudi que m'ha permès desxifrar aquest valor també m'ha ajudat a entendre més sobre el cub en general i sobre les matemàtiques.

Des de 2013 fins a l'actualitat, s'ha dut a terme la investigació del meu segon objectiu, i aquest també ha estat superat amb èxit. No només he aconseguit optimitzar el mètode fins on em vaig proposar, sinó que he reduït els temps molt més del que s'esperava, fins a arribar a assolir el rècord europeu de resolució a cegues amb 20,38 segons (8 segons de memorització i 12 de resolució a cegues). En un primer estadi, l'objectiu era memoritzar un cub en 15 segons i resoldre'l en 20. Era gairebé impensable realitzar tot el procés en menys de 30 segons, i per això, vaig entendre que 35 segons com a total del procés era un repte ambiciós. No obstant, després de la investigació, estudi i assimilació de tècniques i algoritmes, he aconseguit reduir els temps fins a gairebé la meitat del plantejament inicial. En l'actualitat, sóc capaç de memoritzar un cub barrejat aleatòriament en una mitja de 7 o 8 segons i resoldre'l en un temps d'entre 12 i 15 segons (depenent de la dificultat de la barreja).

El tercer objectiu també ha estat aconseguit, doncs actualment, en un termini d'una hora ja sóc capaç de memoritzar 38 cubs en cadena i resoldre'ls tots seguits a cegues. Per a això necessito, aproximadament, 40 minuts d'estudi i 20 més per a executar sense mirar, recordant allò memoritzat. Per tant, l'objectiu inicial s'ha, pràcticament, duplicat. He d'indicar que tot aquest procés ha durat un total de 3 anys i considero que encara puc seguir progressant, ja que veig molt marge de millora en l'agilitat de l'associació i eficiència de la meva tècnica. Em plantejo si algun dia podré arribar a memoritzar 42 cubs en 40 minuts. Molt probablement, sí.

A més, gràcies a la realització d'aquesta part de la recerca, he pogut conèixer també tècniques per memoritzar números que m'han permès aconseguir el rècord d'Espanya en memorització del número pi amb 2200 decimals. A més, he après que aquestes tècniques mnemotècniques es poden aplicar pràcticament a qualsevol faceta de la vida diària. Així, puc afirmar que, després de la realització d'aquest treball, em resulta molt fàcil memoritzar noms de persones, llistes de paraules, idees, dates o números en general. He notat, per exemple, que el temari d'assignatures com ara història, filosofia o literatura el memoritzo i assimilo molt més ràpid que abans.

Durant la investigació relacionada amb el segon i tercer objectiu he passat per moments en què m'ha costat seguir avançant en el propòsit de trobar noves tècniques i millores, però sempre he acabat trobant maneres de superar aquestes resistències i acostar-me cada vegada més als meus objectius.

Com a valoració general i com ja vaig dir anteriorment, crec que encara puc continuar perfeccionant el meu mètode de resolució a cegues, tant en la vessant "individual" com en la vessant "múltiple", i per això, aquesta investigació encara no està finalitzada, encara que el treball conclogui.

També he de dir que l'elaboració d'aquest TR m'ha motivat en la consecució del meu primer llibre relacionat amb el cub titulat Manual del Cub de Rubik, en què tracto el cub des de diversos prismes, incloent entrevistes, curiositats i tutorials.

Finalment, vull donar les gràcies a totes aquelles persones que han servit per a mi com a font d'inspiració i que han estat determinants perquè la meva obstinació no decaigués, aconseguint així (i superant fins i tot) tot el que m'he proposat amb el cub i la seva resolució a cegues.

BIBLIOGRAFIA Y WEBGRAFIA

Bibliografia:

CAMPAYO, R. Desarrolla una mente prodigiosa. Madrid: EDAF, 2007.

O'BRIEN D. Consigue una memoria asombrosa. Barcelona: PAIDÓS, 2011.

PAZ ENRIQUEZ, E. Técnicas de memoria. Madrid: LIBSA, 2016. (Técnicas de aprendizaje)

Webgrafia:

https://youtu.be/oCfC2UOy3A8 (juliol 2016)

https://youtu.be/MepNZqc_6d0 (juliol 2016)

https://www.ryanheise.com/cube/commutators.html (desembre 2017)

https://youtu.be/54SGrZbLcoE (desembre 2017)

Altres fonts d'informació:

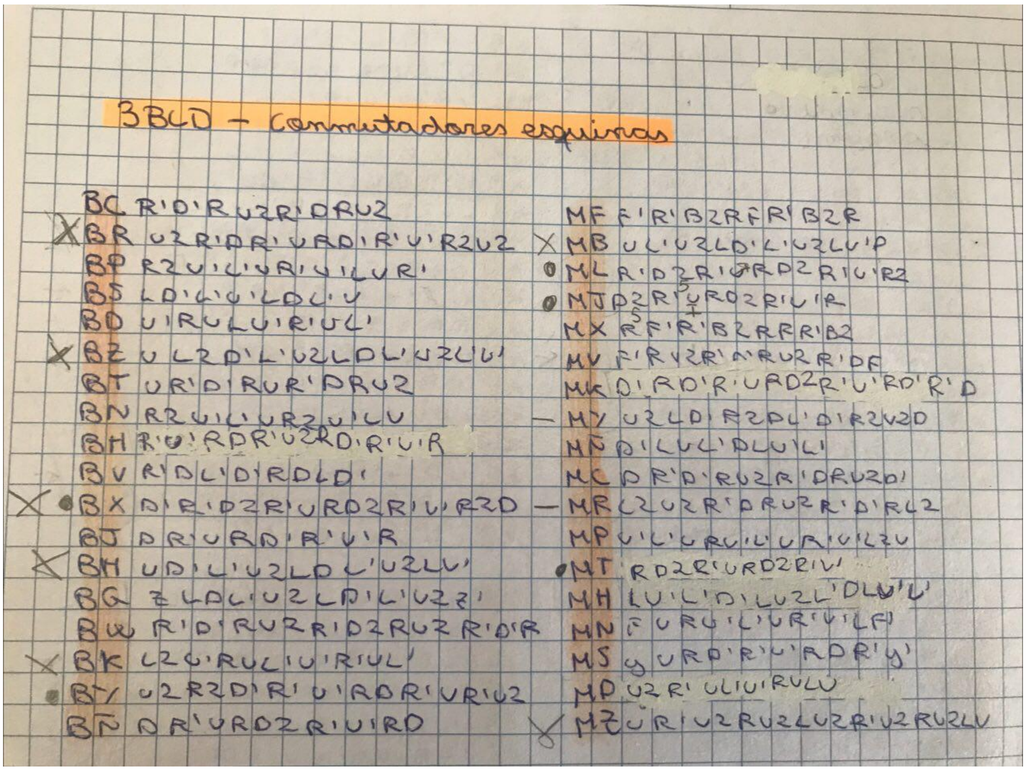
Apunts propis d'anys enrere

Comunicació verbal amb Enric Ventura (professor FME), Alexander Olleta (matemàtic i programador informàtic), José María Bea (Mestre Internacional en Memòria) i altres competidors de Cub de Rubik.

ANNEXOS

ALGORITMES INVESTIGATS I APRESOS

ANNEX 1. - COMMUTADORS

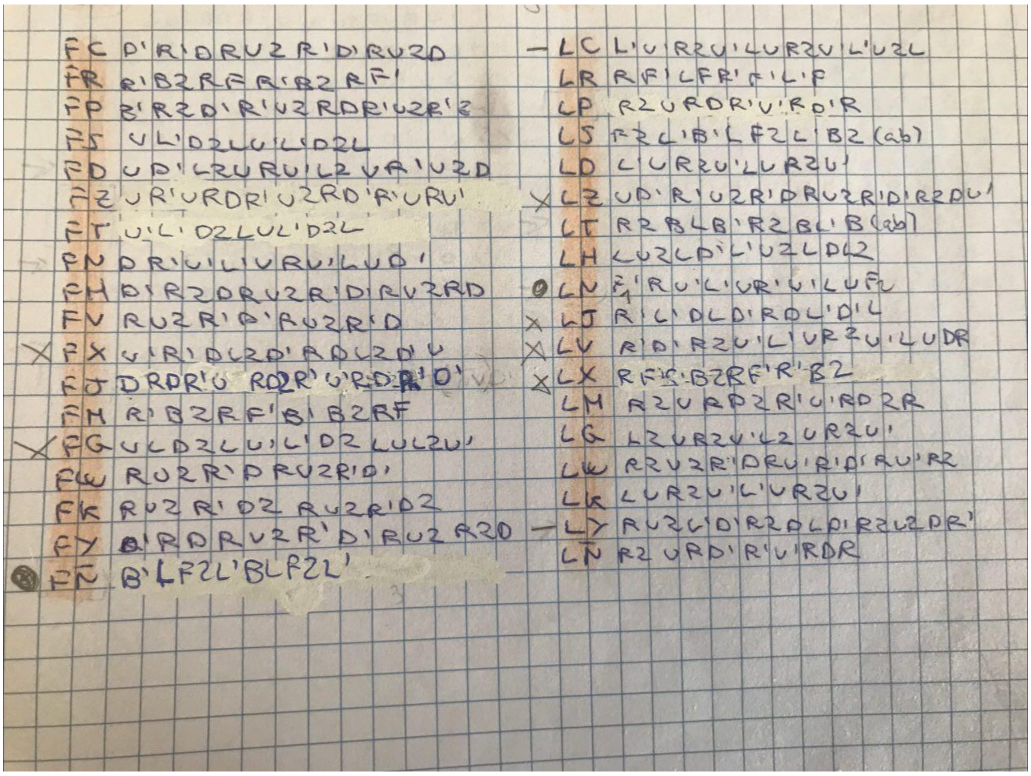

3BLD – Commutadores esquinas

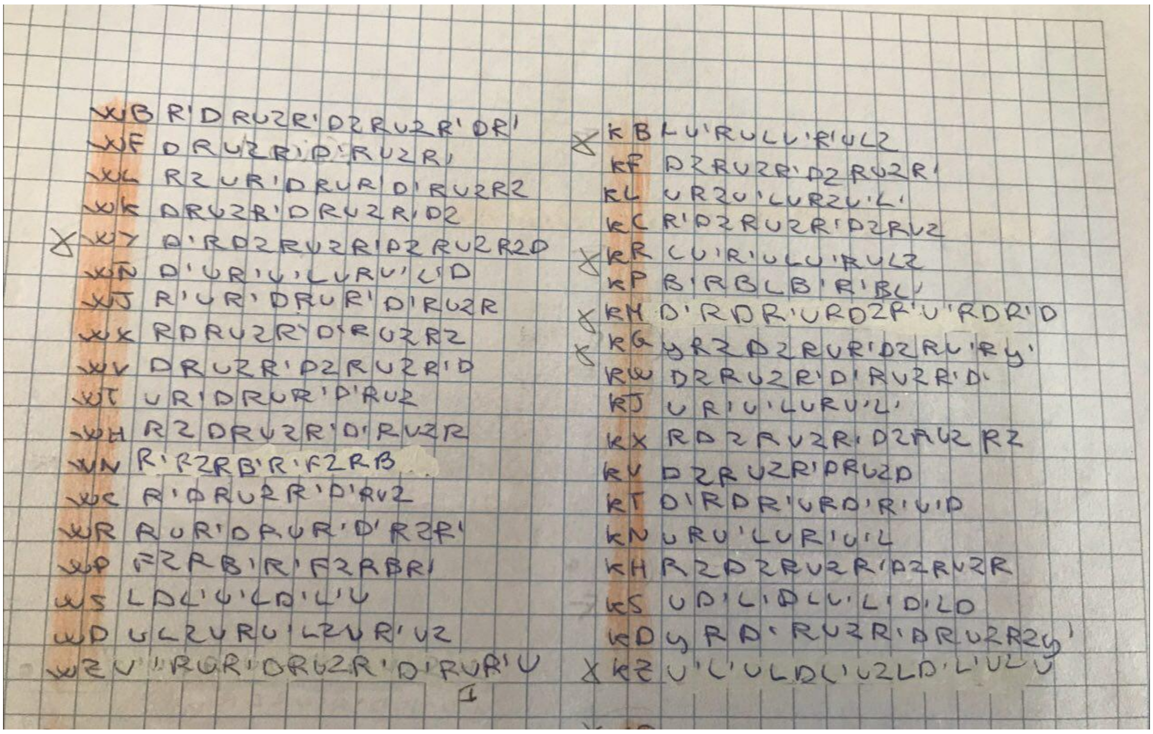
BC R'D'R U2 R' D R U2
BR U2 R' D R' U R D' R' U' R2 U2
BP R2 U' L' U R' U' L U R'
BS L D' L' U' L D L' U
BD U' R U L U' R' U L'
BZ U L2 D' L' U2 L D L' U2 L U'
BT U R' D' R U R' D R U2
BN R2 U L' U R2 U' L U
BH R' U' R D R' U2 R D' R' U' R
BV R' D L' D' R D L D'
BX D' R' D2 R' U R D2 R' U' R2 D
BJ D R' U R D' R' U' R
BM U D' L' U2 L D L' U2 L U'
BG Z L D L' U2 L D' L' U2 Z'
BW R' D' R U2 R' D2 R U2 R' D' R
BK L2 U' R U L' U' R' U L'
BY U2 R2 D' R' U' R D R' U R' U2
BÑ D R' U R D2 R' U' R D

MF F' R' B2 R F R' B2 R
MB U L' U2 L D' L' U2 L U' D
ML R' D2 R' U R D2 R' U' R2
MJ D2 R' U R D2 R' U' R
MX R F' R' B2 R F R' B2
MV F' R U2 R' D R U2 R' D F
MK D' R D' R' U R D2 R' U' R D' R' D
MY U2 L D' R2 D L' D' R2 U2 D
MÑ D' L U L' D L U' L'
MC D R' D' R U2 R' D R U2 D'
MR L2 U R' D R U2 R' D' R L2
MP U' L' U R U' L U R' U' L2 U
MT R D2 R' U R D2 R' U'
MH L U' L' D' L U2 L' D L U' L'
MN F U R U' L' U R' U' L F'
MS y U R D' R' U' R D R' y'
MD U2 R' U L U' R U L' U
MZ U R' U2 R U2 L U2 R' U2 R U2 L U

