TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Inversió d'Automorfismes sobre Grups

Autor: Pere Planell Morell

Director: Enric Ventura Capell

Departament: Departament de Matemàtica Aplicada III

Convocatòria: Curs 2014/15, 2n Quadrimestre, Convocatòria Ordinària

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball Final de Grau

Inversió d'Automorfismes sobre Grups

Pere Planell Morell

Director: Enric Ventura Capell

Departament de Matemàtica Aplicada III

Resum

Paraules clau: automorfisme, *outer* automorfisme, inversió d'automorfisme, norma d'un automorfisme, grup lliure, grup abelià lliure

MSC2000: 20E05, 20E36, 20F65

L'objectiu del treball és poder mesurar la màxima diferència que hi ha entre la norma d'un automorfisme d'un grup finitament generat G i la norma del seu invers. Per fer-ho construirem normes pels grups G, Aut G i Out G, que ens permetran definir, per a qualsevol grup finitament generat G, dues funcions de complexitat α_G i β_G que mesuraran en funció de la norma dels automorfismes, respectivament de l'*outer* automorfisme, la pitjor inversió possible (i.e. la norma de l'automorfisme invers més gran possible).
Ens centrarem especialment en els grups lliures F_r de rang r, separant el cas de $r = 2$ de la resta de rangs. Pel cas $r = 2$ trobarem el caràcter assimptòtic de α_2 i l'expressió exacte de β_2. Per $r \geq 3$ aconseguirem cotes inferiors polinomials per α_r i β_r i una cota superior per β_r també polinomial.
A la part final del treball estudiarem el grup lliure abelià que encara no havia estat tractat i trobarem el caràcter assimptòtic de α_r.

Abstract

Keywords: automorphism, outer automorphism, inverse automorphism , norm of an automorphism, free group, free abelian group

MSC2000: 20E05, 20E36, 20F65

The goal of this project is to measure the maximum possible gap between the norm of an automorphism of a finitely generated group G and the norm of its inverse. To achieve this, we are going to build norms for G, Aut G and Out G, which will allow us to define, for any finitely generated group G, the two complexity functions α_G and β_G. These two functions measure the worst possible inversion depending on the norm of the automorphism, respectively of the outer automorphism (i.e. the biggest norm for the inverse automorphism).
Focusing our attention on the free groups F_r of rank r, we will distinguish two cases: $r = 2$ and $r \geq 3$. For the rank 2 case we will find exact asymptotic behaviour of α_2 and the exact value of β_2, whereas for the $r \geq 3$ case, we are going to find a polynomial lower bound for α_r and β_r, and for β_r we will find also a polynomial upper bound.
In the final part of the project we will study the free abelian group that hasn't been studied yet, and we will find the exact asymptotic behaviour of α_2.

Índex general

Capítol 1
Introducció

Un problema recurrent en moltes branques de les matemàtiques és calcular l'aplicació inversa d'una aplicació ja coneguda. La dificultat és que, sovint, aplicacions que poden semblar senzilles tenen una inversa molt complexe de calcular. L'objetciu d'aquest treball és veure quina relació hi ha entre les normes dels automorfismes sobre grups i les seves inverses, centrant-nos sobretot en el grup lliure. La major part del treball es basa en l'article *Bounding the gap between a free group (outer) automorphism and its inverse* de Manuel Ladra, Pedro Silva i del professor Enric Ventura, menys la part final, en la que analitzarem el cas del grup lliure abelià que encara no ha estat tractat.

L'estructura del treball consistirà, primer, en definir una norma sobre un grup G i una altre norma sobre els automorfismes d'aquest grup (Aut G). Gràcies a aquesta norma definirem les funcions α_G i β_G que mesuraran la complexitat de les inverses del elements de Aut G i Out G (que definirem més endevant). A continuació ens centrarem en el grup lliure, separant dos casos, quan el rang és 2 o quan el rang és $r \geq 3$. El motiu és que, com veurem, per $r = 2$ les eines que tenim ens permeten arribar a resultats concrets mentre que per a rangs superiors només podem aconseguir cotes. Per finalitzar veurem el cas del grup lliure abelià que serà més fàcil de tractar que no pas els altres.

De moment, en aquest capítol introductori, definirem els conceptes que farem servir al llarg del treball. També veurem algunes propietats generals de les funcions de complexitat α_G i β_G.

1. Definicions

Sigui G un grup finitament generat per un conjunt $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Podem definir una norma evident per qualsevol $g \in G$ que és la longitud de l'element g escrit com a producte de a_i's de la forma més curta possible. És a dir que $|g|_A \leq n$ si i només si existeix un $m \leq n$ tal que $g = a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}^{\epsilon_m}$, on $\epsilon_i = \pm 1$ i $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, r\}$. Algunes propietas bàsiques d'aquesta norma són:

Lema 1.1. *Propietats bàsiques de la norma* $|\cdot|_A$*:*

(i) $|1|_A = 0$*,*

(ii) $|g^n|_A \leq |n||g|_A$*,*

(iii) $|gg'|_A \leq |g|_A + |g'|_A$*.*

El conjunt d'automorfismes del grup G el notem Aut G que també és un grup. Per convenció direm que els automorfismes actuen per la dreta, i.e. $\varphi\colon G \to G$, $g \mapsto g\varphi$. El grup Aut G té el subgrup normal $\Lambda = \{\lambda_g \mid g \in G\}$, on λ_g és la conjugació per g: $x\lambda_g = g^{-1}xg$. És un subgrup normal ja que

$$x\lambda_g\varphi = (g^{-1}xg)\varphi = (g\varphi)^{-1}(x\varphi)(g\varphi) = x\varphi\lambda_{g\varphi}, \tag{1}$$

per qualsevol $x \in G$. Aquest subgrup és fonamental per tot el que vindrà més endevant, i ens permet definir el grup Out $G = (\mathrm{Aut})/\Lambda$, on cada element $[\varphi] = \varphi\Lambda$ l'anomenem un *outer automorfisme*.

Tot automorfisme $\varphi \in$Aut G queda unívocament determinat per la imatge del conjunt de generadors A. Per tant, una manera de definir una norma sobre Aut G és la suma de les normes de les imatges de A:

$$\|\varphi\|_A = \sum_{i=1}^{r} |a_i\varphi|_A. \tag{2}$$

Aquest valor intenta representar la complexitat de cada automorfisme i evidentment només pren valors en $\mathbb{N}$. En el cas que φ sigui un automorfisme sabem que $a_i\varphi \neq 1$, ja que sinó no seria injectiva, i conseqüentment $\|\varphi\|_A \geq r$ per $\forall\varphi \in$ Aut G. L'automorfisme més simple possible és la identitat que té $\|Id_G\|_A = r$. Una altre propietat que utilitzarem sovint és que $\|g\varphi\|_A \leq |g|_A\|\varphi\|_A$, $\forall g \in G$ i $\forall \varphi \in$ Aut G. Això es veu ja que si $|g| = m$ i $g = a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}^{\epsilon_m}$, amb $\epsilon_i = \pm 1$ i $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, r\}$, aleshores $|a_{i_k}^{\epsilon_k}\varphi| < \|\varphi\|$ per $k = 1, \ldots, m$.

Construim ara també una norma per a qualsevol $\Phi \in$ Out G. Ho fem a través de la norma que acabem de definir per Aut G:

$$\|\Phi\|_A = \min\{\|\varphi\|_A \mid \varphi \in \Phi\}. \tag{3}$$

És evident que $\|[\varphi]\|_A \leq \|\varphi\|_A$.

Propietat 1.2. *El conjunt d'elements de Aut G que compleixen que $\|\varphi\|_A \leq n$, amb $\varphi \in$ Aut G, és finit. Respectivament també podem veure que el subconjunt de Out G amb $\|\Phi\|_A \leq n$ és finit.*

Demostració. Una manera senzilla de veure-ho és que com per tot $i \in \{1, \ldots, r\}$ tenim $1 \leq |a_i\varphi| \leq n - r + 1$ i que $|a_i\varphi| \in \mathbb{N}$, només hi ha un nombre finit de maneres d'assignar valors a $|a_i\varphi|$ per tal que $\sum_{i=1}^{n} |a_i\varphi|_A \leq n$. A més a més el nombre expressions de $a_i\varphi$ amb la seva norma $|a_i\varphi|$ fixada també es finita. Per tant tenim un conjunt finit del qual només una petita part seran automorfismes.

La demostració per Out G és ara evident. □

L'objectiu del treball és poder donar alguna eina per saber com de complicada és la inversió d'un automorfisme. Amb les normes que acabem de definir volem saber quina relació hi ha entre $\|\varphi\|_A$ i $\|\varphi^{-1}\|_A$. Si $\|\varphi^{-1}\|_A$ és molt més gran que $\|\varphi\|_A$ voldrà dir que la inversa és més complicada ja que les antiimatges dels generadors de φ^{-1} tindràn unes expressions (mitjançant els mateixos generadors) més llargues que no pas les imatges d'aquests generadors per φ. Com que el que volem fer és donar una idea general de com de difícils són d'invertir els automorfismes, el que farem és buscar el pitjor dels casos per $\|\varphi\|_A \leq n$. També ens interessarà fer el mateix per Out G i buscar la relació entre $\|\Phi\|_A$ i $\|\Phi^{-1}\|_A$. Definim les funcions de complexitat d'inversió com:

$$\begin{aligned} \alpha_A(n) &= \max\{\|\varphi^{-1}\|_A \mid \varphi \in \mathrm{Aut}G, \|\varphi\|_A \leq n\}, \\ \beta_A(n) &= \max\{\|\Phi^{-1}\|_A \mid \Phi \in \mathrm{Out}G, \|\Phi\|_A \leq n\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Les funcions α_A i β_A estan definides de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Com que volem que $\alpha_A(n) = 0$ i $\beta_A(n) = 0$ per a tot $n \leq r - 1$, agafem per convenció que $\max\emptyset = 0$. És evident que les dues funcions són no decreixent, i.e. $\alpha_A(n) \leq \alpha_A(n+1)$ i $\beta_A(n) \leq \beta_A(n+1)$. I com que haviem vist que $\|[\varphi]\|_A \leq \|\varphi\|_A$ tenim que $\beta_A(n) \leq \alpha_A(n)$ ja que $\beta_A(n) = \max\{\|[\varphi^{-1}]\|_A \mid \varphi \in \mathrm{Aut}G, \|\varphi\|_A \leq n\}$.