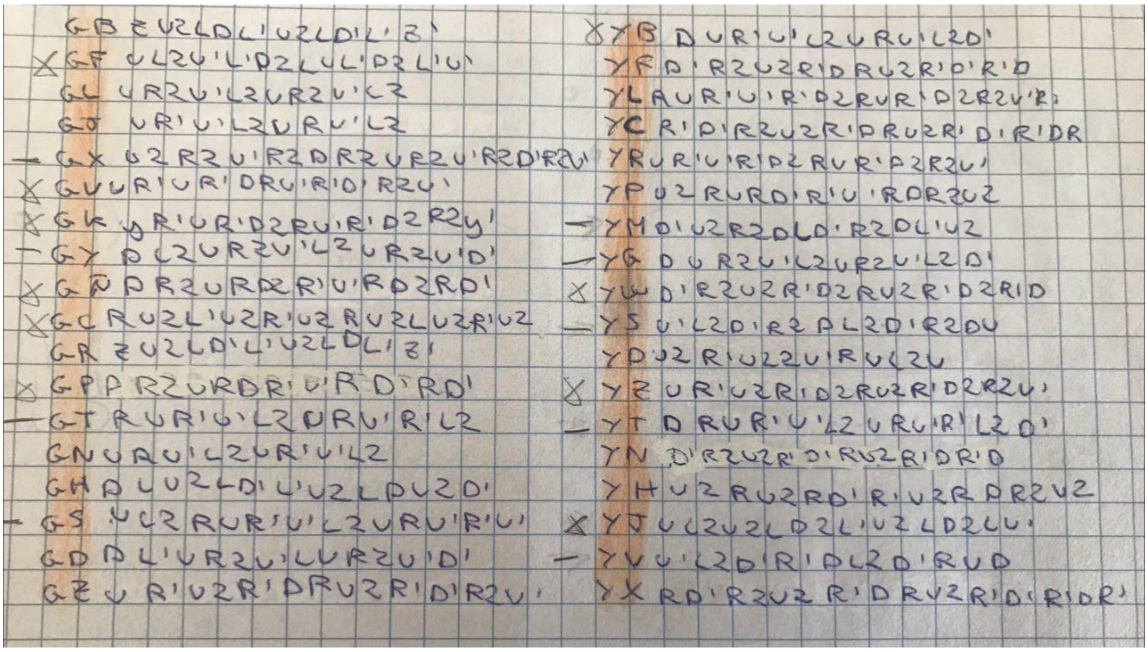
FC D' R' D R U2 R' D R U2 D
FR R' B2 R F R' B2 R F'
FP B' R2 D' R' U2 R D R' U2 R' B
FS U L' D2 L U' L' D2 L
FD U D' L2 U R U' L2 U R' U2 D
FZ U R' U R D R' U2 R D' R' U R U'
FT U' L' D2 L U L' D2 L
FN D R' U' L' U R U' L U D'
FH D' R2 D R U2 R' D' R U2 R D
FV R U2 R' D' R U2 R' D
FX U' R' D L2 D' R D L2 D' U
FJ D R D R' U R D R' U' R' D'
FM R' B2 R F' R' B2 R F
FG U L D2 L U' L' D2 L U L2 U'
FW R U2 R' D R U2 R' D'
FK R U2 R' D2 R U2 R' D2
FY B' R D R U2 R' D' R U2 R2 D
FÑ B' L F2 L' B L F2 L'

LC L' U R2 U' L U R2 U' L' U2 L
LR R F' L F R' F' L' F
LP R2 U R D R' U' R D' R
LS F2 L' B' L F2 L' B2 (ab)
LD L' U R2 U' L U R2 U'
LZ U D' R' U2 R' D R U2 R' D' R2 D U'
LT R2 B L B' R2 B L' B (ab)
LH L U2 L D' L' U2 L D L2
LN F' R U' L' U R' U' L U F
LJ R' L' D L D' R D L' D' L
LV R' D' R2 U' L' U R2 U' L U D R
LX R F' L' B2 R F R' B2
LM R2 U R D2 R' U' R D2 R2
LG L2 U R2 U' L2 U R2 U'
LW R2 U2 R' D R U' R' D' R U' R2
LK L U R2 U' L' U R2 U'
LY R U2 L' D' R2 D L D' R2 U2 D R'
LÑ R2 U R D' R' U' R D R

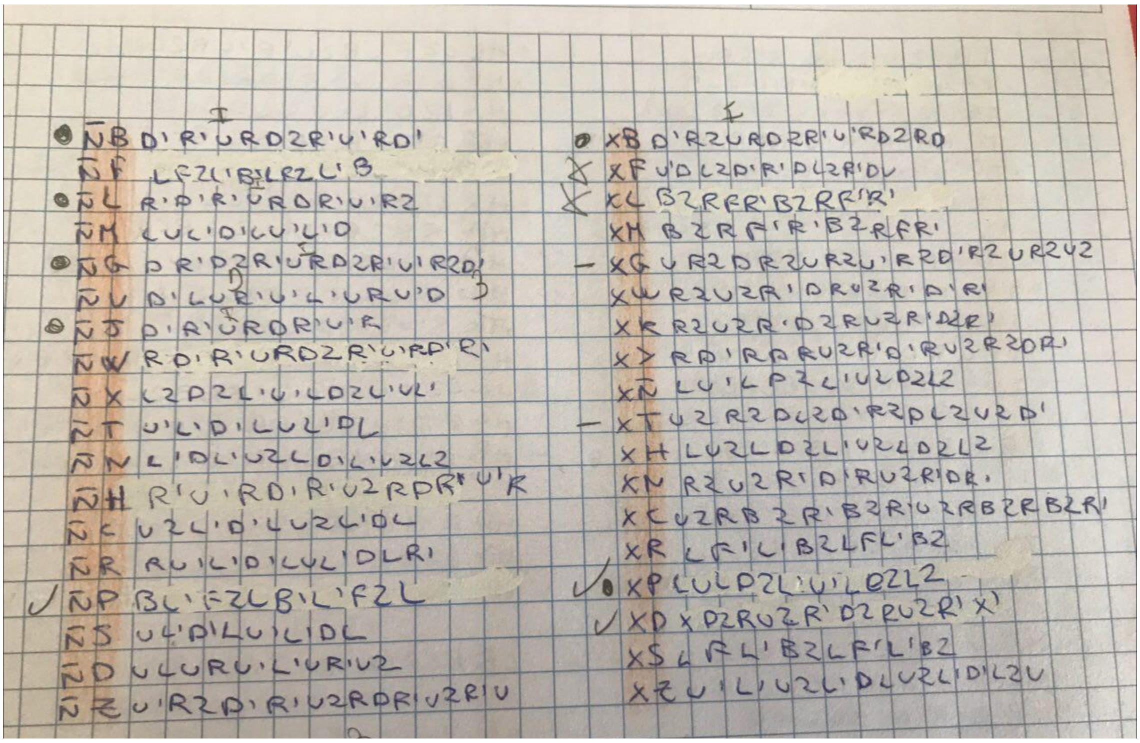


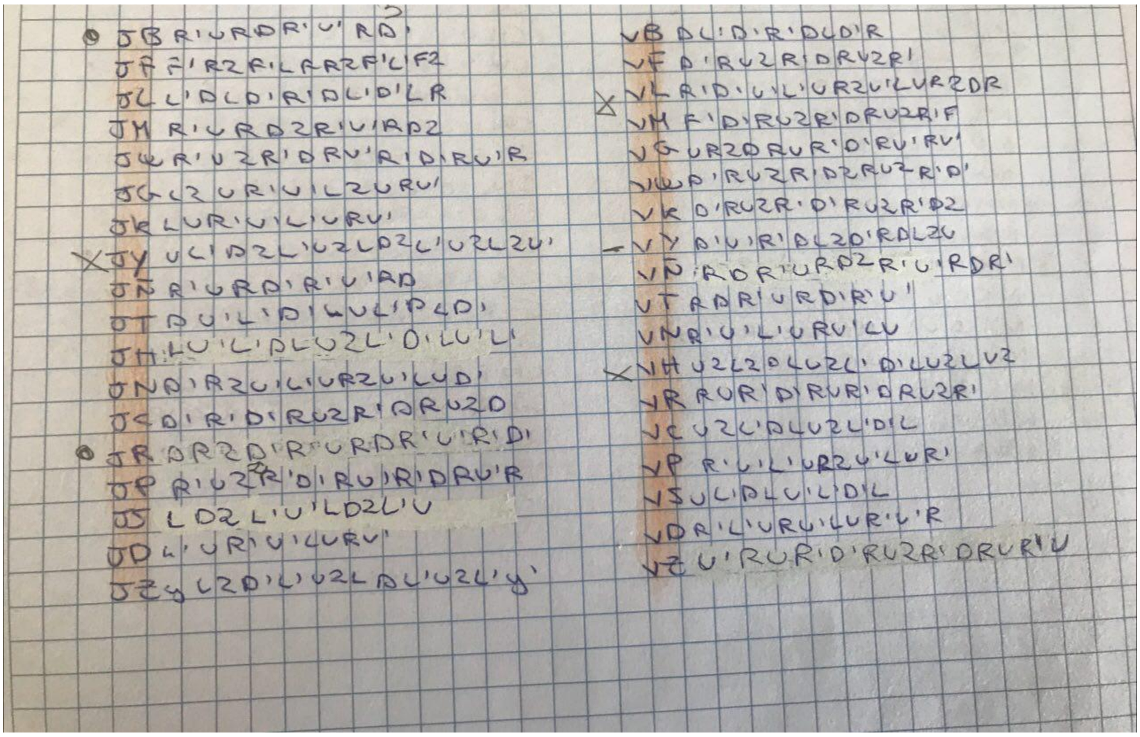

WB R'DRU2R'D2RU2R'DR'
WF DRU2R'D'RU2R'
WL R2UR'DRUR'D'RU2R2
WK DRU2R'DRU2R'D2
WY D'RD2RU2R'D2RU2R2D
WÑ D'UR'U'LURU'L'D
WJ R'UR'DRUR'D'RU2R
WX RDRU2R'D'RU2R2
WV DRU2R'D2RU2R'D
WT UR'DRUR'D'RU2
WH R2DRU2R'D'RU2R
WN R'F2RB'R'F2RB
WC R'DRU2R'D'RU2
WR RUR'DRUR'D'R2R'
WP F2RB'R'F2RBR'
WS LDL'U'LD'L'U
WD UL2URU'L2UR'U2
WZ U'RUR'DRU2R'D'RUR'U
I

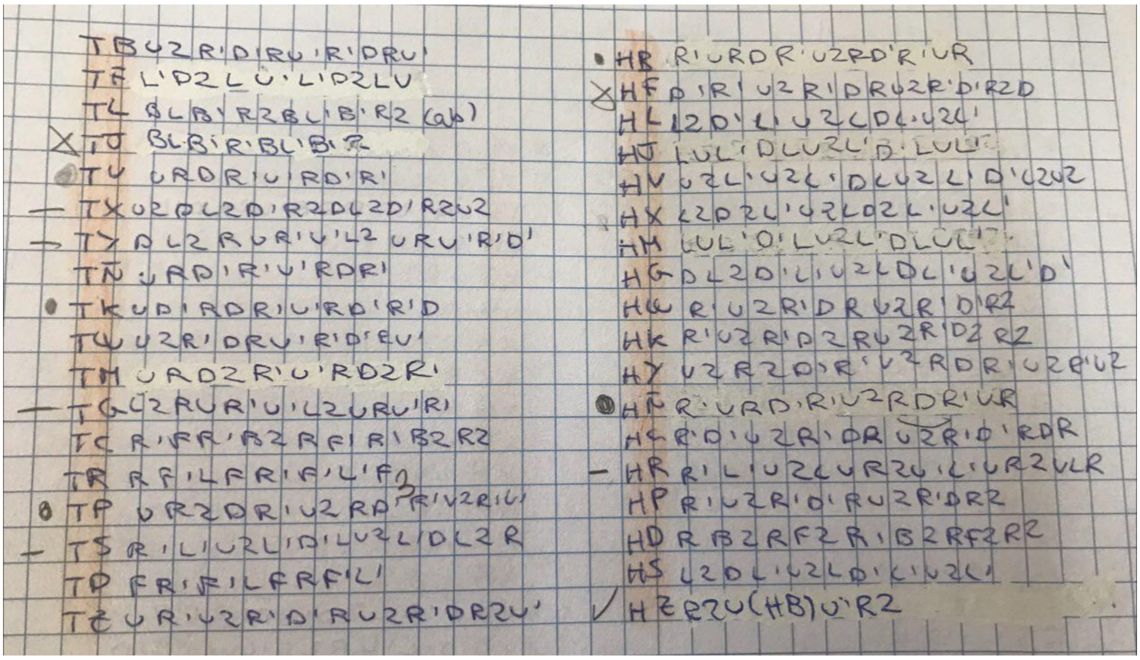
KB LU'RUL'U'R'UL2
KF D2RU2R'D2RU2R'
KL UR2U'LUR2U'L'
KC R'D2RU2R'D2RU2
KR LU'R'ULU'RUL2
KP B'RBLB'R'BL'
KM D'RDR'URD2R'U'RDR'D
KG yR2D2RUR'D2RU'Ry'
KW D2RU2R'D'RU2R'D'
KJ UR'U'LURU'L'
KX RD2RU2R'D2RU2R2
KV D2RU2R'DRU2D
KT D'RDR'URD'R'U'D
KN URU'LUR'U'L
KH R2D2RU2R'D2RU2R
KS UD'L'DLU'L'D'LD
KD yRD'RU2R'DRU2R2y'
KZ U'L'ULDL'U2LD'L'U2U

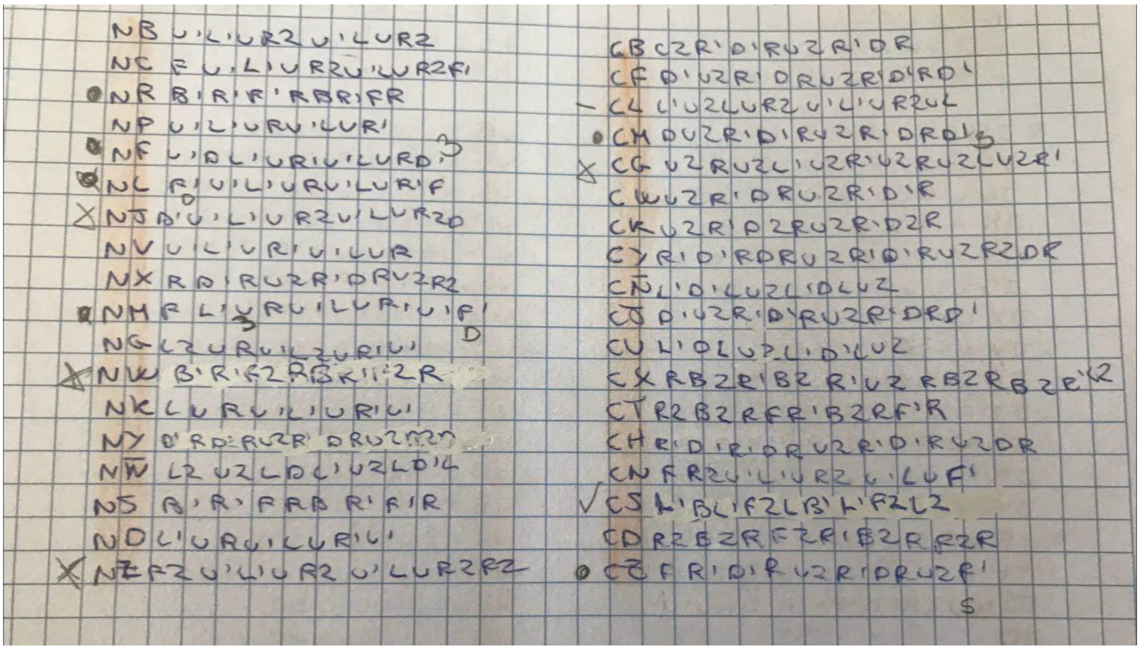

GB zU2LDL'U2LD'L'z'
GF UL2U'L'D2LUL'D2L'U'
GL UR2U'L2UR2U'L2
GJ UR'U'L2URU'L2
GX U2R2U'R2DR2UR2U'R2D'R2U'
GV UR'UR'DRU'R'D'R2U'
GK yR'UR'D2RU'R'D2R2y'
GY DL2UR2U'L2UR2U'D'
GÑ DR2URD2R'U'RD2RD'
GC RU2L'U2R'U2RU2LU2R'U2
GR zU2LD'L'U2LDL'z'
GP DR2URDR'U'RD'RD'
GT RUR'U'L2URU'R'L2
GN URU'L2UR'U'L2
GH DU2LD'L'U2LDU2D'
GS UL2RUR'U'L2URU'R'U'
GD DL'UR2U'LUR2U'D'
GZ UR'U2R'DRU2R'D'R2U'

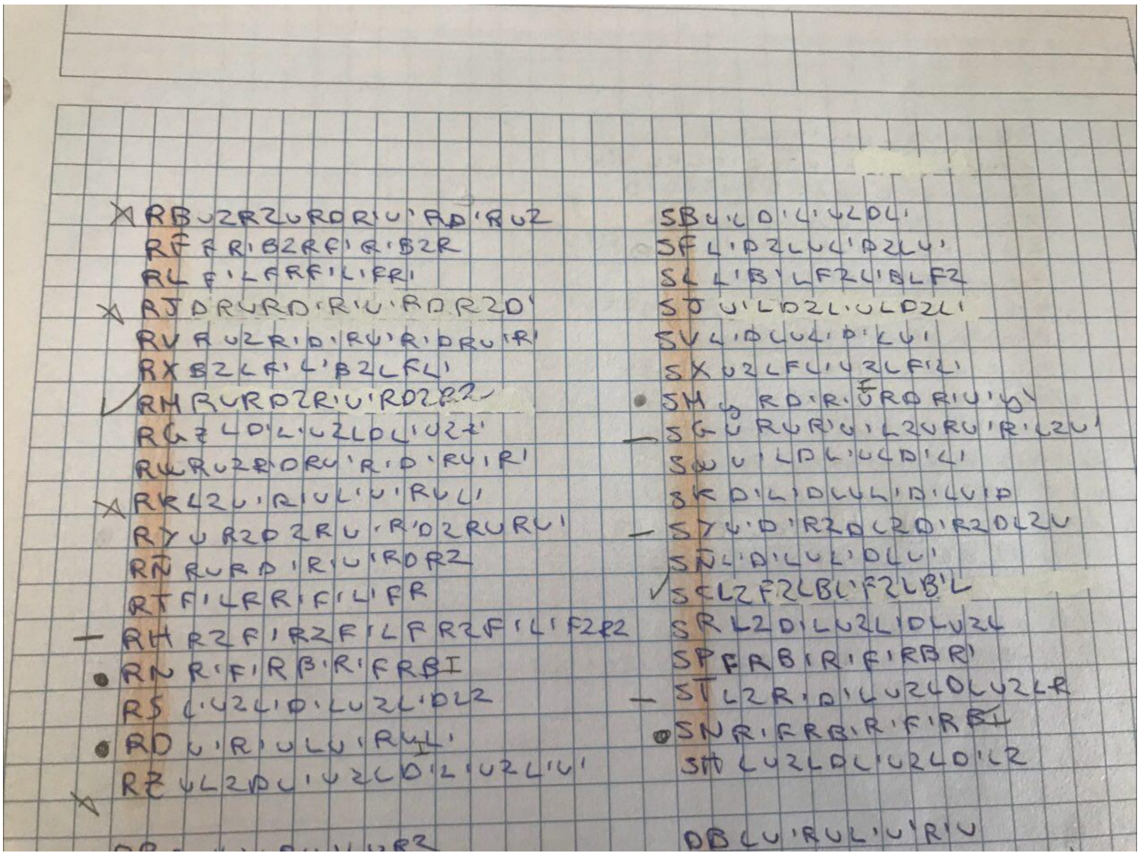
YB DUR'U'L2URU'L2D'
YF D'R2U2R'DRU2R'D'R'D
YL DUR'U'R'D2RUR'D2R2U'R'
YC R'D'R2U2R'DRU2R'D'R'DR
YR UR'U'R'D2RUR'D2R2U'
YP U2RURD'R'U'RDR2U2
YM D'U2R2DLD'R2DL'U2
YG DUR2U'L2UR2U'L2D'
YW D'R2U2R'D2RU2R'D2RD
YS U'L2D'R2DL2D'R2DU
YD U2R'U2U'RUL2U
YZ UR'U2R'D2RU2R'D2R2U'
YT DRUR'U'L2URU'R'L2D'
YN D'R2U2R'D'RU2R'DR'D
YH U2RU2RD'R'U2RDR2U2
YJ UL2U2LD2L'U2LD2LU'
YV U'L2D'R'DL2D'RUD
YX RD'R2U2R'DRU2R'D'R'DR'

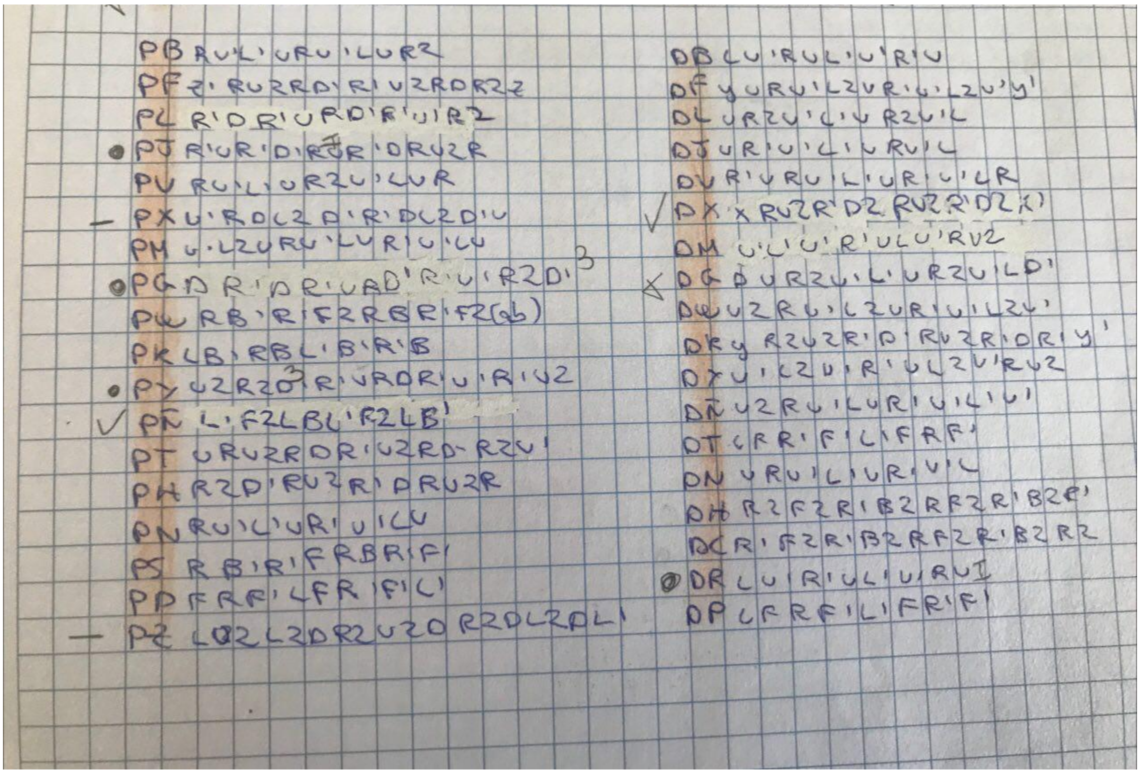


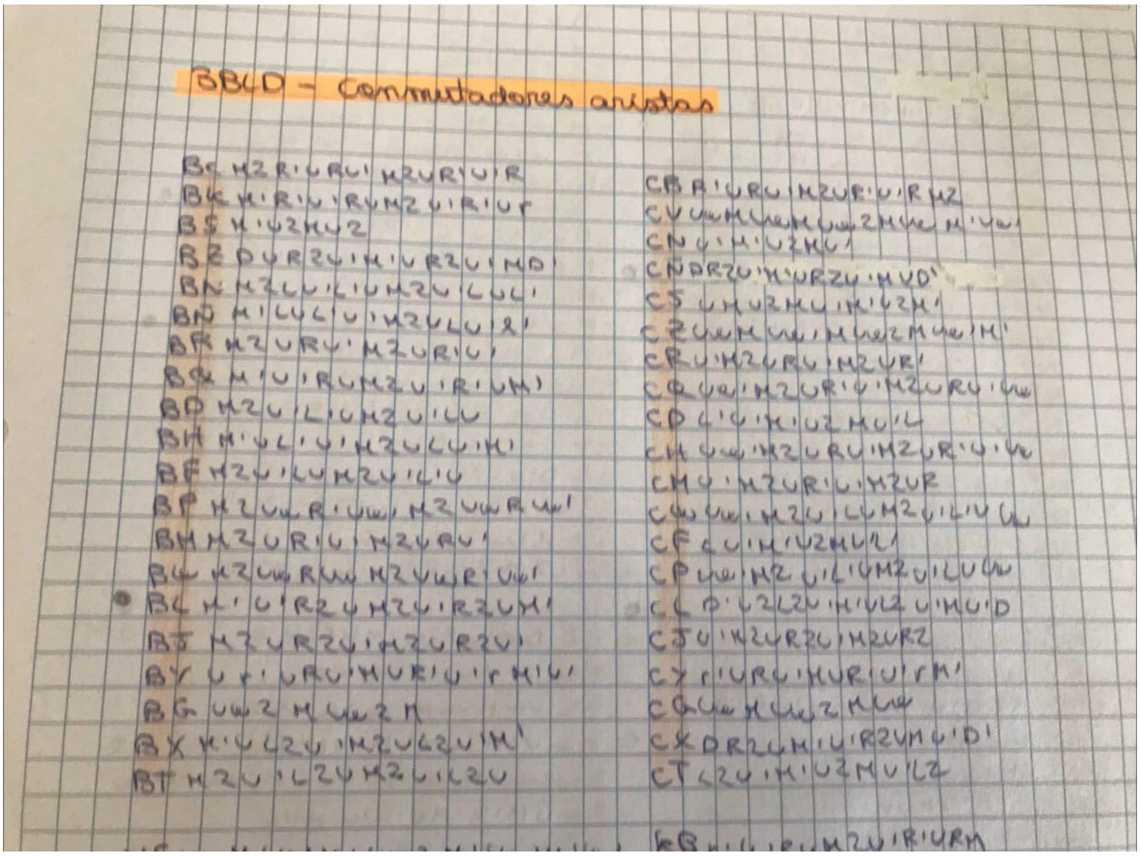



TB U2R'DR U'R'DRU'
TF L'D2LU'L'D2LU
TL DLB'R2BLB'R2 (ab)
TJ BLB'R'BLB'R
TV URDR'U'RD'R'
TX U2DL2D'R2DL2D'R2U2
TY DL2RUR'U'L2URU'R'D'
TÑ URD'R'U'RDR'
TK UD'RDR'U'RD'R'D
TW U2R'DRU'R'D'RU'
TM URD2R'U'RD2R'
TG U2RUR'U'L2URU'R'
TC R'FR'B2RF'R'B2R2
TR RF'LFR'F'L'F
TP UR2DR'U2RD'R'U2R'U'
TS R'L'U'R'L'D'LU2L'DL2R
TD FR'F'LFRF'L'
TZ UR'U2R'D'RU2R'DR2U'
HB R'URDR'U2RD'R'UR
HF D'R'U2R'DRU2R'D'R2D
HL L2D'LU2L'DLU2L'
HJ LUL'DLU2L'D'LUL'
HV U2L'U2L'DLU2L'D'U2U2
HX L2D2L'U2LD2L'U2L'
HM LUL'D'LU2L'DLUL'
HG DL2D'LU2L'DL'U2L'D'
HW R'U2R'DRU2R'D'R2
HK R'U2R'D2RU2R'D2R2
HY U2R2D'R'U2RDR'U2R'U2
HÑ R'URD'R'U2RDR'UR
HC R'D'U2R'DRU2R'D'RDR
HR R'L'U2LUR2U'L'UR2ULR
HP R'U2R'D'RU2R'DR2
HD RB2RF2R'B2RF2R2
HS L2DL'U2LD'L'U2L'
HZ R2U(HB)U'R2