2. Invariància als canvis del conjunt de generadors

Fins ara, les normes que hem definit per G, Aut G i Out G o les funcions de complexitat α_A i β_A, depenen del conjunt de generadors A que hem escollit al principi. Per exemple, un mateix element $\varphi \in$ Aut G pot tenir normes diferents depenent del conjunt de generadors que haguem agafat pel grup G. En aquesta secció demostrarem que la variació del conjunt de generadors de G només varia la norma de Aut G i Out G per una constant multiplicativa. També veurem que les funcions de complexitat tenen el mateix caràcter assimptòtic malgrat els canvis.

Lema 1.3. *Sigui G un grup i siguin $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$ dos conjunts de generadors finits. Aleshores existeix una constant $C \geq 1$ tal que per a qualsevol $\varphi \in$ Aut G i $\Phi \in$ Out G tenim les següents desigualtats:*

(i) $\frac{1}{C}\|\varphi\|_B \leq \|\varphi\|_A \leq C\|\varphi\|_B$,

(ii) $\frac{1}{C}\|\Phi\|_B \leq \|\Phi\|_A \leq C\|\Phi\|_B$.

Demostració. Agafem dues constants $M = \max\{|b_i|_A \mid i = 1, \ldots, s\}$, $N = \max\{|a_i|_B \mid i = 1, \ldots, r\}$, i sigui $C = MNrs \geq 1$. Aleshores per a tot $\varphi \in$ Aut G tenim:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_B = \sum_{i=1}^{s} |b_i\varphi|_B &\leq \sum_{i=1}^{s} |b_i\varphi|_A N \leq N\left(\sum_{i=1}^{s} |b_i|_A \|\varphi\|_A\right) \\ &= N\left(\sum_{i=1}^{s} |b_i|_A\right)\|\varphi\|_A \leq NMs\|\varphi\|_A \leq C\|\varphi\|_A \end{aligned} \tag{5}$$

En la primera desigualtat utilitzem que $|b_i|_B \leq |b_i|_A \max\{|a_i|_B \mid i = 1, \ldots, r\} = |b_i|_A N$ i conseqüentment $|b_i\varphi|_B \leq |b_i\varphi|_A N$ per a tot $i = 1, \ldots, s$. I en la segona desigualtat utilitzem la propietat $\|g\varphi\|_A \leq |g|_A\|\varphi\|_A$ que hem vist abans. Per simetria veiem que $\|\varphi\|_A \leq C\|\varphi\|_B$ i *(i)* queda demostrat.

Donat un $\Phi \in$ Out G existeix com a mínim un $\varphi \in \Phi$ tal que $\|\varphi\|_A = \|\Phi\|_A$. I per tant,

$$\|\Phi\|_B = \min\{\|\theta\|_B \mid \theta \in \Phi\} \leq \|\varphi\|_B \leq C\|\varphi\|_A = C\|\Phi\|_A. \tag{6}$$

I utilitzem la simetria un altre com per veure que $\|\Phi\|_A \leq C\|\Phi\|_B$ □

Nota 1.4. *Acabem de veure que canviar el conjunt de generadors d'un grup fa variar la norma de $\varphi \in Aut\ G$ i $\Phi \in Out\ G$ multiplicant-la o dividint-la com a molt per $C = MNrs$. Aquest C depen exclusivament dels conjunts de generadors A i B, i com que estem treballant sempre amb grups finitament generats C també serà sempre finit. Aquest C també ens serveix per acotar el canvi de les funcions de complexitat com veiem a continuació.*

Proposició 1.5. *Sigui G un grup i siguin $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \dots, b_s\}$ dos conjunts de generadors finits. Aleshores existeix una constant $C \geq 1$ tal que per a qualsevol $n \geq 1$ tenim les següents desigualtats:*

(i) $\frac{1}{C} \cdot \alpha_B(\lfloor \frac{n}{C} \rfloor) \leq \alpha_A(n) \leq C \cdot \alpha_B(Cn)$,

(ii) $\frac{1}{C} \cdot \beta_B(\lfloor \frac{n}{C} \rfloor) \leq \beta_A(n) \leq C \cdot \beta_B(Cn)$.

Demostració. Per a $n = 0, \dots, r-1$ els dos primers termes de les dues desigualtats són iguals a 0 i per tant totes les desigualtats es compleixen. Si ara prenem $n \geq r$ i utilitzem la constant C que hem definit en l'últim lema veiem que:

$$\begin{aligned} \alpha_A(n) &= \max\{\|\varphi^{-1}\|_A \mid \varphi \in \mathrm{Aut}G, \|\varphi\|_A \leq n\} \\ &\leq \max\{\|\varphi^{-1}\|_A \mid \varphi \in \mathrm{Aut}G, \|\varphi\|_B \leq Cn\} \\ &\leq \max\{C\|\varphi^{-1}\|_B \mid \varphi \in \mathrm{Aut}G, \|\varphi\|_B \leq Cn\} \\ &= C \cdot \max\{\|\varphi^{-1}\|_B \mid \varphi \in \mathrm{Aut}G, \|\varphi\|_B \leq Cn\} \\ &= C \cdot \alpha_B(Cn) \end{aligned} \tag{7}$$

En les dos desigualtats utilitzem l'últim lema de la següent forma: $\|\varphi\|_B \leq C\|\varphi\|_A \leq Cn$ en la primera i $\|\varphi^{-1}\|_A \leq C\|\varphi^{-1}\|_B$ en la segona ja que $\varphi^{-1} \in$ Aut G. Per simetria obtenim $\alpha_B(n) \leq C \cdot \alpha_A(Cn)$, i com que $\alpha_A \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si agafem la part entera:

$$\alpha_B\left(\left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor\right) \leq C \cdot \alpha_A\left(C \cdot \left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor\right) \leq C \cdot \alpha_A(n). \tag{8}$$

Per a tot $n \geq r$ i això completa la prova de la primera desigualtat.
Com que tot el que hem utilitzat és el lema anterior, que és igual tant per Aut G com per Out G, la demostració per β és anàloga a la de α. □

Acabem de veure com acotar els canvis de les funcions α_A i β_A si canviem el conjunt de generadors A pel conjunt B. El conjunt de funcions no decreixents de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tenen la relació d'equivalència següent: $f \sim g$ si i només si existeix una constant $C > 0$ tal que per qualsevol $n \geq 0$, $\frac{1}{C} \cdot g(\lfloor \frac{n}{C} \rfloor) \leq f(n) \leq C \cdot g(Cn)$. Per tant les funcions α_A i β_A pertanyen a la mateixa classe d'equivalencia per a quasevol conjunt de generadors que agafem. A partir d'ara notarem les funcions de complexitat α_G i β_G ja que les seves classes d'equivalència només depenen del grup G. A més a més, qualsevol representant d'aquesta classe d'equivalència ens dirà quin és el comportament assimtòtic de $\alpha_G(n)$ i $\beta_G(n)$. Comprovem ràpidament que $f \sim g$ és una classe d'equivalència. La relació $f \sim f$ és directe per ser f una funció no decreixent. La propietat de simetria l'obtenim fàcilment, si $f \sim g$:

$$\frac{1}{C} \cdot f\left(\left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor\right) \leq \frac{C}{C} \cdot g\left(C\left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor\right) \leq g(n) \leq C \cdot f(Cn). \tag{9}$$

Finalment la demostració de la propietat transitiva: si $f \sim g$ i $g \sim h$ existeix una constant $C > 0$

per $f \sim g$ i una altre constant $C' > 0$ per $g \sim h$. Aleshores:

$$(10)\quad \frac{1}{CC'} \cdot h\left(\left\lfloor \frac{n}{CC'} \right\rfloor\right) \leq \frac{1}{C} \cdot g\left(C' \left\lfloor \frac{n}{CC'} \right\rfloor\right) \leq \frac{1}{C} \cdot g\left(\left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor\right) \leq f(n) \leq C \cdot g(Cn) \leq C'C \cdot g(C'Cn).$$

La relació $f \sim g$ és d'equivalència.

Com acabem de dir, la importància de saber a quina classe d'equivalència pertanyen les funcions α_G i β_G és que ens diu com es comporten assimtòticament. Ara definim una nomenclatura bàsica per algunes classes d'equivalència que ens trobarem. Una funció f creix com a mínim amb ordre polinomic d si existeix una constant $L \geq 0$ tal que $Ln^d \leq f(n)$ per a qualsevol $n \gg 0$ (si $d = 1$ diem que creix com a mínim linealment, si $d = 2$ com a mínim quadràticament, etc.). Si existeix un d i unes constants L i M tals que $Ln^d \leq f(n) \leq Mn^d$ per a qualsevol $n \gg 0$, direm que la funció f és polinòmica d'ordre d i ho notarem $f(n) \sim n^d$.

A partir d'ara ens referirem a la diferència en la inversió d'automorfismes o d'*outer* automorfismes del grup G com les classe d'equivalencies de les funcions $\alpha_G(n)$ i $\beta_G(n)$. Per exemple direm que la diferència en l'inversió d' *outer* automorfismes de G és quadràtica si $\beta_G(n) \sim n^2$.

Fixem-nos que si $|\mathrm{Aut}G| < \infty$ o $|\mathrm{Out}G| < \infty$ aleshores $\alpha_G(n)$ i respectivament $\beta_G(n)$ són equivalents a constants. Per tant ens interessen els grups que tenen infinits (*outer*) automorfismes. D'ara en endevant en aquest treball ens centrarem en el grup lliure de rang r, F_r i notarem $\alpha_r = \alpha_{F_r}$ i $\beta_r = \beta_{F_r}$. En el següent capítol obtindrem alguns resultats tècnics que serveixen per a qualsevol grup lliure F_r. Utilitzarem aquests resultats per calcular cotes superiors i inferiors de les funcions α_r i β_r ja que no podem obtenir resultats exactes. Intentarem aproximar el màxim les dues cotes per poder tenir una idea el més precisa possible de com és la complexitat d'inversió dels (*outer*) automorfismes. Com ja hem dit ens centrarem primer en el cas $r = 2$ que ens permet utilitzar algunes eines més fortes i que per tant, ens duran a unes cotes superiors i inferiors de les funcions α_2 i β_2 molt pròximes. Després ja passarem al cas més general $r \geq 3$ on obtenir resultats precisos és molt complicat i que en el cas de α_r no s'ha trobat encara cap cota superior.

Capítol 2
El grup lliure

Abans d'entrar en com es comporten les inversions en el grup lliure, farem alguns recordatoris de notacions i definicions del grup lliure. Primer de tot començarem per com es construeix aquest grup. Sigui $A_r = \{a_1 \dots a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1}\}$ un alfabet de $2r$ simbols contenint r simbols i els seus inversos. El conjunt de paraules que podem formar amb l'alfabet A_r, i incloent-hi la paraula buida que notem 1, és un monoide lliure A_r^*, on l'operació interna és la concatenació de paraules. El submonoide $\{a_1 \dots a_r\}^*$ de A_r^* és el conjunt de totes les paraules positives de l'alfabet A_r.

Ara definem el grup lliure de rang r com $F_r = \langle a_1 \dots a_r \rangle = A_r^*/\sim$ on la relació d'equivalència és la reducció de les paraules quan $a_i a_i^{-1} \sim a_i^{-1} a_i \sim 1$. Una paraula de A_r^* és reduïda si no conté cap factor de la forma $a_i a_i^{-1}$ o $a_i^{-1} a_i$. Diem anàlogament que una paraula de A_r^* és cíclament reduïda si no conté cíclicament cap d'aquest dos factors. Llavors per a qualsevol $w \in A_r^*$, existeix una única reducció $\bar{w} \in F_r$ que representa w dins de F_r. Utilitzarem l'abús de notació de referir-nos a paraules, especialment les reduïdes, per referir-nos a elements de F_r. Per exemple la norma $|w|_A$ d'un element $w \in F_r$ és el número de lletres que té la paraula $\bar{w}$. Com que a partir d'ara sempre treballarem amb un mateix conjunt de generadors preseleccionat $A = \{a_1 \dots a_r\}$, simplificarem la notació i escriurem $|w|$ per $|w|_A$.

Com ja hem dit anteriorment, la imatge d'un automorfisme està determinada per les imatges del conjunt de generadors. En el nostre cas, tot automorfisme $\varphi \in \mathrm{Aut}\ F_r$ està determinant per les imatges de $A = \{a_1 \dots a_r\}$, que anomenem $a_1\varphi = u_1, \dots, a_r\varphi = u_r$. Per fer la notació dels automorfismes més compacte ho notarem $\varphi = \eta_{u_1,\dots,u_r}$. Quan tots els u_i, per $i = 0, \dots, r$ són paraules positives, aleshores diem que l'automorfisme $\eta_{u_1,\dots,u_r}$ és positiu. El conjunt de tots els automorfismes positius forma un submonoide de $\mathrm{Aut}\ F_r$ que l'anomenem $\mathrm{Aut}^+\ F_r$. Anàlogament també diem que un automorfisme $\eta_{u_1,\dots,u_r}$ és cíclicament reduït si les imatges de u_i, per $i = 0, \dots, r$ són paraules cíclicament reduïdes.

També deixarem de fer referència del conjunt de generadors A en les normes dels elements de Aut F_r i de Out F_r. Per exemple, per qualsevol $\varphi \in$ Aut F_r o $\Phi \in$ Out F_r escriurem:

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sum_{i=1}^{r} |a_i\varphi|, \\ \|\Phi\| &= \min\{\|\varphi\| \mid \varphi \in \Phi\}, \\ \alpha_r(n) &= \max\{\|\varphi^{-1}\| \mid \varphi \in \text{Aut } G, \|\varphi\| \leq n\}, \\ \beta_r(n) &= \max\{\|\Phi^{-1}\| \mid \Phi \in \text{Out } G, \|\Phi\| \leq n\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Nota 2.1. *Hi ha exactament $r!2^r$ automorfismes amb $\|\varphi\| = r$, que són totes les permutacions de lletres de F_r definides per $a_1 \mapsto a_{1\pi}^{\epsilon_1}, \ldots, a_r \mapsto a_{r\pi}^{\epsilon_r}$, on $\pi \in S_r$ és una permutació de $\{a_1, \ldots, a_r\}$ i $\epsilon_i = \pm 1$. Aquests automorfismes, que els utilitzarem en diverses demostracions, són els més simples possibles i els anomenem permutacions de lletres.*

Nota 2.2. *Podem definir la inclusió natural Aut $F_r \hookrightarrow$ Aut F_{r+1} mantenint fixat l'últim generador ($\forall\varphi \in$ Aut F_r definim $\varphi' \in$ Aut F_{r+1} amb $a_i\varphi = a_i\varphi'$ per $i = 1, \ldots, r$ i $a_{r+1}\varphi' = a_{r+1}$). Conseqüentment la següent desigualtat és evident: $\alpha_{r+1}(n+1) \geq \alpha_r(n) + 1$.*

En la introducció ja hem vist que canviar el conjunt de generadors d'un grup G no feia canviar la classe d'equivalència de les funcions de complexitat α_G i β_G. A continuació demostrarem un resultat encara més fort per als grups lliures. Si agafem dues bases de F_r, A i B, les funcions $\alpha_A(n)$ i $\alpha_B(n)$ són exactament iguals, i.e. $\alpha_A(n) = \alpha_B(n)$ per $n \geq 0$. I passa el mateix amb les funcions $\beta_A(n)$ i $\beta_B(n)$. Aquesta és una propietat molt més forta que no pas la de les classes d'equivalència, i per tant, recolza la idea que la complexitat d'invertir un isomorfisme no depen de la base que escollim. Amb això, té encara més sentit no fer referència de la base en què es treballa en les notacions que utilitzem.

Propietat 2.3. *Siguin A i B dues bases de F_r. Aleshores, $\alpha_A(n) = \alpha_B(n)$ i $\beta_A(n) = \beta_B(n)$, $\forall n \geq 0$.*

Demostració. Sigui $\psi\colon F_r \to F_r$ l'automorfisme definit com el canvi de base de B a A, i.e. $b_i\psi = a_i$ per $i = 1, \ldots, r$. És evident que per a quasevol element $w \in F_r$, $|w|_B = |w\psi|_A$. Llavors, per a tot automorfisme $\varphi \in$ Aut F_r:

$$\|\varphi\|_B = \sum_{i=1}^{r} |b_i\varphi|_B = \sum_{i=1}^{r} |a_i\psi^{-1}\varphi|_B = \sum_{i=1}^{r} |a_i\psi^{-1}\varphi\psi|_A = \|\psi^{-1}\varphi\psi\|_A. \tag{12}$$

Obtenim un resultat similar per $\Phi \in$ Out F_r. Agafem $[\psi] = \Psi \in$ OutF_r i llavors:

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_B &= \min\{\|\varphi\|_B \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \min\{\|\psi^{-1}\varphi\psi\|_A \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \min\{\|\nu\|_A \mid \nu \in \Psi^{-1}\Phi\Psi\} \\ &= \|\Psi^{-1}\Phi\Psi\|_A. \end{aligned} \tag{13}$$

Amb aquestes igualtats sobre les normes ja podem demostrar les igualtats sobre les funcions de complexitat.

$$
\begin{aligned}
\alpha_B(n) &= \max\{\|\varphi^{-1}\|_B \mid \varphi \in \mathrm{Aut}\ G, \|\varphi\|_B \le n\} \\
&= \max\{\|\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\|_A \mid \varphi \in \mathrm{Aut}\ G, \|\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi\|_A \le n\} \\
&= \max\{\|\nu^{-1}\|_A \mid \nu \in \mathrm{Aut}\ G, \|\nu\|_A \le n\} \\
&= \alpha_A(n).
\end{aligned} \tag{14}
$$

I similarment ho fem per β_B

$$
\begin{aligned}
\beta_B(n) &= \max\{\|\Phi^{-1}\|_B \mid \Phi \in \mathrm{Out}\ G, \|\Phi\|_B \le n\} \\
&= \max\{\|\Psi^{-1}\Phi^{-1}\Psi\|_A \mid \Phi \in \mathrm{Out}\ G, \|\Psi^{-1}\Phi^{-1}\Psi\|_A \le n\} \\
&= \max\{\|\Theta\|_A \mid \Theta \in \mathrm{Out}\ G, \|\Theta\|_A \le n\} \\
&= \beta_A(n).
\end{aligned} \tag{15}
$$

□

1. La p-norma d'un automorfisme

Encara que ja hem definit una norma pels (*outer*) automorfismes anteriorment, es poden definir més normes sobre aquest grup. Aquestes normes que definirem a continuació ens permetran demostrar resultats més endavant. Per construir aquestes normes ens basem en les que utilitzem sovint sobre vectors i matrius, com són per exemple per $p \in \mathbb{R}^+$: $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\|(x_1, \dots, x_k)\| = (|x_1|^p + \cdots + |x_k|^p)^{1/p}$. Per $p = \infty$, $\|(x_1, \dots, x_k)\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\}$. Aquests exemples segueixen les condicions bàsiques per ser una norma:

(i) $\|x\|_p \ge 0$ i $\|x\|_p = 0$ si i només si $x = 0$,

(ii) $\|\mu x\|_p = |\mu|\|x\|_p$ per $\mu \in \mathbb{R}$,

(iii) $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Podem adaptar aquestes normes per a vectors formats d'elements de F_r. Per $p \in \overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ i $w = \{w_1, \dots, w_k\} \in F_r^k$, definim:

$$
\begin{aligned}
&\|(w_1, \dots, w_k)\|_p = (|w_1|^p + \cdots + |w_k|^p)^{1/p} \qquad \text{per } p \ne \infty, \\
&\|(w_1, \dots, w_k)\|_\infty = \max\{|w_1|, \dots, |w_k|\}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Aquesta norma es pot expressar en termes de la norma vectorial que hem vist abans: $\|(w_1, \dots, w_k)\|_p = \|(|w_1|, \dots, |w_k|)\|_p$. Per tant les condicions que hem escrit abans també es poden adaptar.