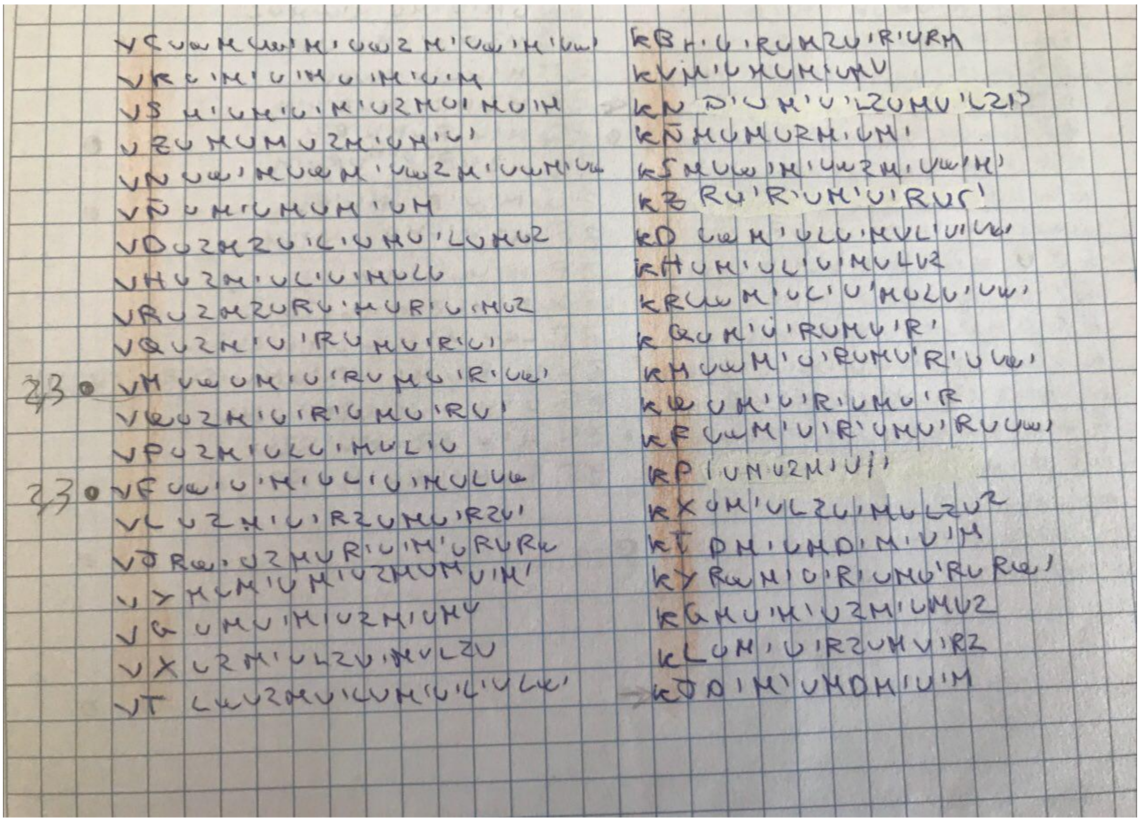

NB U'L'UR2U'L'UR2
NC FU'L'URU2'UR2F'
NR B'R'F'RBR'FR
NP U'L'URU'L'UR'
NF U'DL'URU'L'URD'
NL F'U'L'URU'L'URF
NJ D'U'L'UR2U'L'UR2D
NV U'L'URU'L'UR
NX RD'RUR'R'DRU2R2
NM F'L'URU'L'URU'F'
NG L2URU'L2URU'
NW B'R'F2RBR'F2R
NK LURU'L'URU'
NY D'RD'RU2R'DRU2R2
NÑ L2U2LD'L'U2LDL'
NS B'R'FRBR'F'R
ND L'URU'L'URU'
NZ F2U'L'UR2U'L'UR2F2
CB C2R'D'RU2R'DR
CF D'U2R'DRU2R'D'RD'
C4 L'U2LUR2U'L'UR2UL
CM DU2R'D'RU2R'DRD'
CG U2RU2L'U2R'U2RU2LU2R'
CW U2R'DRU2R'D'R
CK U2R'D2RU2R'D2R
CY R'D'RDRU2R'D'RU2R2DR
CÑ L'D'LU2L'DLU2
CJ D'U2R'D'RU2R'DRD'
CU L'DLU'L'D'LU2
CX RB2R'B2R'U2RB2RB2R'U2
CT R2B2RFR'B2RF'R
CH R'D'R'DRU2R'D'RU2DR
CN FR2U'L'UR2U'L'UF'
CS L'B'L'F2LB'L'F2L2
CD R2B2RF2R'B2RF2R
CZ F'R'D'RU2R'DRU2F'

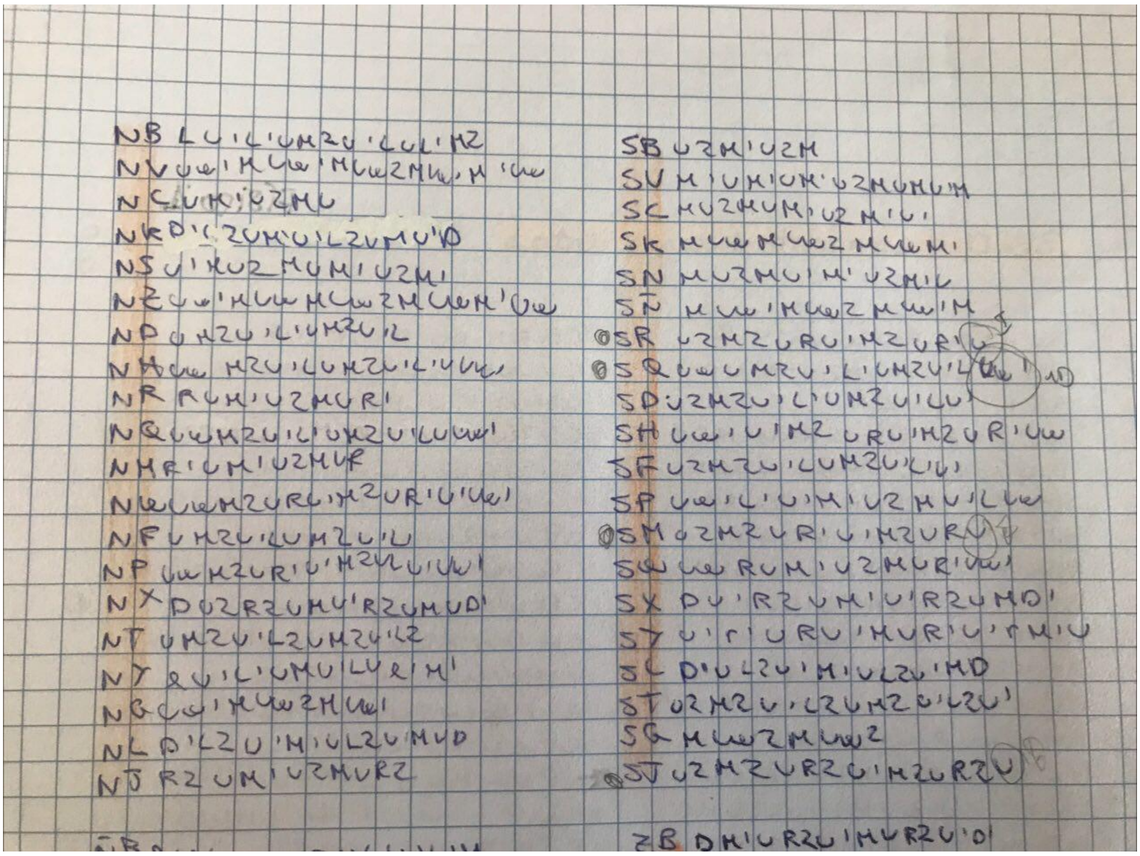

RB U2R2URDR'U'RD'RU2
RF FR'B2RF'R'B2R
RL F'LFRF'L'FR'
RJ DRURD'R'U'RDR2D'
RV RU2R'D'RU'R'DRU'R'
RX B2LF'L'B2LFL'
RM RURD2R'U'RD2R2
RG Z LD'L'U2LDL'U2Z'
RW RU2R'DRU'R'D'RU'R'
RK L2U'R'UL'U'RUL'
RY U R2D2RU'R'D2RURU'
RÑ RURD'R'U'RDR2
RT F'LFRF'L'FR
RH R2F'R2FLFR2F'L'F2R2
RN R'F'RB'R'FRB
RS L'U2L'D'LU2L'DL2
RD U'R'ULU'RUL'
RZ UL2DL'U2LD'L2U2L'U'
SB U'L'D'L'UL'DL'
SF L'D2LUL'D2LU'
SL L'B'LF2L'BLF2
SJ U'LD2L'ULD2L'
SV L'DLUL'D'LU'
SX U2LFL'U2LF'L'
SH y RD'R'URDR'U'y'
SG U RUR'U'L2URU'R'L2U'
SW U'LDL'UL'D'L'
SK D'L'DLUL'D'LU'D
SY U'D'R2DL2D'R2DL2U
SÑ L'D'LUL'DLU'
SC L2F2LBL'F2LB'L
SR L2D'LU2L'DLU2L
SP FRB'R'F'RBR'
ST L2R'D'LU2L'DLU2LR
SN R'FRB'R'F'RB
SM LU2LDL'U2LD'L2
DB LU'RUL'U'R'U

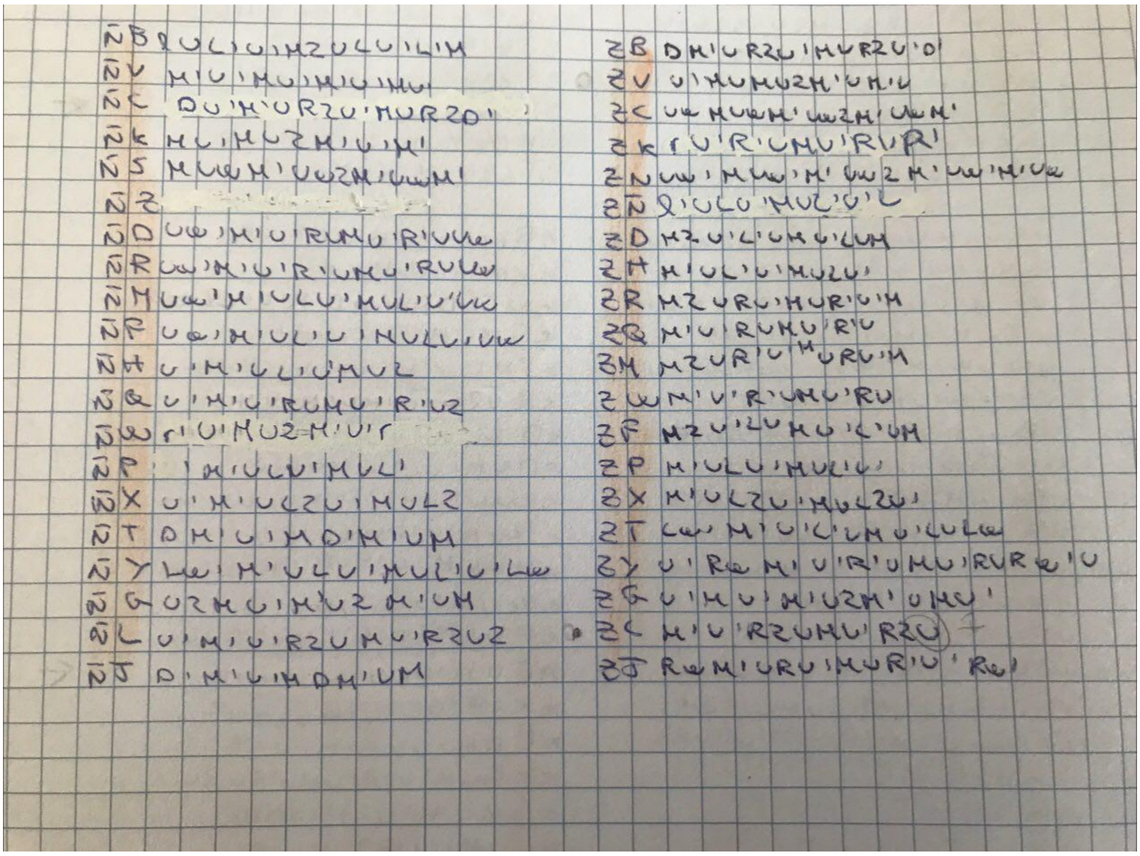

PB RUL'URU'LUR2
PF Z'RU2RD'R'U2RDR2Z
PL R'DR'URD'R'U'R2
PJ R'UR'D'RUR'DRU2R
PV RU'L'UR2U'LUR
PX U'RDL2D'R'DL2D'U
PM U'L2URU'LUR'U'L'U
PG DR'DR'UD'R'U'R2D'
PW RB'R'F2RBR'F2
PK LB'RBL'B'R'B
PY U2R2D'R'URDR'U'R'U2
PÑ L'F2LBL'F2LB'
PT URU2RDR'U2RD'R2U'
PH R2D'RU2R'DRU2R
PN RU'L'UR'U'LU
PS RB'R'FRBR'F'
PP FRF'LFR'F'L'
PZ LD2L2DR2U2DR2DL2DL'
DB LU'RUL'U'R'U
DF yURU'L2UR'U'L2U'y'
DL UR2U'L'UR2U'L
DJ UR'U'L'URU'L
DV R'URU'L'UR'U'LR
DX xRU2R'D2RU2R'D2x'
DM U'L'U'R'ULU'RU2
DG DUR2U'L'UR2U'LD'
DW U2RU'L2URU'L2U'
DK y R2U2R'D'RU2R'DR'y'
DY U'L2U'R'UL2U'RU2
DÑ U2RU'L'UR'U'L'U'
DT LFR'F'L'FRF'
DN URU'L'UR'U'L
DH R2F2R'B2RF2R'B2R'
DC R'F2R'B2RF2R'B2R2
DR LU'R'UL'U'RU
DP LFRF'L'FR'F'