Lema 2.4. *Totes les funcions* $\|\cdot\|_p \colon F_r^k \to \mathbb{R}$ *compleixen les propietats següents:*

(i) $\|w\|_p \ge 0$ *i* $\|w\|_p = 0$ *si i només si* $w = (1, \dots, 1)$,

(ii) $\|(w_1^n, \dots, w_k^n)\|_p \le |n|\|(w_1, \dots, w_k)\|_p$,

(iii) $\|(v_1 w_1, \dots, v_k w_k)\|_p \le \|(v_1, \dots, v_k)\|_p + \|(w_1, \dots, w_k)\|_p$.

Demostració. La primera propietat és trivial ja que $|w_i| = 0$ si i només si $w_i = 1$. La segona propietat també es veu facilment ja que $|w_i^n| \le |n||w_i|$. Per tant $\|(w_1^n, \dots, w_k^n)\|_p = \|(|w_1^n|, \dots, |w_k^n|)\|_p \le$

$\|(|n||w_1|, \ldots, |n||w_k|)\|_p = |n|\|(|w_1|, \ldots, |w_k|)\|_p$. La desigualtat triangular surt anàlogament utilitzant la desigualtat $|v_i w_i| \leq |v_i| + |w_i|$. $\square$

Anomenarem a aquestes aplicacions les p-normes de F_r^k encara que no es tractin formalment de normes. Lògicament hem agafat l'espai F_r^k ja que, com ja hem repetit diverses vegades, tot automorfisme de F_r es caracteritza per les r imatges de la seva base. Per tant, si col·loquem aquests r valors en un vector, les normes que hem definit són normes també pels automorfismes. La p-normes d'un automorfisme $\varphi \in \operatorname{Aut} F_r$ o d'un *outer* automorfisme $\Phi \in \operatorname{Out} F_r$ són:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p &= \|(a_1\varphi, \ldots, a_r\varphi)\|_p, \\ \|\Phi\|_p &= \min\{\|\varphi\|_p \mid \varphi \in \Phi\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Evidentment, $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|$ i $\|\Phi\|_1 = \|\Phi\|$, on $\|\varphi\|$ i $\|\Phi\|$ són les primeres normes que haviem definit. Amb aquestes noves normes, també podem definir noves funcions de complexitat corresponents a les noves normes.

$$\begin{aligned} \alpha_r^p(n) &= \max\{\|\varphi^{-1}\|_p \mid \varphi \in \operatorname{Aut} G, \|\varphi\|_p \leq n\}, \\ \beta_r^p(n) &= \max\{\|\Phi^{-1}\|_p \mid \Phi \in \operatorname{Out} G, \|\Phi\|_p \leq n\}. \end{aligned} \tag{18}$$

I també tenim $\alpha_r^1 = \alpha_r$ i $\beta_r^1 = \beta_r$, on les funcions α_r i β_r són les primeres funcions de complexitat que hem definit. Ara tenim, però que α_r^p i β_r^p són funcions de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Ja hem vist que, per a qualsevol grup lliure, el canvi de base no altera les funcions α_r i β_r si utilitzem la norma $\|\cdot\|_1$. El que veurem a continuació, és que el canvi de norma sobre els automorfismes no varia la classe d'equivalencia α_r^p i β_r^p (les classes d'equivalència que hem definit per funcions de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es poden extendre per funcions de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ directement sense alterar la definició). Això ens permetrà dir que el creixement asimptòtic de les funcions de complexitat no depen ni de la base ni de norma escollida. Per tant, podrem treballar amb la norma que més ens convingui en cada moment sabent que el resultat no s'alterarà.

Proposició 2.5. *Per a qualssevol $p, q \in \overline{\mathbb{R}}^+$ existeix un nombre natural $C = C_{p,q,r} > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\|\varphi\|_q \leq \|\varphi\|_p \leq C\|\varphi\|_q, \\ \frac{1}{C}\|\Phi\|_q \leq \|\Phi\|_p \leq C\|\Phi\|_q, \end{aligned} \tag{19}$$

per a tot $\varphi \in$ Aut F_r i $\Phi \in$ Out F_r. També es té que per a $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \cdot \alpha_r^p(\left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor) \leq \alpha_r^q(n) \leq C \cdot \alpha_r^p(Cn), \\ \frac{1}{C} \cdot \beta_r^p(\left\lfloor \frac{n}{C} \right\rfloor) \leq \beta_r^q(n) \leq C \cdot \beta_r^p(Cn). \end{aligned} \tag{20}$$

Demostració. La primera part de l'enunciat és conseqüència del mateix resultat per vectors que ja és conegut. Sabem que per a tot $x \in \mathbb{R}^r$, i qualssevol $p, q \in \overline{\mathbb{R}}^+$ existeix un $C = C_{p,q,r} > 0$ tal que $\frac{1}{C}\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C\|x\|_q$. Amb això la demostració de la primera desigualtat és directe ja que $\|\varphi\|_p = \|(a_1\varphi, \ldots, a_r\varphi)\|_p = \|(|a_1\varphi|, \ldots, |a_r\varphi|)\|_p$ que és un element de $\mathbb{R}^r$.

Per la segona desigualtat utilitzem que per definició existeix un $\theta \in \Phi$ tal que $\|\Phi\|_p = \|\theta\|_p$. Aleshores,

$$\|\Phi\|_q = \min\{\|\varphi\|_q \mid \varphi \in \Phi\} \leq \|\theta\|_q \leq C\|\theta\|_p = C\|\Phi\|_p, \tag{21}$$

i per simetria obtenim la segona desigualtat.

Per demostrar la desigualtat de la funció α_r utilitzem les desigualtats que acabem de demostrar. Per tot $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \alpha_r^q(n) &= \max\{\|\varphi^{-1}\|_q \mid \varphi \in \text{Aut } G, \|\varphi\|_q \leq n\} \\ &\leq \max\{\|\varphi^{-1}\|_q \mid \varphi \in \text{Aut } G, \|\varphi\|_p \leq Cn\} \\ &\leq C\max\{\|\varphi^{-1}\|_p \mid \varphi \in \text{Aut } G, \|\varphi\|_p \leq Cn\} \\ &= C\alpha_r^p(Cn). \end{aligned} \tag{22}$$

Per simetria obtenim $\alpha_r^p(n) \leq C\alpha_r^q(Cn)$. Com que la funció α_r és no decreixent i definida només sobre els naturals, agafem la part entera i obtenim $\frac{1}{C} \cdot \alpha_r^p(\lfloor \frac{n}{C} \rfloor) \leq \alpha_r^q(n)$. La demostració per la funció β_r és totalment anàloga. □

A continuació demostrarem dos lemes amb resultats tècnics però que ens serviran per les demostracions dels següents capítols quan ens trobem en els casos particulars.

Lema 2.6. *Siguin $\varphi, \theta, \psi_1, \psi_2 \in$ Aut F_r on ψ_1 i ψ_2 són dos permutacions de lletres i sigui $w \in F_r \backslash 1$. Aleshores,*

(i) $\frac{\|\varphi\|_1}{r} \leq \|\varphi\|_\infty < \|\varphi\|_1$,

(ii) $\|\psi_1\varphi\psi_2\|_p = \|\varphi\|_p$ *per a qualsevol* $p \in \overline{\mathbb{R}}^+$,

(iii) $\|\varphi\theta\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \cdot \|\theta\|_\infty < \|\varphi\|_1 \cdot \|\theta\|_1$,

(iv) $\|\lambda_w\varphi\|_1 \leq (2r|w| + r - 2)\|\varphi\|_\infty < (2r|w| + r - 2)\|\varphi\|_1$.

Demostració. Les dos primeres propietats, *(i)* i *(ii)*, són evidents a partir de les definicions.

(iii) Per la definició de la norma de l'infinit, per qualsevol $a \in A_r$ tenim que $|a\varphi\theta| \leq |a\varphi| \cdot \|\theta\|_\infty$, i llavors:

$$\|\varphi\theta\|_1 = \sum_{i=1}^{r} |a_i\varphi\theta| \leq \sum_{i=1}^{r} |a\varphi| \cdot \|\theta\|_\infty = \|\varphi\|_1 \cdot \|\theta\|_\infty < \|\varphi\|_1 \cdot \|\theta\|_1. \tag{23}$$

(iv) Com que $w \neq 1$, aleshores només hi ha una paraula de la forma $w^{-1}a_iw$ que no és reduïda i per tant:

$$\begin{aligned} \|\lambda_w\varphi\|_1 &= \sum_{i=1}^{r} |(\overline{w^{-1}a_iw})\varphi| \leq (r-1)(2|w|+1)\|\varphi\|_\infty + (2|w|-1)\|\varphi\|_\infty \\ &= (2r|w| + r - 2)\|\varphi\|_\infty < (2r|w| + r - 2)\|\varphi\|_1. \end{aligned} \tag{24}$$

□

Lema 2.7. *Siguin $\Phi, \Theta \in$ Out F_r, i $\psi_1, \psi_2 \in$ Aut F_r són dos permutacions de lletres. Aleshores,*

(i) $\|[\psi_1]\Phi[\psi_2]\|_1 = \|\Phi\|_1$,

(ii) $\|\Phi\Theta\|_1 \leq \|\Phi\|_1\|\Theta\|_1$.

Demostració. Observem que:

$$[\psi_1]\Phi[\psi_2] = \psi_1\Lambda_r\Phi\psi_2\Lambda_r = \psi_1\Lambda_r\Phi\Lambda_r\psi_2 = \psi_1\Phi\psi_2, \tag{25}$$

ja que el subgrup Λ_r de Aut F_r és normal i per tant $\Lambda_r\varphi = \varphi\Lambda_r$ per a quaslevol $\varphi \in$ Aut F_r. I com que $\Phi \in$ Out $F_r =$ Aut F_r/Λ_r, tenim que $\Phi\Lambda_r = \Lambda_r\Phi = \Phi$. I per tant, utilitzant el punt *(ii)* del lema anterior demostrem el punt *(i)*:

$$\|[\psi_1]\Phi[\psi_2]\|_1 = \|\psi_1\Phi\psi_2\|_1 = \min\{\|\psi_1\varphi\psi_2\|_1 \mid \varphi \in \Phi\} = \min\{\|\varphi\|_1 \mid \varphi \in \Phi\} = \|\Phi\|_1. \tag{26}$$

Per demostrar el punt *(ii)* utilitzarem en aquest cas el Lema 2.6.*(iii)*:

$$\begin{aligned} \|\Phi\Theta\|_1 &= \min\{\|\phi\|_1 \mid \phi \in \Phi\Theta\} \\ &= \min\{\|\varphi\theta\|_1 \mid \varphi \in \Phi, \theta \in \Theta\} \\ &\leq \min\{\|\varphi\|_1\|\theta\|_1 \mid \varphi \in \Phi, \theta \in \Theta\} \\ &= (\min\{\|\varphi\|_1 \mid \varphi \in \Phi\})(\min\{\|\theta\|_1 \mid \theta \in \Theta\}) \\ &= \|\Phi\|_1\|\Theta\|_1. \end{aligned} \tag{27}$$

I la demostració de *(ii)* està acabada. □

El lema de continuació és pràcticament directe de les definicions, però és important enunciar-lo per poder-lo utilitzar més endevant.

Lema 2.8. *Sigui $\varphi \in$ Aut F_r i sigui cíclicament reduït. Aleshores $\|\varphi\| = \|[\varphi]\|$.*

Demostració. Com que $\|[\varphi]\| = \min\{\|\varphi'\|_1 \mid \varphi' \in [\varphi]\}$, i $[\varphi] = \{\varphi\lambda_g \mid g \in F_r\}$, per qualsevol element a_i de la base de F_r i per a qualsevol $g \in F_r$ tenim que $|a_i\varphi\lambda_g| = |g^{-1}u_ig| \geq |u_i| = |a_i\varphi|$, ja que u_ig o bé $g^{-1}u_i$ és reduït (o potser tots dos). La igualtat s'obté quan $g = 1$ i $\varphi\lambda_g = \varphi$ (no pot ser que $g = u_i$ o $g = u_i^{-1}$ per a tot $i = 1, \ldots, r$). Per tant, veiem que $\|\varphi\| = \|[\varphi]\|$. □

2. Abelianització

Ens referim a l'abelianització d'un (*outer*) automorfismes, o d'un grup no abelià qualsevol, quan considerem que el mateix automorfisme o grup amb la propietat commutativa. Aquest eina ens permetrà trobar cotes inferiors per $\|\varphi\|$ i $\|[\varphi]\|$ i, més endevant també, per les funcions α_r i β_r. Primer de tot comencem definint la norma $\|\cdot\|_1$ per les matrius $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ derivada de la norma $\|x\|_1$ per vectors, $x \in \mathbb{R}^r$.

$$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}|m_{i,j}|, \tag{28}$$

on els $(m_{i,j})$ són els elements de la matriu. És immediat comprovar que aquesta norma compleix les tres propietats bàsiques de les normes: $\|M\|_1 \geq 0$, $\|xM\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|M\|_1$ i $\|N + M\|_1 \leq \|N\|_1 + \|M\|_1$. A més a més també compleix que $\|NM\|_1 \leq \|N\|_1 \cdot \|M\|_1$.

Definim l'abelianització com l'aplicació:

$$\begin{aligned} (\cdot)^{ab}\colon F_r &\longrightarrow \quad \mathbb{Z}^r \\ w &\mapsto w^{ab} = ([w]_{a_1}, \ldots, [w]_{a_r}), \end{aligned} \tag{29}$$

on $[w]_{a_i}$ és la suma dels exponents de a_i en w. Per exemple $[a_1^3a_3^{-2}a_1^{-1}a_2a_1]_{a_1} = 3 - 1 + 1 = 3$. L'abelianització d'un automorfisme $\varphi \in$ Aut F_r és un altre automorfisme de $\mathbb{Z}^r$ que notarem φ^{ab}.

Podem representar φ^{ab} com una matriu de $r \times r$ sobre $\mathbb{Z}$ i que, a més a més, ha de ser invertible ja que és un automorfisme. Representem aquesta matriu per que els elements w^{ab} actuin per la dreta:

$$\varphi^{ab} = \begin{pmatrix} [a_1\varphi]_{a_1} & \cdots & [a_1\varphi]_{a_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_r\varphi]_{a_1} & \cdots & [a_r\varphi]_{a_r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}). \tag{30}$$

Nota 2.9. *La matriu φ^{ab} és invertible i sobre $\mathbb{Z}$, per tant el determinant ha de ser igual a ± 1. $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ és precisament el grup de matrius sobre $\mathbb{Z}$ amb determinant $|M| = \pm 1$ per a qualsevol $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$*

Amb les notacions que estem utilitzant tenim que $\forall w \in F_r$, $(w\varphi)^{ab} = w^{ab}\varphi^{ab}$, $(\varphi\theta)^{ab} = \varphi^{ab}\theta^{ab}$ i $(\varphi^{-1})^{ab} = (\varphi^{ab})^{-1}$. És evident que quan abelianitzem estem simplificant els elements amb els que treballem, per exemple, $|w| \geq \sum\limits_{i=1}^{r} |[w]_{a_i}| = \|w^{ab}\|_1$. La igualtat es dona si i només si cada element a_i aparèix només amb un signe en tota la paraula $\bar{w}$. A continuació enunciem el lema que demostra que l'abelianització simplifica(entès com que redueix la norma) els automorfismes.

Lema 2.10. *Per qualsevol $\varphi \in Aut\ F_r$, aleshores $\|\varphi\|_1 \geq \|[\varphi]\|_1 \geq \|\varphi^{ab}\|_1$. Tenim les igualtats si i només si a $\overline{a_i\varphi}$ no conté cap lletra amb signes oposats per $i = 0, \ldots, r$. Un cas particular de la igualtat és quan $\varphi \in \mathrm{Aut}^+ F_r$.*

Demostració. Per definició $\|\varphi\|_1 \geq \|[\varphi]\|_1$, i a més a més existeix un $w \in F_r$ tal que $\|[\varphi]\|_1 = \|\varphi\lambda_w\|_1$. Llavors:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_1 \geq \|[\varphi]\|_1 = \|\varphi\lambda_w\|_1 &= \sum_{i=1}^{r} |a_i\varphi\lambda_w| \geq \sum_{i=1}^{r} \|(a_i\varphi)^{ab}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{r} \|a_i^{ab}\varphi^{ab}\|_1 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} |[a_i\varphi]_{a_j}| = \|\varphi^{ab}\|_1. \end{aligned} \tag{31}$$

En la segona desigualtat utilitzem que com que la conjugació es defineix per $v\lambda_w = w^{-1}vw$, quan abelianitzem, $[v\lambda_w]_{a_i} = [w^{-1}vw]_{a_i} = [v]_{a_i}$ per qualsevol $v, w \in F_r$. Per tant hem vist que $\|\varphi\|_1 = \|\varphi^{ab}\|_1$, i és evident que la igualtat es dóna si i només si per $i = 0, \ldots, r$ la paraula $\overline{a_i\varphi}$ no conté cap lletra amb signes oposats. Si això passa també tenim que φ és cíclicament reduïda i per tant $\|\varphi\|_1 = \|[\varphi]\|_1$ com hem vist en el lema 2.8.. Per tant, els automorfimes positius són un cas particular de la igualtat. $\square$

Capítol 3
Grup lliure de rang 2

En aquest capítol estudiarem el grup lliure F_2, que al ser el més simple possible (apart del cas abelià), podrem utilitzar alguns arguments que en rangs superiors no podrem. Per començar analitzarem com són les possibles bases del grup F_2 ja que això ens proporcionarà informació de com són els automorfismes d'aquest grup. Després ens fixarem en els d'automorfismes positius i cíclicament reduïts, ja que al final expressarem un automorfisme qualsevol en funció d'un automorfisme positiu, una conjugació i dues permutacions de lletres. Finalment arribarem a fixar cotes per la funció α_2, veurem que és sempre quadràtica, i trobarem l'expressió exacte de la funció β_2. La notació que farem servir en tot aquest capítol és que $A = A_2 = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$.

1. Bases de F_2

En aquesta secció volem demostrar el resultat principal de l'article *What does a basis of F(a,b) look like?* ([2]). Com s'explica en l'article, no ens interessa trobar un mètode per saber si dos elements de F_2 formen una base, sinó que ens interessa saber quin aspecte té una base en general. El resultat al que arribem és el següent:

Teorema 3.1. *Suposem que una conjugació de*

$$v = a^{n_1} b^{m_1} \cdot \ldots \cdot a^{n_q} b^{m_q}, \tag{32}$$

i la mateixa conjugació de

$$w = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot a^{\alpha_q} b^{\beta_q}, \tag{33}$$

formen una base de F_2, on $p \geq 1$ i $q \geq 1$ i tots els exponents són diferents de 0. Aleshores, mòdul canvis trivials de notació (subsitució de a per a^{-1} ó b per b^{-1} en les dues paraules), existeixen enters $n > 0$ i $\epsilon = \pm 1$ tals que:

$$\begin{gathered} m_1 = \ldots = m_q = \epsilon\beta_1 = \ldots = \epsilon\beta_p = 1 \\ \{n_1, \ldots, n_q, \epsilon\alpha_1, \ldots, \epsilon\alpha_p\} = \{n, n+1\}, \end{gathered} \tag{34}$$

o simètricament,

$$\begin{gathered} n_1 = \ldots = n_q = \epsilon\alpha_1 = \ldots = \epsilon\alpha_p = 1 \\ \{m_1, \ldots, m_q, \epsilon\beta_1, \ldots, \epsilon\beta_p\} = \{n, n+1\} \end{gathered} \tag{35}$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem dos automorfismes φ i ψ de F_2 i la seva composició $\varphi\psi$. Utilitzem la següent notació: $\psi = \eta_{v,w}$ i $\varphi = \eta_{X(a,b),Y(a,b)}$ on X i Y són paraules de F_2. Aleshores la composició s'escriu com $\varphi\psi = \eta_{X(v,w),Y(v,w)}$. Ara abelianitzem aquests automorfismes i les abelianitzacions són matrius de 2×2, $\varphi^{ab} = A_\varphi, \psi^{ab} = A_\psi \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$. Com ja hem comentat en la secció d'abelianització d'automorfismes tenim que $A_{\varphi\psi} = A_\varphi A_\psi$. Demostrarem aquest teorema en diferents passos, els primers són algunes propietats sobre les matrius 2×2.