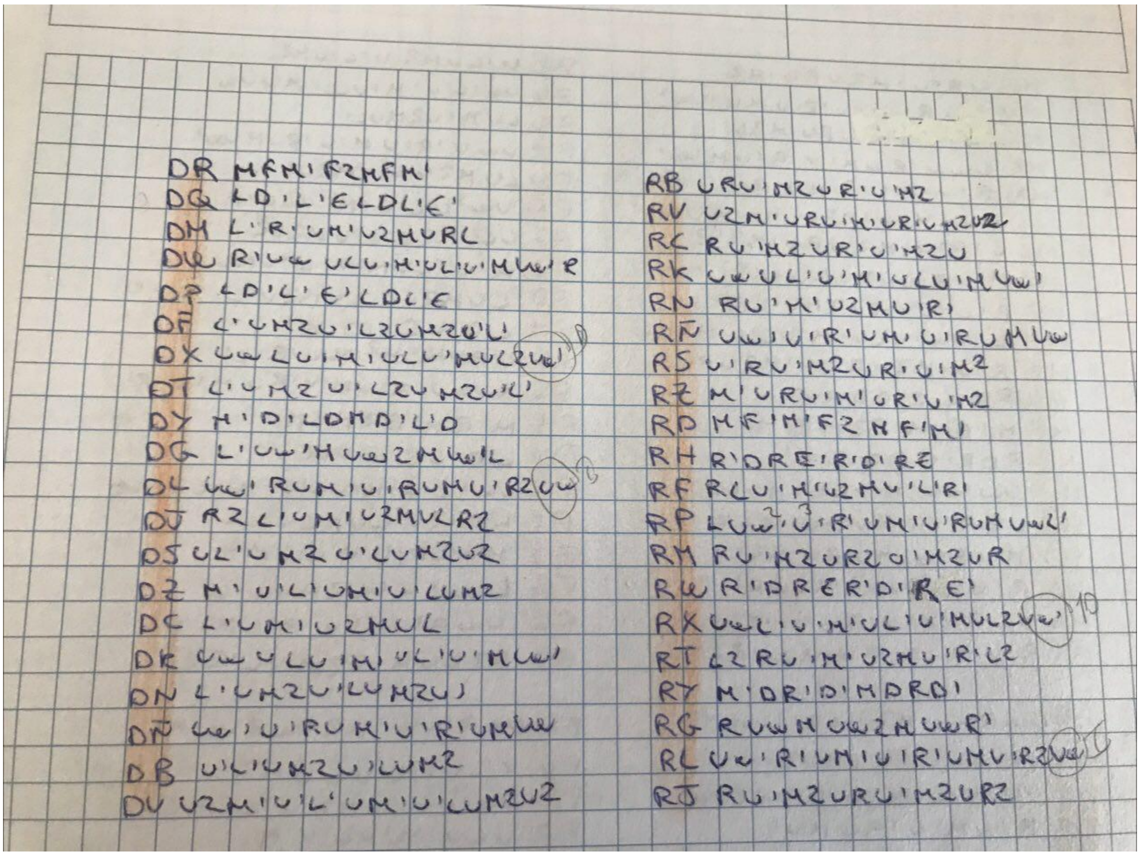


BBLD - Conmutadores aristas



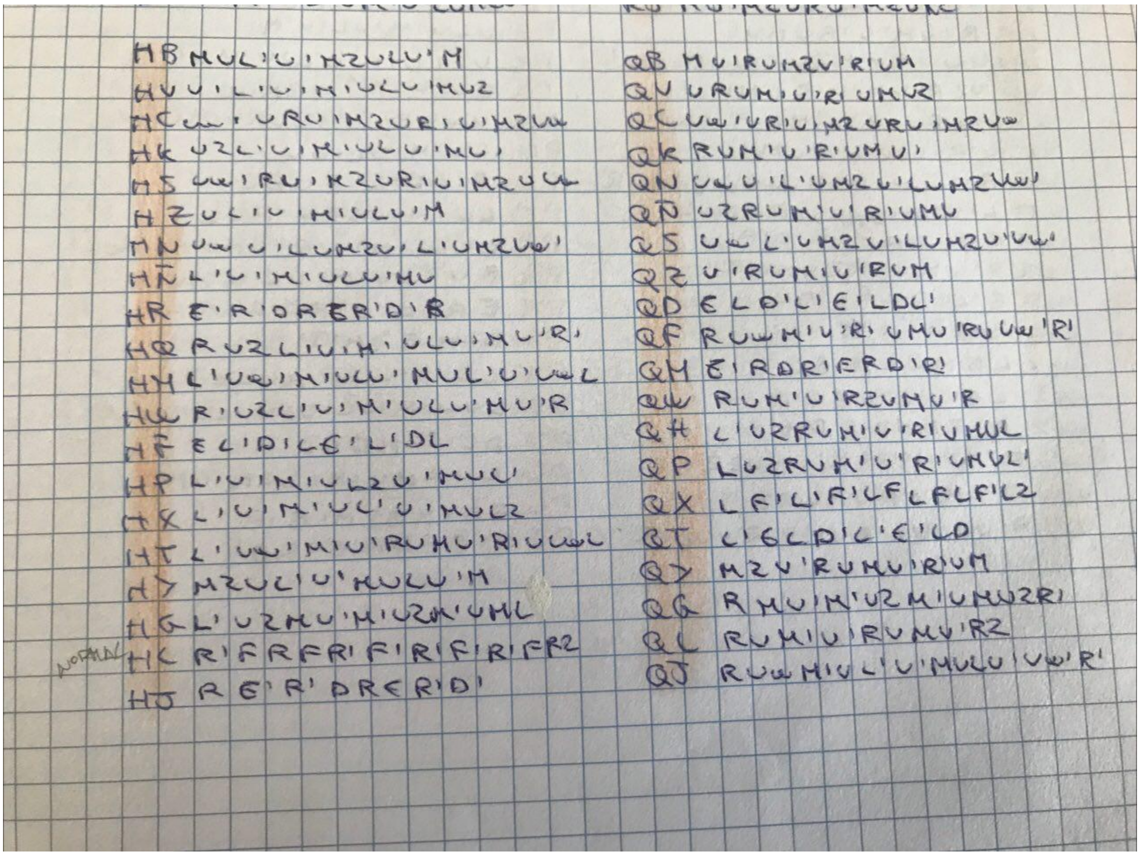






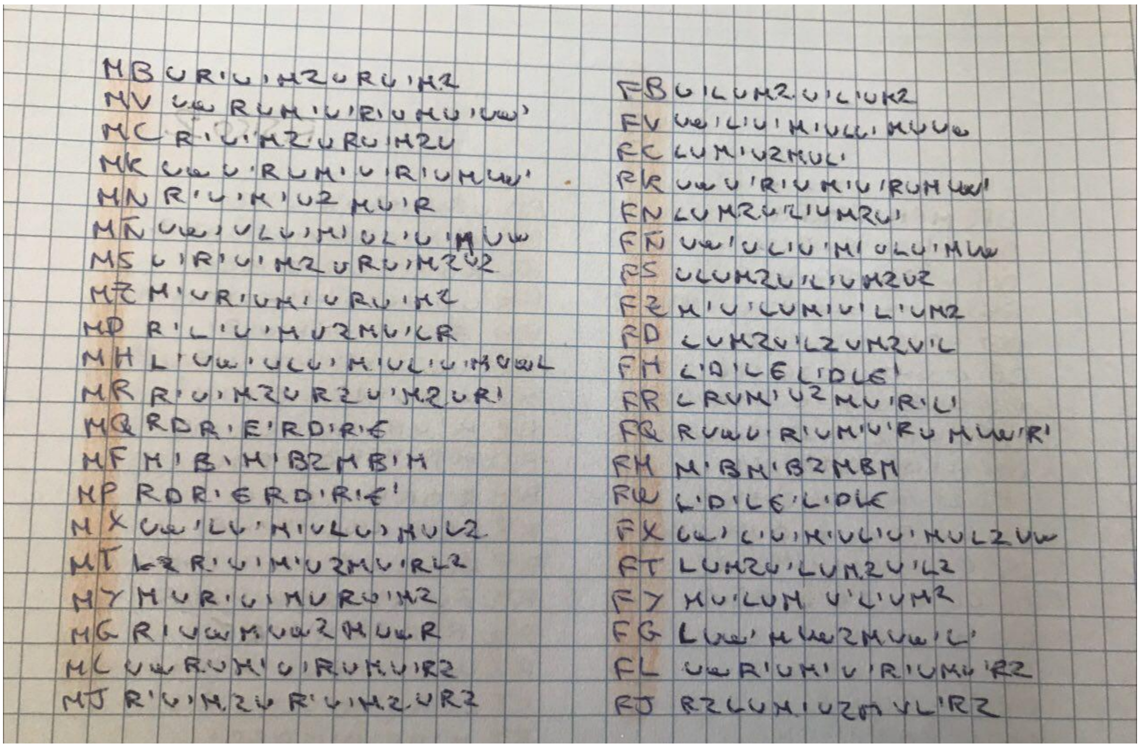
DR M F M' F2 M F M'
DQ L D' L' E L D L' E'
DM L' R' U M' U2 M U R L
DW R' Uw U L U' M' U L U' M Uw' R
DP L D' L' E' L D L' E
DF L' U M2 U' L2 U M2 U' L'
DX Uw L U' M' U L U' M U L2 Uw'
DT L' U M2 U' L2 U M2 U' L'
DY M' D' L D M D' L' D
DG L' Uw' M Uw2 M Uw' L
DL Uw' R U M' U' R U M U' R2 Uw
DJ R2 L' U M' U2 M U L R2
DS U L' U M2 U' L U M2 U2
DZ M' U' L' U M' U' L U M2
DC L' U M' U2 M U L
DK Uw U L U' M' U L' U' M Uw'
DN L' U M2 U' L U M2 U'
DÑ Uw' U' R U M' U' R' U M Uw
DB U' L' U M2 U' L U M2
DV U2 M' U' L' U M' U' L U M2 U2

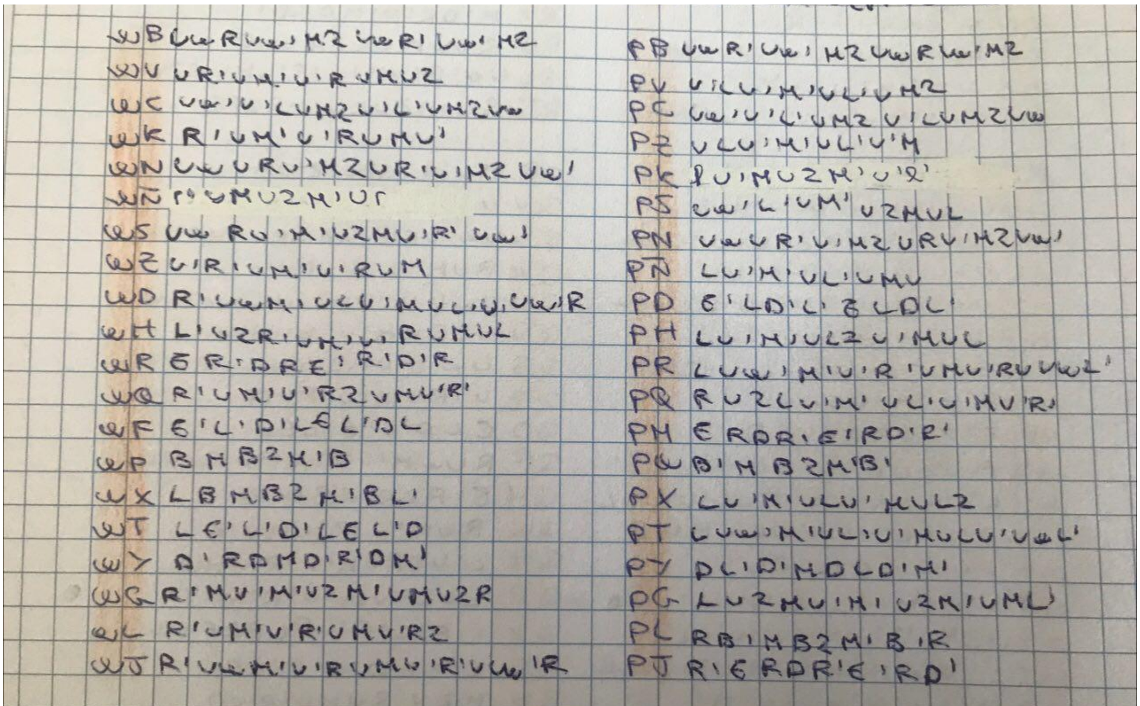
RB U R U' M2 U R' U' M2
RV U2 M' U R U' M' U R' U M2 U2
RC R U' M2 U R' U' M2 U
RK Uw U L' U' M' U L U' M Uw'
RN R U' M' U2 M U R'
RÑ Uw' U' R' U M' U' R U M Uw
RS U' R U' M2 U R' U' M2
RZ M' U R U' M' U R' U' M2
RD M F' M' F2 M F' M'
RH R' D R E' R' D' R E
RF R L U' M' U2 M U' L' R'
RP L Uw' U' R' U M' U' R U M Uw L'
RM R U' M2 U R2 U' M2 U R
RW R' D R E R' D' R E'
RX Uw L' U' M' U L' U' M U L2 Uw' 10
RT L2 R U' M' U2 M U' R' L2
RY M' D R' D' M D R D'
RG R Uw M Uw2 M Uw R'
RL Uw' R' U M' U' R' U M U' R2 Uw
RJ R U' M2 U R U' M2 U R2