1r pas: Tot element de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ pot ser normalitzat a una matriu d'elements no negatius (matriu no negativa) mitjançant multiplicacions de files i columnes per -1.

Demostració: Si la matriu A és triangular aquest resultat és evident ja que només fa falta fer positiu l'element que no està en la diagonal i després podem multiplicar per -1 (si fa falta) els termes de la diagonal utilitzant la fila o columna on estigui el 0. En el cas que els 4 elements de la matriu siguin diferents de 0 podem utilitzar un mètode similar al de la matriu triangular i obtindrem dos casos, o bé la matriu resultant és de la forma $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$ o bé és de la forma $\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ on $+$ o $-$ indica el signe de l'element de la matriu. Però el segon cas és impossible ja que el seu determinant seria estrictament inferior a -1.

2n pas: En una matriu de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ sense elements nuls, el nombre d'elements positius és $0, 2$ o 4. Conseqüentment el nombre d'elements negatius és també $0, 2$ o 4.

Utilitzem el mateix argument del determinant que acabem de fer servir en el primer pas i obtenim el resultat.

3r pas: Sigui $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ una matriu no negativa i no diagonal, aleshores existeix una única resta d'una fila a l'altre fila tal que la matriu resultant és no negativa i la suma dels elements de la matriu s'ha reduït.

Demostració: Si A és triangular el resultat és evident ja que els elements de la diagonal han de ser 1 per tal que $|\det A| = 1$ (no poden ser -1 perquè la matriu és no negativa). Si A no és diagonal existeix un element estrictament superior a la resta ja que si no fos així seria impossible que $|\det A| = 1$. Si hi hagues dos elements iguals (els anomenem M) i estrictaments superiors als altres dos (els anomenem p i q) podriem tenir dos casos: els dos M estan en una diagonal de la matriu i aleshores $|\det A| = |M^2 - pq| > 1$, o els dos M estan en una mateixa fila o columna i aleshores $|\det A| = |M(p-q)| > 1$ ja que $M > 1$. Els casos de 3 elements iguals superiors al quart o dels 4 elements iguals són evidents. Sense perdua de generalitat podem suposar que la matriu és de la forma $\begin{pmatrix} M & + \\ + & + \end{pmatrix}$ on M és l'element maximal. Si restem la segona fila a la primera fila obtenim una matriu $\begin{pmatrix} + & * \\ + & + \end{pmatrix}$, on $*$ és 0 o sinó pel segon pas ha de ser positiu. La resta de la primera fila a la segona hauria donat evidentment valors negatius.

4t pas: Sigui $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ una matriu no negativa, aleshores hi ha una única seqüència de resta de files, amb matrius sempre no negatives, que redueix la matriu A a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Demostració: És una conseqüencia directe del pas 3, ja que si anem aplicant aquesta resta única successivament (que disminueix la suma dels quatre elements de la matriu), hem d'acabar arribant als casos més simples possibles que són aquests 2 ja que no hi ha cap matriu de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ no negativa que els seus elements sumin 1.

Ara podem pensar en el procés invers, és a dir, a constuir la matriu A sumant files. Sumar files és equivalent a multiplicar a l'esquerre per $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, si enunciem el pas 4 però en procés invers obtenim:

5è pas: Les matrius $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ generen lliurement el semigrup lliure de matrius no negatives de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (matrius amb determinant 1). Si multipliquem tots els elements d'aquest semigrup per la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pel mateix costat, obtenim totes les matrius no negatives de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$

Demostració: És una conseqüència directe del pas 4, només hem reformulat l'enunciat.

6è pas: La seqüència de suma de files per la construcció de la matriu no negativa $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{36}$$

en la primera etapa sumem n vegades la segona fila a la primera, en la segona etapa sumem la primera fila a la segona, i en la tercera fem la resta d'operacions. Aquesta seqüencia pot ser modificada canviant els índexs de les files o columnes, si fos necessari, per obtenir els casos que no comencen amb la identitat. És evident que aquesta seqüència representa el cas general, i per tant hi haura casos on no farà falta arribar a la tercera etapa. Per exemple, per construir la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ només s'utilitzarà la primera etapa.

Si ara tornem a l'inici de la demostració i a la base $\{v, w\}$ de F_2, com que les matrius són l'abelianització dels automorfismes, cada fila representa un element de la base abelianitzada, i per tant, la suma de files representa la multiplicació d'elements de la base ja sigui per la dreta o per l'esquerra. És a dir que la suma de la segona fila a la primera es pot escriure com $\{v, w\} \to \{wv, w\}$ o $\{v, w\} \to \{vw, w\}$ i similarment amb la suma de la primera fila a la segona: $\{v, w\} \to \{v, vw\}$ o $\{v, w\} \to \{v, wv\}$. Com es veu, no utilitzem en cap moment cap inversió.

7è pas: Per tant, comencem amb la base $\{a, b\}$ i reproduim la seqüència del pas 6. Gràcies al Teorema de Nielsen(que comentarem més endevant) només necessitem multiplicar per l'esquerra i obtenim:

$$\{a, b\} \to \{ab^n, b\} \to \{ab^n, ab^{n+1}\} \to, \ldots, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Quan tenim la base $\{ab^n, ab^{n+1}\}$ aleshores podem fer tantes multiplicacions per la dreta i per l'esquerra com vulguem, però els valor finals de $\{v, w\}$ sempre estaran continguts en el semigrup lliurement generat per ab^n i ab^{n+1}.

Queda demostrat per tant:

8è pas: Désprés de possibles canvis de signes i/o permutacions de columnes i/o files, qualsevol matriu $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ pot ser l'abelianització de:

(i) la identitat de F_2 si A és diagonal,

(ii) $a\varphi = ab^n$, $b\varphi = b$ amb $n \in \mathbb{N}$ si A és estricatament triangular (no diagonal),

(iii) $a\varphi$ i $b\varphi$ en el semigrup lliurement generat per ab^n i ab^{n+1} amb $n \in \mathbb{N}$, si A no és triangular.

El Teorema de Nieslen ([7]) diu que el nucli de l'aplicació d'abelianització $\varphi \to A_\varphi$ consisteix en les conjugacions per elements de F_2. Aleshores, si dos automorfismes ϕ i ψ tenen la mateixa abelianització, existeix un element $g \in F_2$ tal que $\phi\lambda_g = \psi$. Per tant en el pas 7, hem multiplicat només per la dreta, ja que els altres resultats que podriem haver obtingut multiplicant per la dreta i l'esquerra els obtindrem ara amb les conjugacions. Resumint, per passar de l'abelianització als automorfismes en general, només hem de conjugar els valors obtinguts al pas 8 i arribem al resultat que voliem:

9è pas: Tot automorfisme positiu de F_2 s'escriu com el de l'enunciat del Teorema.

Demostració: Si tenim un automorfisme positiu ϕ, la seva abelianització serà una matriu A_ϕ no negativa. Com hem vist, aquesta matriu es pot descomposar com a multiplicacions de matrius elementals. Cada una d'aquestes matrius elementals és l'abelianització de dos automorfismes elementals de F_2, depenent de si es multiplica per la dreta o per la dreta. Triem que sempre multipliquem per l'esquerra. Aleshores la composició de tots aquests automorfismes elementals dóna un nou automorfisme φ. Pel teorema de Nielsen aquests dos automorfismes són els mateixos llevat de conjugació ja que tenen la mateixa abelianització.

Un automorfisme qualsevol de F_2 es pot normalitzar a un automorfisme positiu mitjançant canvis de a^{-1} per a, b^{-1} per b ó inversions dels elements de la base. Per tant el resultat també es vàlid per qualsevol automorfisme de F_2.

□

2. Inversió dels automorfismes de F_2

Per tractar el cas d'un automorfisme qualsevol, primer ens fixarem en les inversions d'un automorfisme positiu. En la demostració del Teorema 3.1. hem demostrat en particular que el conjunt d'automorfismes positius de F_2 està generat, com a monoide, pels tres automorfismes següents $\Delta = \{\eta_{b,a}, \eta_{a,ab}, \eta_{a,ba}\}$ (ja que $\eta_{ab,b} = \eta_{b,a}\eta_{a,ba}\eta_{b,a}$ i $\eta_{ba,b} = \eta_{b,a}\eta_{a,ab}\eta_{b,a}$). Una altre manera d'escriure-ho és que $\mathrm{Aut}^+F_2 = \Delta^*$.