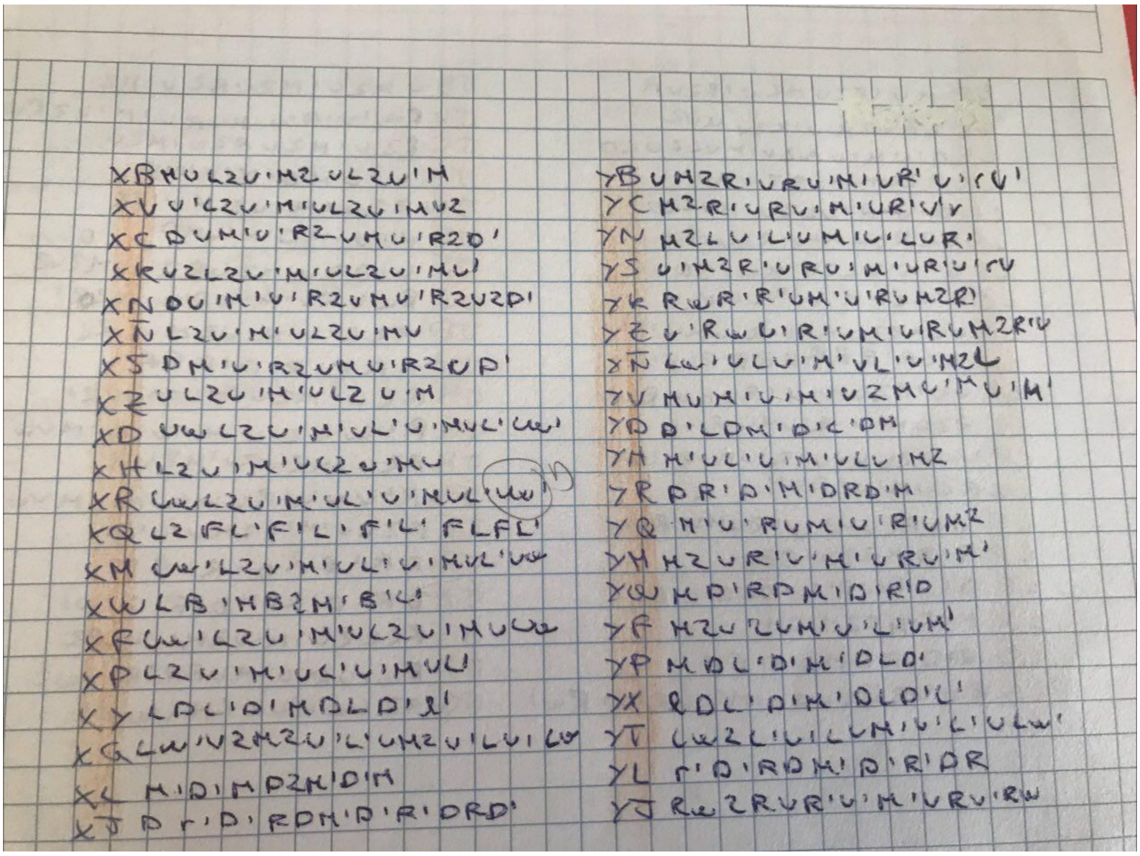


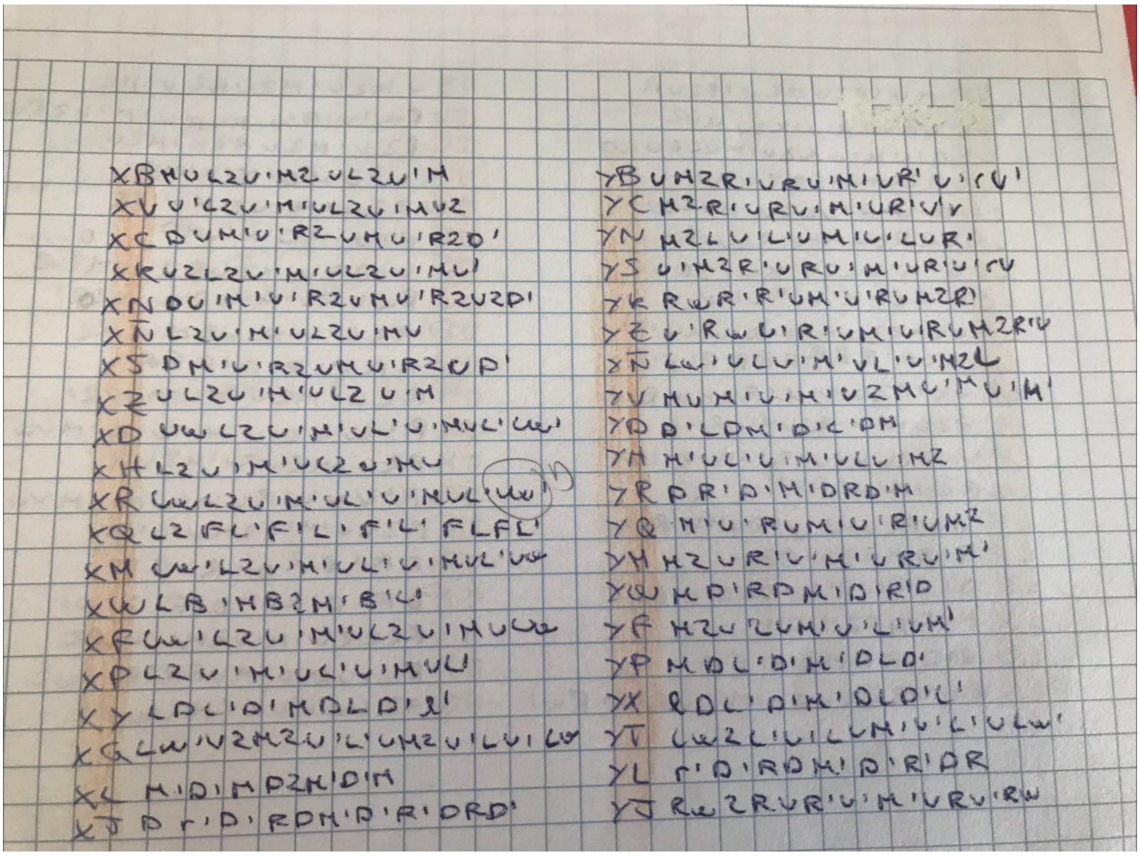
HB M U L' U' M2 U L U' M
HV U' L' U M' U L U' M U2
HC Uw' U R U' M2 U R' U' M2 Uw
HK U2 L' U M' U2 L U' M U'
HS Uw' R U' M2 U R' U' M2 U Uw
HZ U L' U' M' U L U' M
HN Uw U' L' U M2 U L' U M2 Uw'
HÑ L' U' M' U L U' M U
HR E' R' D R E R' D' R
HQ R U2 L' U' M' U L U' M U' R'
HM L' Uw' M' U L' M U L' U' Uw L
HW R' U2 L' U' M' U L U' M U' R
HF E L' D' L E' L' D L
HP L' U' M' U L2 U' M U L'
HX L' U' M' U L' U' M U L2
HT L' Uw' M' U' R U M U' R' U Uw L
HY M2 U L' U' M U L U' M
HG L' U2 M U' M' U2 M' U M L
NORMAL HK R' F R F R' F' R' F' R' F R2
HJ R E' R' D R E R' D'

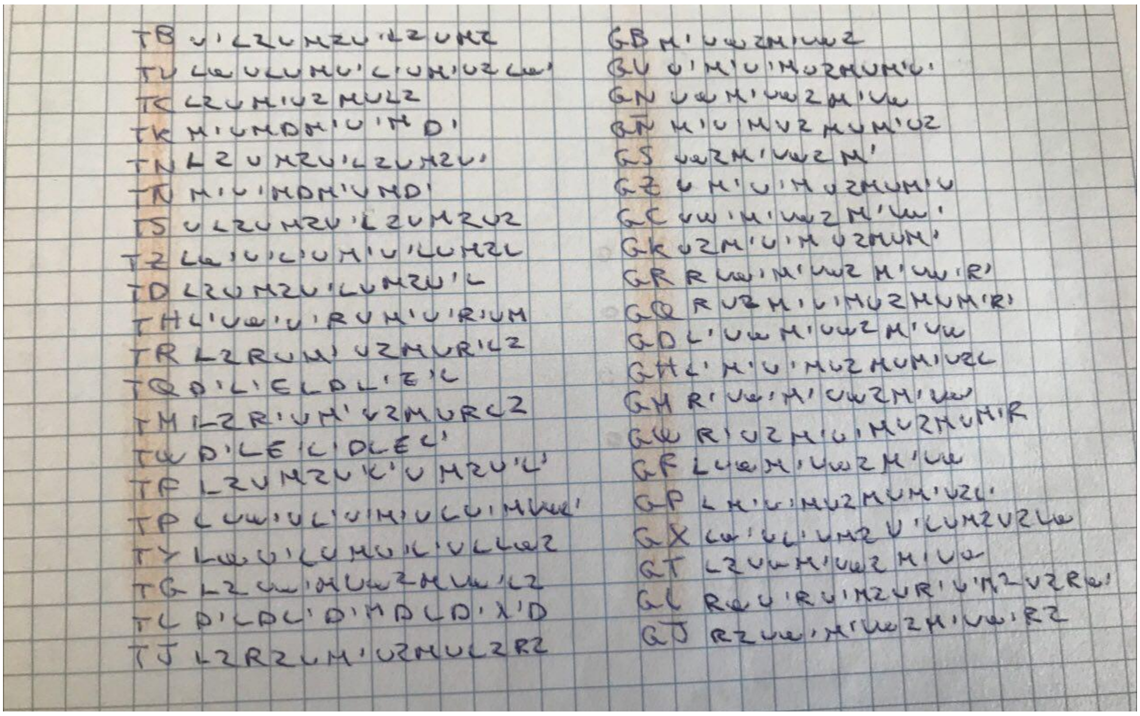
QB M U' R U M2 U' R' U M
QV U R U M' U' R' U M R
QC Uw' U R' U M2 U R U' M2 Uw
QK R U M' U' R' U M U'
QN Uw U' L' U M2 U' L U M2 Uw'
QÑ U2 R U M' U' R' U M U
QS Uw L' U M2 U' L U M2 U' Uw'
QZ U' R U M' U' R U M
QD E L D' L' E' L D L'
QF R Uw M' U' R' U M U' R U Uw' R'
QM E' R D R' E R D' R'
QW R U M' U' R2 U M U' R
QH L' U2 R U M' U' R' U M L
QP L U2 R U M' U' R' U M L'
QX L F' L' F' L F L F L F' L2
QT L' E L D' L' E' L D
QY M2 U' R U M U' R' U M
QG R M U' M' U2 M' U M U2 R'
QL R U M' U' R U M U' R2
QJ R Uw M' U L' U' M U L U' Uw' R'