Lema 3.2. *Sigui $\varphi \in \mathrm{Aut}^+F_2$, notem la seva inversió com $\varphi^{-1} = \eta_{u,v}$. Aleshores o bé $u \in \{a, b^{-1}\}^*$ i $v \in \{a^{-1}, b\}^*$, o bé $u \in \{a^{-1}, b\}^*$ i $v \in \{a, b^{-1}\}^*$. En particular φ^{-1} és cíclicament reduït.*

Demostració. Per els tres elements de Δ aquest resultat és immediat ja que $\eta_{b,a}^{-1} = \eta_{b,a}$, $\eta_{a,ab}^{-1} = \eta_{a,a^{-1}b}$ i $\eta_{a,ba}^{-1} = \eta_{a,ba^{-1}}$. Tots els automorfismes positius es poden escriure com una composició d'elements de Δ, per aquest motiu, si demostrem que per a qualsevol $\varphi \in \mathrm{Aut}^+F_2$ i $\theta \in \Delta$ l'enunciat funciona per $\varphi\theta$ sempre que ho fa per φ haurem acabat (ja que hem vist que funciona pels tres elements de Δ). Per tant, escrivim $\varphi^{-1} = \eta_{u,v}$ i suposem que compleix les condicions de l'enunciat, aleshores

$$\begin{aligned}(\varphi\eta_{b,a})^{-1} &= \eta_{b,a}\eta_{u,v} = \eta_{v,u},\\ (\varphi\eta_{a,ab})^{-1} &= \eta_{a,a^{-1}b}\eta_{u,v} = \eta_{u,u^{-1}v},\\ (\varphi\eta_{a,ba})^{-1} &= \eta_{a,ba^{-1}}\eta_{u,v} = \eta_{u,vu^{-1}}.\end{aligned} \tag{38}$$

En el primer cas si la parella (u, v) complia les condicions de l'enunciat és evident que llavors la parella (v, u) també. En el segon cas, si per exemple $u \in \{a, b^{-1}\}^*$ i $v \in \{a^{-1}, b\}^*$, aleshores

$u^{-1} \in \{a^{-1}, b\}^*$ i per tant $(u, u^{-1}v)$ també compleix les condicions de l'enunciat. La resta de casos són totalment anàlegs $\square$

Proposició 3.3. *Sigui $\varphi \in \mathrm{Aut}^+ F_2$, aleshores $\|\varphi^{-1}\|_1 = \|\varphi\|_1$*

DEMOSTRACIÓ. L'abelianització de l'automorfisme φ és:

$$\varphi^{ab} = \begin{pmatrix} [a\varphi]_a & [a\varphi]_b \\ [b\varphi]_a & [b\varphi]_b \end{pmatrix}. \tag{39}$$

I l'abelianització de la seva inversa $(\varphi^{-1})^{ab} = (\varphi^{ab})^{-1}$ amb $|\varphi^{ab}| = \pm 1$:

$$\pm(\varphi^{-1})^{ab} = \begin{pmatrix} [b\varphi]_b & -[a\varphi]_b \\ -[b\varphi]_a & [a\varphi]_a \end{pmatrix}. \tag{40}$$

I en resulta que $\|(\varphi^{-1})^{ab}\|_1 = \|\varphi^{ab}\|_1$. Com que $\varphi \in \mathrm{Aut}^+ F_2$, el Lema 2.10. ens diu que $\|\varphi^{ab}\|_1 = \|\varphi\|_1$. Finalment, pel lema anterior, sabem que l'automorfisme $\varphi^{-1} = \eta_{u,v}$ no té una lletra amb signes oposats ni en u ni en v i per tant podem tornar a aplicar el Lema 2.10. per dir que $\|(\varphi^{-1})^{ab}\|_1 = \|\varphi^{-1}\|_1$. I per tant, $\|\varphi^{-1}\|_1 = \|(\varphi^{-1})^{ab}\|_1 = \|\varphi^{ab}\|_1 = \|\varphi\|_1$. $\square$

Lema 3.4. *Sigui $\varphi \in \mathrm{Aut}\ F_2$ un automorfisme cíclicament reduït. Aleshores existeixen dos permutacions de lletres $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Aut}F_2$ i $\theta \in \mathrm{Aut}^+ F_2$ tals que $\varphi = \psi_1\theta\psi_2$*

DEMOSTRACIÓ. Hem estudiat com són les bases de F_2 en la secció anterior, i sabem que si tenim un automorfisme $\varphi = \eta_{u,v}$ cíclicament reduït aleshores pel Teorema 3.1. com a molt la paraula u està composta per dos lletres, i v també, encara que poden ser lletres diferents. Podem suposar, sense perdua de generalitat que u conté dues lletres diferents, ja que si u i v estiguessin escrits els dos per una sola lletra només podria ser que $\varphi = \eta_{c,d}$ o $\varphi = \eta_{d,c}$ on $c \in \{a, a^{-1}\}$ i $d \in \{b, b^{-1}\}$. I amb una permutació de lletres que faci que $c = a$ i $d = b$ obtenim un automorfisme positiu.

Ara descomposem $\eta_{u,v}$ invertint totes les lletres negatives per les seves inverses positives. Definim $u' \in \{a,b\}^*$ i $\epsilon, \delta = \pm 1$ tals que $\eta_{u,v} = \eta_{u',v'}\eta_{a^\epsilon,b^\delta}$ i $|u| = |u'|$ i $|v| = |v'|$. Desglossem ara els possibles casos de v'.

Si $v' \in \{a,b\}^*$ aleshores l'automorfisme $\eta_{u',v'}$ es positiu i ja hem acabat perquè $\eta_{a^\epsilon,b^\delta}$ és una permutació de lletres. Si $v' \in \{a^{-1}, b^{-1}\}^*$ aleshores $\eta_{u,v} = \eta_{a,b^{-1}}\eta_{u',v'^{-1}}\eta_{a^\epsilon,b^\delta}$ i també hem acabat.

Finalment veiem que no és possible que $v' \in \{a^{-1}, b\}^*$ o $v' \in \{a, b^{-1}\}^*$. Primer abelianitzem u' i v': $u'^{ab} = ([u]_a, [u]_b) = (p, q)$ i $v'^{ab} = ([v]_a, [v]_b) = (r, s)$. Per com estan definides u' i v' sabem que $p, q > 0$ i que $rs < 0$, però $|\eta_{u',v'}| = ps - qr \neq \pm 1$ i arribem a una contradicció en que $\eta_{u',v'}$ sigui un automorfisme. Hem suposat que $[v]_a \neq 0$ i que $[v]_b \neq 0$, ja que si un dels dos fos 0 ens trobariem en un dels dos primers casos que ja hem resolt. $\square$

Tots aquests lemes que acabem de demostrar són casos concrets on φ és o bé positiu o cíclicament reduïts. A continuació tractem el cas general on φ és un automorfisme qualsevol. Veurem que podem descomposar φ com una composició de dos permutacions de lletres, un automorfisme positiu i una conjugació. Gràcies a haver vist abans com es comporten els elements de la descomposició podrem escriure una desigualtat de normes d'automorfismes que ens servira per acotar superiorment α_2.

Lema 3.5. *Sigui $\varphi \in \mathrm{Aut}\ F_2$. Aleshores existeixen dos permutacions de lletres $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Aut}F_2$, $\theta \in \mathrm{Aut}^+ F_2$ i una $g \in F_2$, tals que $\varphi = \psi_1\theta\psi_2\lambda_g$ i $\|\theta\|_1 + 2|g| \leq \|\varphi\|_1$.*

DEMOSTRACIÓ. Per demostrar aquest lema només necessitem veure que existeix un $\varphi' \in \text{Aut } F_r$ cíclicament reduït i una $g \in F_r$ tal que $\varphi = \varphi'\lambda_g$ i $\|\varphi'\|_1 + 2|g| \leq \|\varphi\|_1$, ja que hem vist en l'ultim lema que tot automorfisme cíclicament reduït es pot escriure com $\varphi' = \psi_1\theta\psi_2$ i pel lema 2.6.(ii) $\|\varphi'\| = \|\psi_1\theta\psi_2\| = \|\theta\|$. Demostrarem la descomposició de φ per inducció sobre la norma $\|\varphi\|_1$.

Si $\|\varphi\| = 2$ aleshores φ ja és directament cíclicament reduïda. Suposem ara que $\|\varphi\| = \|\eta_{u,v}\| > 2$ i que per a qualsevol $\phi \in \text{Aut } F_r$ amb $\|\varphi\| > \|\phi\|$ podem descomposar $\phi = \phi'\lambda_g$ per algun $g \in F_r$ i tenim la desigualtat $\|\phi'\|_1 + 2|g| \leq \|\phi\|_1$. Si u i v són cíclicament reduïdes la demostració ha acabat. Per tant podem suposar que u no és cíclicament reduïda i notem $\bar{u} = c^{-1}u'c$ per algun $c \in A$ i $u' \in F_2$. Si $\bar{v}$ no comença per c^{-1} ni acaba per c aleshores c no podria ser generat per u i v i φ no seria un automorfisme (en la nota següent s'explica en detall aquest argument). Per tant, $v \in c^{-1}A^* \cup A^*c$ i $|\overline{cvc^{-1}}| \leq |v|$. Amb aquestes descomposicions de u i v podem factoritzar $\eta_{u,v} = \eta_{u',\overline{cvc^{-1}}}\lambda_c$ ja que, $c^{-1}(\overline{cvc^{-1}})c = v$. La norma de $\eta_{u',\overline{cvc^{-1}}}$

$$\|\eta_{u',\overline{cvc^{-1}}}\|_1 = |u'| + |\overline{cvc^{-1}}| \leq |u| - 2 + |v| = \|\eta_{u,v}\|_1 - 2 \tag{41}$$

Apliquem la hipòtesis d'inducció: $\eta_{u',\overline{cvc^{-1}}} = \varphi'\lambda_h$ i $\|\varphi'\|_1 + 2|h| \leq \|\eta_{u',\overline{cvc^{-1}}}\|_1$. Per tant,

$$\eta_{u,v} = \eta_{u',\overline{cvc^{-1}}}\lambda_c = \varphi'\lambda_h\lambda_c = \varphi'\lambda_{hc} \tag{42}$$

I arribem al resultat que voliem demostrar:

$$\|\varphi'\|_1 + 2|hc| \leq \|\varphi'\|_1 + 2|h| + 2 \leq \|\eta_{u',\overline{cvc^{-1}}}\|_1 + 2 \leq \|\eta_{u,v}\|_1 = \|\varphi\|_1 \tag{43}$$

□

Nota 3.6. *En la demostració anterior hem dit que si $u = c^{-1}u'c$ però, v no comença per c^{-1}, ni acaba per c aleshores c no pot ser generat per u i v. Primer excloem els casos trivials on $u' = 1$ o $v = 1$. Les potències $u^n = c^{-1}u'^n c$ i v^n per $n \neq 0$ compleixen les mateixes propietats: u^n comença per c^{-1} i acaba amb c i v ni comença per c^{-1}, ni acaba per c. Ara el subgrup generat per u i v està formats per elements w de la forma:*

$$w = \overline{u^{n_1}} \cdot \overline{v^{m_1}} \cdot \ldots \cdot \overline{u^{n_k}} \cdot \overline{v^{m_k}} \tag{44}$$

per $n_i, m_i \neq 0$ per $i = 1, \ldots, k$. El subrgrup també conté tots els elements d'aquesta forma que comencen per v i/o acaben en u. I aquestes expressions són ja reduïdes perquè com hem dit $\overline{v^{n_i}}$ no comença per c^{-1}, ni acaba per c. Per tant si en w no apareix cap potència de v, aleshores $w = u^n \neq c$ per qualsevol $n \neq 0$. I en el cas que w contingui almenys una potència de u i una potència de v(si no conté cap potència de u ja sabem que $v^n \neq c$) l'expressió de w conté una c i una c^{-1} que no es cancel·len i per tant $w \neq c$.