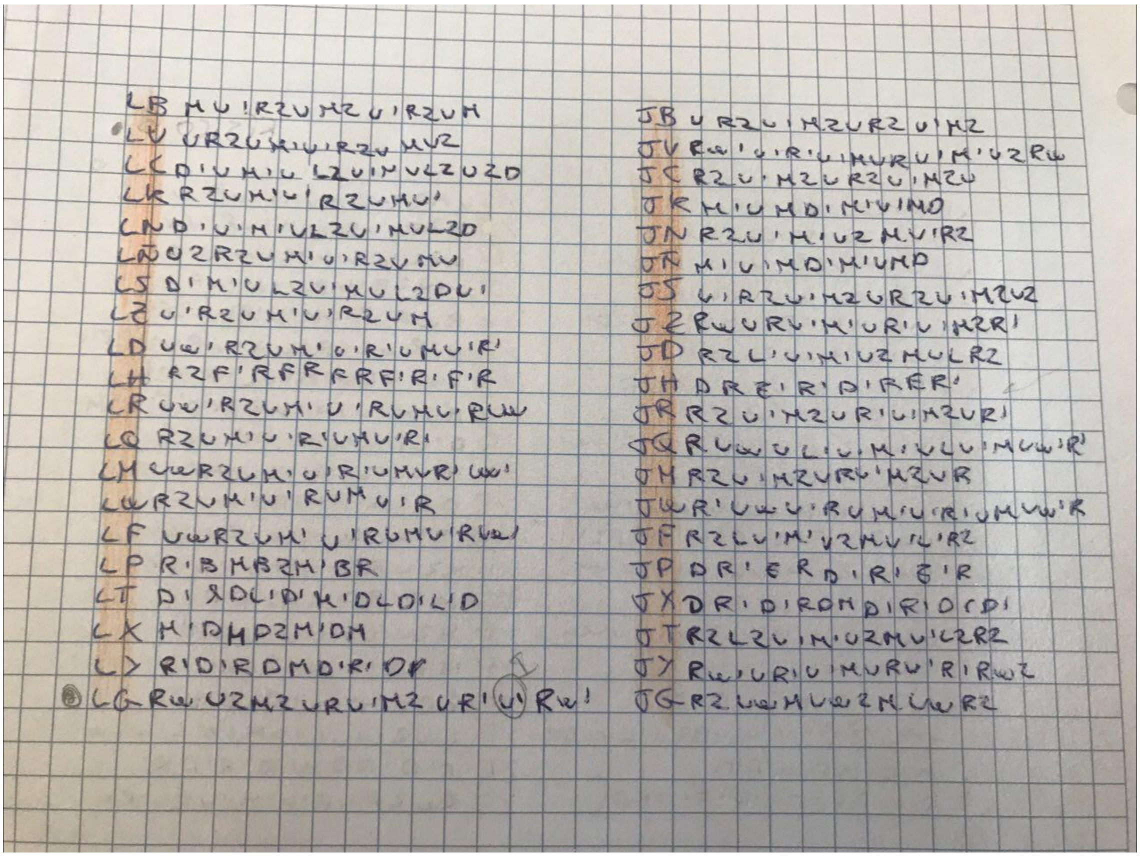




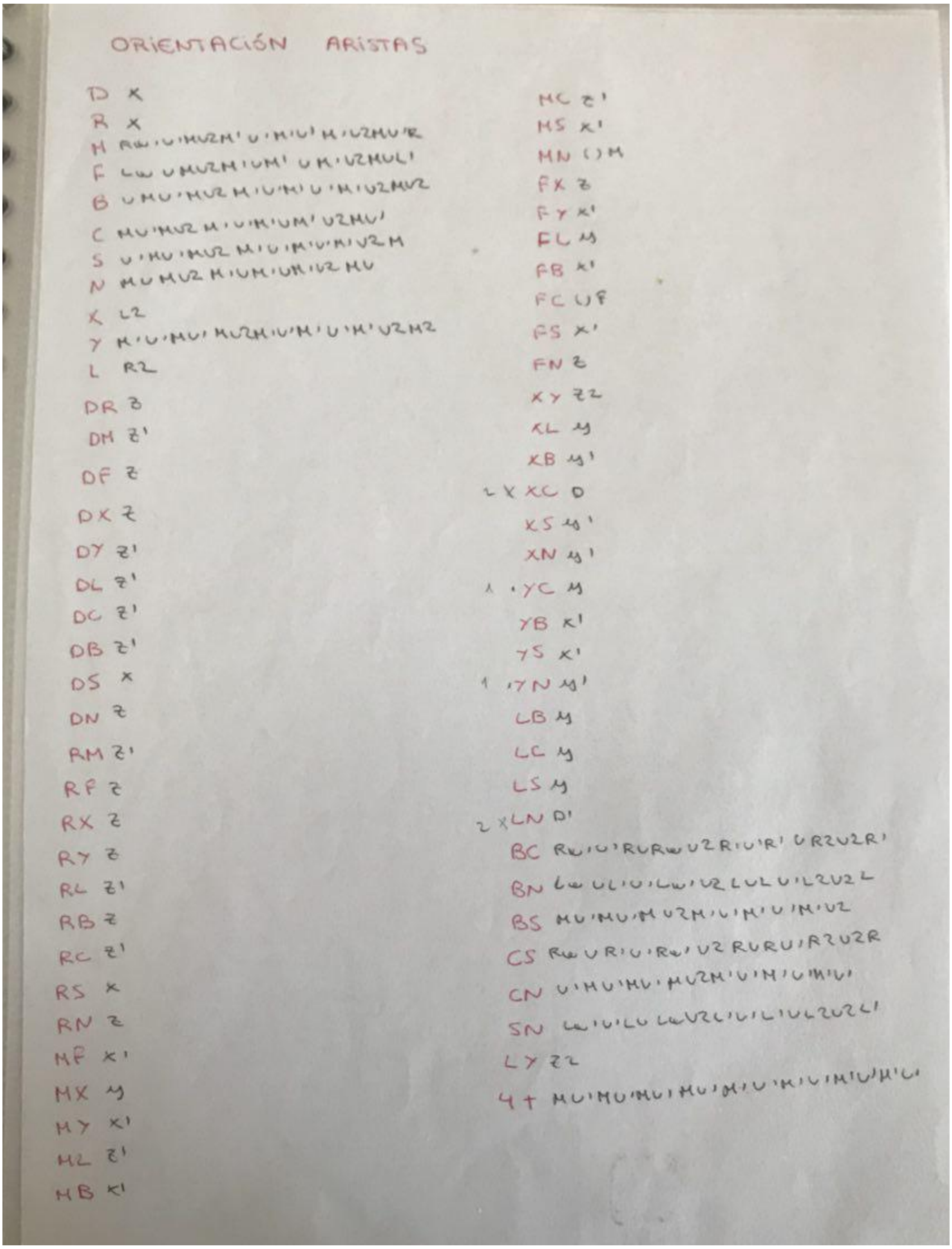








ANNEX 2. - CASOS D'ORIENTACIÓ



ORIENTACIÓN ARISTAS

D x
R x
M Rw' U' M U2 M' U' M' U' M' U2 M U' R
F Lw U M U2 M' U M' U M' U2 M U L'
B U M U' M U2 M' U' M' U' M' U2 M U2
C M U' M U2 M' U' M' U M' U2 M U'
S U' M U' M U2 M' U' M' U' M' U2 M
N M U M U2 M' U M' U M' U2 M U
X L2
Y M' U' M U' M U2 M' U' M' U' M' U2 M2
L R2
DR z
DM z'
DF z
DX z
DY z'
DL z'
DC z'
DB z'
DS x
DN z
RM z'
RF z
RX z
RY z
RL z'
RB z
RC z'
RS x
RN z
MF x'
MX y
MY x'
ML z'
MB x'

MC z'
MS x'
MN ( ) M
FX z
FY x'
FL y
FB x'
FC UF
FS x'
FN z
XY z2
XL y
XB y'
2 X XC D
XS y'
XN y'
1 · YC y
YB x'
YS x'
1 · YN y'
LB y
LC y
LS y
2 X LN D'
BC Rw' U' R U Rw U2 R' U' R' U R2 U2 R'
BN Lw U L' U' Lw' U2 L U L U' L2 U2 L
BS M U' M U' M U2 M' U' M' U M' U2
CS Rw U R' U' Rw' U2 R U R U' R2 U2 R
CN U' M U' M U' M U2 M' U' M' U M' U'
SN Lw' U' L U Lw U2 L' U' L' U L2 U2 L'
LY z2
4 + M U' M U' M U' M U' M' U' M' U' M' U' M' U'

ORIENTACIÓN DE ESQUINAS

1. Peces
Faros

2. L' U2 L R U R' U L' U L R U2 R' U'
U R U2 R' L' U' L U' R U' R' L' U2 L

3. U L R U2 R' U' R U' R' L' U2 L U L'
L U' L' U2 L R U R' U R U2 L' R' U'

5. MÑ + ÑW
L2 U R U' L2 U R2 D R U R' D' R U2

6. BV + VF
U2 L R U L' U L U2 L' R' U' R U' R'

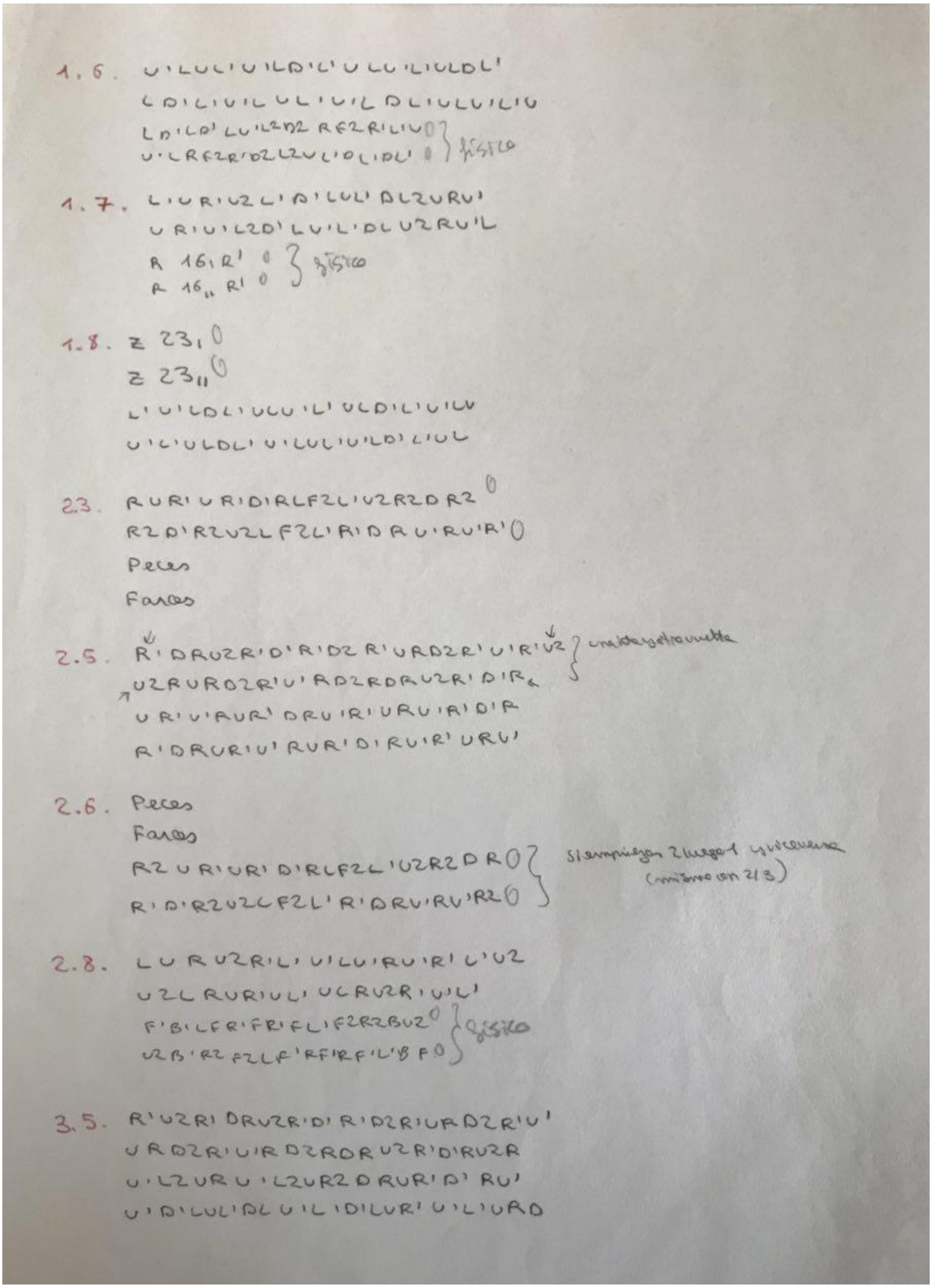
7. R' U' L2 D' L U' L' D L U2 R U' L U
U' L' U R' U2 L' D' L U L' D L2 U R

8. Peces
Faros

1.2. Peces
Faros
L U L' U R' U2 L U2 R U R' U L' U2 R U2
U2 R' U2 L U' R U' R' U2 L' U2 R U' L U' L'

1.3. U R U' L' U R' U' R U R' U' L U R U' R'
R U R' U' L' U R U' R' U R U' L U R' U'
0 L' U' L U' L D L' R' F2 R U2 L2 D' L2
0 L2 D L2 U2 R' F2 R L D' L' U L' U L

1.5. Peces
Faros
0 L' U L' D L2 U2 R' F2 R L D' L' U
0 U' L D L' R' F2 R U2 L2 D' L U' L



1.6. U'LUL'U'LD'L'U LU'L'ULDL'
L D'L'U'L UL'U'L DL'ULU'L'U
L D'LD' LU'L2D2 RF2R'L'U) físico
U'LRF2R'D2L2UL'DL'DL')

1.7. L'UR'U2L'D'LUL' DL2URU'
U R'U'L2D' LU'L'DL U2RU'L
R 16, R') físico
R 16,, R')

1.8. Z 23,
Z 23,,
L'U'LDL'ULU'L'ULDL'U'LU
U'L'ULDL' U'LUL'U'LD' L'UL

2.3. RUR'UR'D'RLF2L'U2R2DR2
R2D'R2U2LF2L'R'D RU'RU'R'
Peces
Fares

2.5. R'DRU2R'D'R'D2 R'URD2R'U'R'U2) una vuelta y otra vuelta
U2RURD2R'U'RD2RDRU2R'D'R)
U R'U'RUR' DRU'R'URU'R'D'R
R'DRUR'U'RUR'D'RU'R'UR'U'

2.6. Peces
Fares
R2 U R'UR' D'RLF2L'U2R2D R) Si empiezan 2 luego 1 y viceversa
R'D'R2U2LF2L'R'DRU'RU'R2) (mismo con 2/3)

2.8. L U R U2R'L' U'LU'RU'R' L'U2
U2L RUR'UL' ULRU2R'U'L'
F'B'LFR'FR'FL'F2R2BU2) físico
U2B'R2F2LF'RF'RF'L'B F)

3.5. R'U2R' DRU2R'D' R'D2R'URD2R'U'
U R D2R'U'R D2RDR U2R'D'RU2R
U'L2URU'L2UR2 D RUR'D' RU'
U'D'LUL'DL U'L'D'LUR' U'L'URD

3.6. R U'R U2 R U'R U2 R U'R U R2 U R2 U
U'R2 U'R2 U' R' U R' U2 R'U R'U2 R'U R'
R'U'R D R'U R U'R'U R D'R'U'R U
U' R'U R D R'U'R U R'U' R D' R'U R

3.7. Peces
Caros
U R'U R'D'R L F2 L'U2 R2 D R' O
R D'R2 U2 L F2 L'R'D R U'R U'O

nada y lonjas
subes en rada

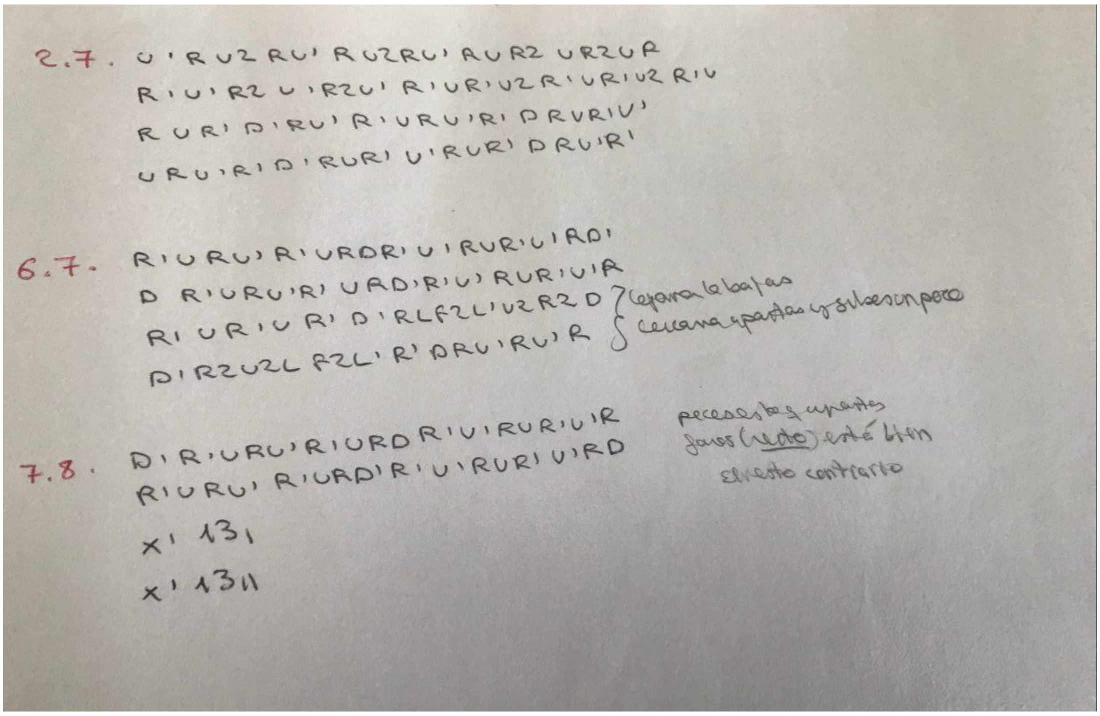
3.8. U'L U'R U2 L' U2 R'U' R U'L U2 R'U2 L'
L U2 R U2 L'U R'U R U2 L U2 R'U L'U
U'R U R'U'R D'R'U R U' R'U R D R'
R D'R'U'R U R' U'R D R' U R U'R'U

5.6. D R U2 R' D'R'D2 R'U R D2 R'U'R'U2 R'
R U2 R U R D2 R' U'R D2 R D R U2 R'D'
R U R'U'R U R' D R U'R' U R U'R'D'
D R U R'U'R U R'D'R U'R'U R U'R'

5.7. D2 R' U R D2 R'U' R'U2 R' D R U2 R' D'R'
R D R U2 R'D' R U2 R U R D2 R'U'R D2
R'U R U'R'U R D2 R'U'R U R'U'R D2
D2 R'U R U' R'U R D2 R'U' R U R'U'R

58. $\mathbb{Z}_{13,1}$ 0
$\mathbb{Z}_{13,11}$ 0
L U'L' U L U'L'D' L U L'U'L U L'D
D'L U'L' U L U'L'D L U L'U'L U L'

68. R'D'R'U R D R'U'R'U2 R' D2 R U2 R'D2
D2 R U2 R'D2 R U2 R U R D'R'U'R D R
R U R'U' R U R'D2 R U'R'U R U' R'D2
D2 R U R' U'R U R' D2 R U'R'U R U'R'

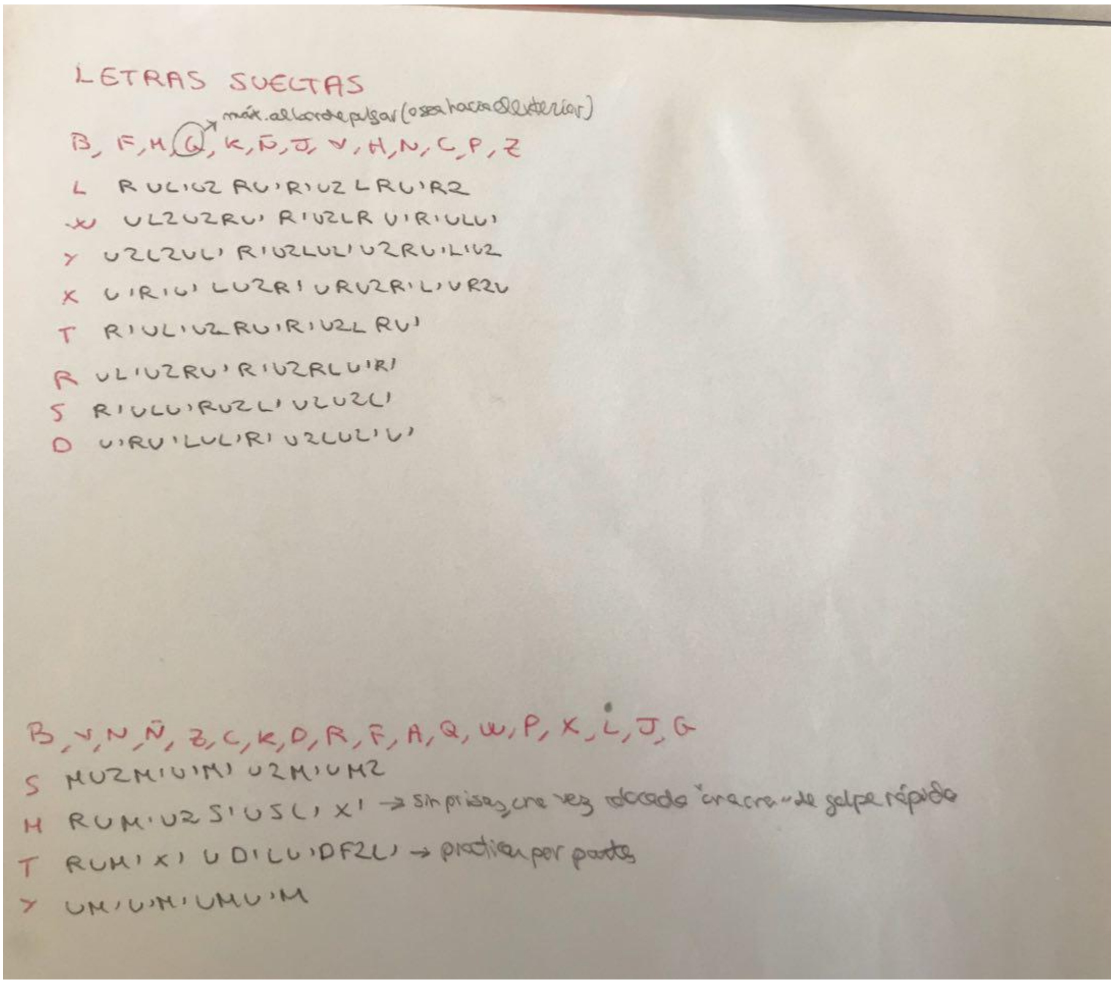


2.7. U'RU2RU' RU2RU' RUR2 UR2UR
R'U'R2 U'R2U' R'UR'U2R'UR'U2 R'U
RUR' D'RU' R'URU'R' DRURU'
URU'R'D'RUR' U'RUR' DRU'R'

6.7. R'URU'R'URDR'U'RUR'U'RD'
D R'URU'R' URD'R'U' RUR'U'R
R'UR'U R' D'RLF2L'U2R2D
D'R2U2L F2L'R' DRU'RU'R

7.8. D'R'URU'R'URDR'U'RUR'U'R
R'URU' R'URD'R'U'RUR'U'RD
x' 13'
x' 13''

ANNEX 3. - CASOS DE SIGNATURA SENAR SIMPLIFICATS



LETRAS SUELTAS

B, F, H, G, K, Ñ, J, V, H, N, C, P, Z
mát. al borde pulgar (osea hacia el exterior)

L R U L' U2 R U' R' U2 L R U' R2

W U L2 U2 R U' R' U2 L R U' R' U L U'

Y U2 L2 U L' R' U2 L U L' U2 R U' L' U2

X U' R' U' L U2 R' U R U2 R' L' U R2 U

T R' U L' U2 R U' R' U2 L R U'

R U L' U2 R U' R' U2 R L U' R'

S R' U L U' R U2 L' U L U2 L'

D U' R U' L U L' R' U2 L U L' U'

B, V, N, Ñ, Z, C, K, D, R, F, A, Q, W, P, X, L, J, G

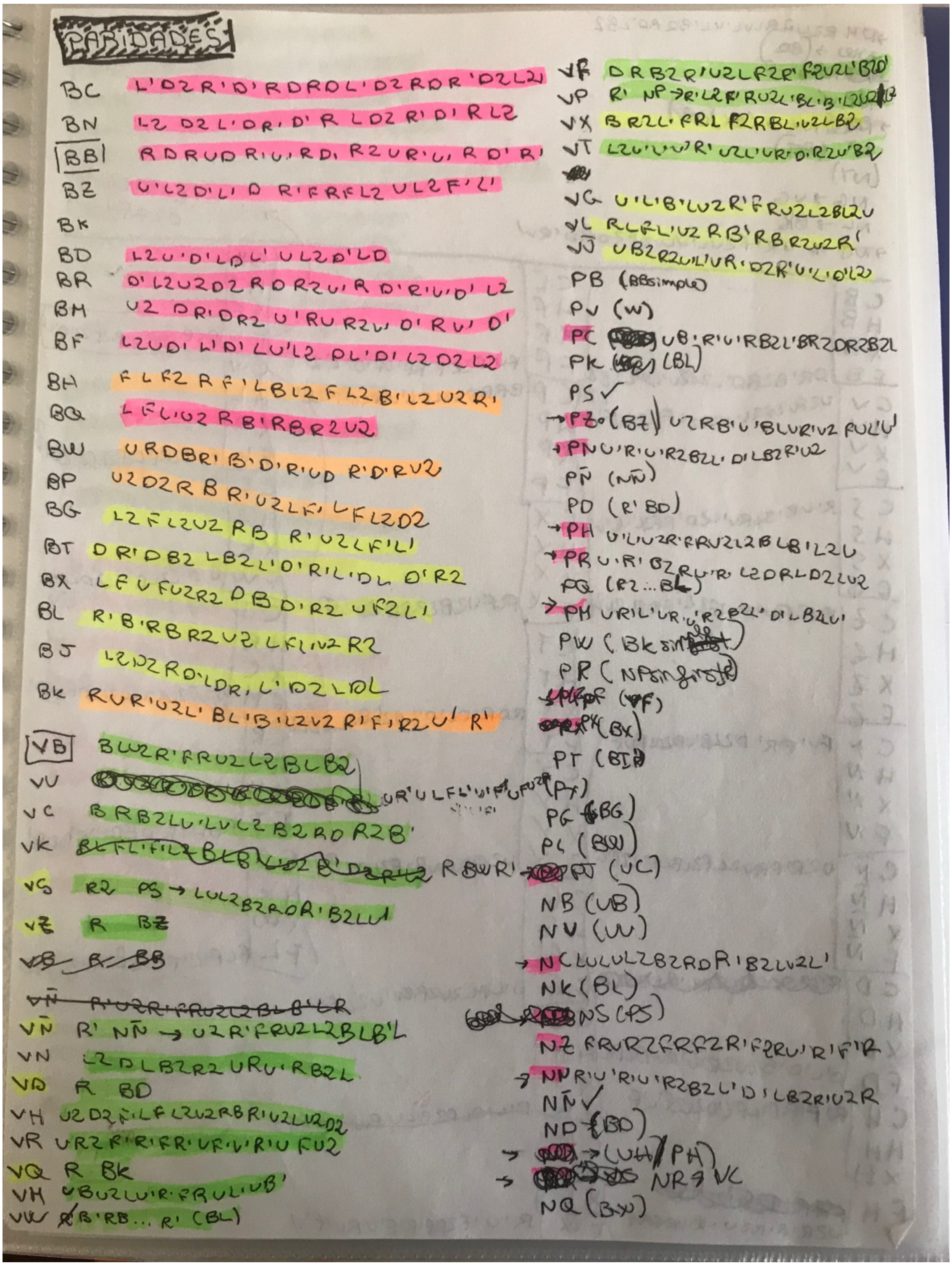
S M U2 M' U' M' U2 M' U M2

H R U M' U2 S' U S L' X' → sin prisas, una vez colocado "cracra" de golpe rápido

T R U M' X' U D' L U' D F2 L' → practicar por partes

Y U M' U' M' U M U' M

ANNEX 4. – CASOS DE SIGNATURA SENAR COMPLETS



TB: U R2 B2 L' D' L B2 R' U R' U2

TV: U R' U2 L F U U2 R B' R B R' U'

TN: F2 B2 L2 U' L' U L' B2 R D' R' L2

RÑ: R U2 R' R R' F2 L R' R F' L2 U2 L

JS: R D' L' D2 R' D L' D' B2 D' R2 F2 U' R2

CZ: F2 R U' R' F' R U R' F2 U' F' U F

RC: U R' U' R2 B2 L' D' L B2 R'

RK: R' L F R U2 L2 B L B' L U2 L'

TH: U' L' U B' U B U2 L U' R' F R U2

~~RH: U L' U2 R' F R U2 L2 B2 B' U2 U~~

RR: ~~U R' B2 R U' R' L2 D R L D2 L~~

~~LO: L2 F2 R F R F2 R' L' F R F H'~~

JM: R L' D' L B2 R' U R' U' R2 B2 R'

TD: F U2 L' U L F2 R2 D R D' R F2 U2 F'

TF: L U' L U L2 B2 R D R' B2

JP: B2 R' U2 L F' L' U2 R2 B' R' B'

LX: L2 F B L' F' L B' L2 F L' F'

JT: U R2 D R U' L U2 R U L U L2 B2

JY: U B R' U R' U' R2 B2 L' D' L B U'

JG: B' L U2 R' F R U2 L2 B L

LC: L' D' L D L2 U' L' U L F2 U F2 L2

RW: U' R2 F R U R L2 B L B' L U2 R U

TQ: U2 L F L' U' F' U F U2 R U R' U'

JC: B' R B2 L U' L U L2 B2 R D R2 B

TK: U2 F2 R U' R' F R U R' F U' F U'