3. Funcions α_2 i β_2

Amb tots els resultats que hem obtingut ara ja som capaços de donar per α_2 una molt bona cota superior i inferior i el valor exacte de la funció $\beta_2(n)$. A continuació demostrem tots aquests resultats.

Teorema 3.7. *Per a tot $n \geq 4$ tenim que $\alpha_2(n) \leq \frac{(n-1)^2}{2}$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\varphi \in \text{Aut } F_2$, hem vist que existeixen dos permutacions de lletres $\psi_1, \psi_2 \in \text{Aut}F_2$, $\theta \in \text{Aut}^+F_2$ i una $g \in F_2$, tals que $\varphi = \psi_1\theta\psi_2\lambda_g$ i $\|\theta\|_1 + 2|g| \leq \|\varphi\|_1$. Tractem el cas de

$g = 1$ primer, ja que no podem utilitzar el Lema 2.6. *(iv)*. Si invertim φ obtenim $\varphi^{-1} = \psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}$ i la seva norma és:

$$\|\varphi^{-1}\|_1 = \|\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}\|_1 = \|\theta^{-1}\|_1 = \|\theta\|_1 = \|\varphi\|_1 \leq n \leq \frac{(n-1)^2}{2} \tag{45}$$

L'ultima desigualtat és certa només per $n \geq 4$. Hem utilitzat el Lema 2.6. *(ii)* i la Proposició 2.1.

Pel cas general on $g \neq 1$ la inversió és $\varphi^{-1} = \lambda_g^{-1}\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1} = \lambda_{g^{-1}}\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}$. Utilitzem el Lema 2.6. *(iv)* i *(ii)* per acotar la norma de φ^{-1}:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{-1}\|_1 &= \|\lambda_{g^{-1}}\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}\|_1 \leq 4|g| \cdot \|\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}\|_\infty \\ &= 4|g| \cdot \|\theta^{-1}\|_\infty \leq 4|g|(\|\theta^{-1}\|_1 - 1) = 4|g|(\|\theta\|_1 - 1). \end{aligned} \tag{46}$$

Com hem dit també, tenim que $\|\theta\|_1 + 2|g| \leq \|\varphi\|_1 \leq n$ i en treiem que $|g| \leq \frac{n-\|\theta\|_1}{2}$. I llavors,

$$\|\varphi^{-1}\|_1 \leq 2(n - \|\theta\|_1)(\|\theta\|_1 - 1). \tag{47}$$

Com que la paràbola $f(x) = 2(n-x)(x-1)$ té el seu màxim absolut a $x = \frac{n+1}{2}$ podem acabar la demostració de la manera següent:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{-1}\|_1 &\leq 2(n - \|\theta\|_1)(\|\theta\|_1 - 1) \leq 2\left(n - \frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{(n-1)^2}{2}. \end{aligned} \tag{48}$$

□

Per trobar una cota inferior el més gran possible, el que fem és buscar automorfismes concrets que tinguin una inversa molt complicada. Per tant, es podria millorar la cota del treball(que és la de l'article [1]) si es trobés un automorfisme més complicat que el que hem utilitzat.

Teorema 3.8. *Per a tot $n \geq 10$ tenim que $\alpha_2(n) \geq \frac{n^2}{4} - 6n + 42$.*

Demostració. Per tot $k \geq 0$ definim l'automorfisme següent:

$$\psi_k = \eta_{ab^{2k},ab^{2k+1}}\lambda_{a^{-k}b} = \eta_{b^{-1}a^{k+1}b^{2k}a^{-k}b,\,b^{-1}a^{k+1}b^{2k+1}a^{-k}b}, \tag{49}$$

que té norma $\|\psi_k\|_1 = 8k + 7$ i la seva inversa és:

$$\psi_k^{-1} = \lambda_{b^{-1}a^k}\eta^{-1}_{ab^{2k},ab^{2k+1}} = \lambda_{b^{-1}a^k}\eta_{a(b^{-1}a)^{2k},a^{-1}b} = \eta_{u,v} \tag{50}$$

Calculem les expressions de u i v en detall (no està fet a l'article):

$$\begin{aligned} u &= a\lambda_{b^{-1}a^k}\eta_{a(b^{-1}a)^{2k},a^{-1}b} = (a^{-k}bab^{-1}a^k)\eta_{a(b^{-1}a)^{2k},a^{-1}b} \\ &= (a(b^{-1}a)^{2k})^{-k}(a^{-1}b)(a(b^{-1}a)^{2k})(a^{-1}b)^{-1}(a(b^{-1}a)^{2k})^k \\ &= ((a^{-1}b)^{2k}a^{-1})^k a^{-1}ba(b^{-1}a)^{2k}b^{-1}a(a(b^{-1}a)^{2k})^k \\ v &= b\lambda_{b^{-1}a^k}\eta_{a(b^{-1}a)^{2k},a^{-1}b} = (a^{-k}ba^k)\eta_{a(b^{-1}a)^{2k},a^{-1}b} \\ &= (a(b^{-1}a)^{2k})^{-k}(a^{-1}b)(a(b^{-1}a)^{2k})^k \\ &= ((a^{-1}b)^{2k}a^{-1})^k a^{-1}b(a(b^{-1}a)^{2k})^k. \end{aligned} \tag{51}$$

I aquestes expressions són reduïdes per com les hem escrit. Per tant la norma de ψ_k^{-1} és:

$$\begin{aligned} \|\psi_k^{-1}\|_1 &= |u| + |v| \\ &= ((2 \cdot 2k+1)k + 3 + 2 \cdot 2k + 2 + (2 \cdot 2k+1)k) + ((2 \cdot 2k+1)k + 2 + (2 \cdot 2k+1)k) \\ &= 16k^2 + 8k + 7. \end{aligned} \tag{52}$$

Si considerem que $\|\psi_k\|_1 = 8k + 7 = n$ obtenim $k = \frac{n-7}{8}$ i:

$$\|\psi_k^{-1}\|_1 = 16\frac{(n-7)^2}{64} + (n-7) + 7 = \frac{n^2 - 10n + 49}{4}. \tag{53}$$

I per a tots els n tals que $n \equiv 7 \pmod 8$ tenim $\alpha_2(n) \geq \frac{n^2-10n+49}{4}$. Ens falta adaptar la funció $\frac{n^2-10n+49}{4}$ perquè sigui una cota per a tot $n \geq 0$. Per a tot $n \geq 7$, notem n' l'únic enter $n' \equiv 7 \pmod 8$ del conjunt $\{n-7, \ldots, n-1, n\}$ i aleshores:

$$\begin{aligned} \alpha_2(n) \geq \alpha_2(n') \geq \frac{n'^2 - 10n' + 49}{4} &\geq \frac{(n-7)^2 - 10(n-7) + 49}{4} \\ &= \frac{n^2}{4} - 6n + 42\ . \end{aligned} \tag{54}$$

La última desigualtat és certa per $n \geq 10$ ja que la paràbola $\frac{x^2-10x+49}{4}$ té el mínim en $x = 5$. Això vol dir que la desigualtat funciona directament per $n \geq 5 + 7 = 12$ per ser una funció creixent a partir de 5, i també es certa per $n \geq 10$ utilitzant la simetria de la paràbola respecte l'eix $x = 5$.

□

Teorema 3.9. *Per a tot $\Phi \in \mathrm{Out}\, F_2$ tenim que $\|\Phi\|_1 = \|\Phi^{-1}\|_1$ i per tant $\beta_2(n) = n$*

Demostració. Per a qualsevol $\varphi \in \Phi$ tenim pel Lema que existeixen dos permutacions de lletres $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Aut}F_2$, $\theta \in \mathrm{Aut}^+F_2$ i una $g \in F_2$, tals que $\varphi = \psi_1\theta\psi_2\lambda_g$. El Lema 2.7. i 2.8. ens permet veure:

$$\|\Phi\|_1 = \|[\varphi]\|_1 = \|[\psi_1\theta\psi_2\lambda_g]\|_1 = \|[\psi_1\theta\psi_2]\|_1 = \|[\theta]\|_1 \tag{55}$$

I per una altre banda obtenim:

$$\|\Phi^{-1}\|_1 = \|[\varphi^{-1}]\|_1 = \|[\lambda_{g^{-1}}\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}]\|_1 = \|[\psi_2^{-1}\theta^{-1}\psi_1^{-1}]\|_1 = \|[\theta]\|_1 = \|[\theta^{-1}]\|_1 \tag{56}$$

Pel lema 2.1. sabem que θ^{-1} és cíclicament reduït i pel Lema 2.8. tenim $\|\Phi^{-1}\|_1 = \|[\varphi^{-1}]\|_1 = \|\varphi^{-1}\|_1$. A més a més pel lema 2.1., $\|\varphi^{-1}\|_1 = \|\varphi\|_1$ i concloem que $\|\Phi\|_1 = \|\Phi^{-1}\|_1$. Conseqüentment:

$$\beta_2(n) = n. \tag{57}$$

□

Capítol 4
Grup lliure amb rang $r \geq 3$

En l'anterior capítol ens hem centrat en $r = 2$, ara volem fer el mateix però per un grup lliure de qualsevol rang. El problema és que no tenim tantes eines per treballar quan augmentem de rang, i obtenir resultats és més difícil. Tot i així obtindrem cotes inferiors de grau r i $r-1$ per α_r i β_r respectivament (que encaixen, en grau, amb les que hem obtingut per $r = 2$ en el capítol anterior). Anteriorment ja hem vist la inclusió de Aut F_r dins de Aut F_{r+1}, així doncs és lògic que quan més gran sigui el rang, més gran siguin les funcions α_r i β_r. Obtenir cotes superior no serà tan fàcil, de fet, només n'obtindrem per β_r i serà molt complicat, ja que haurem de treballar amb l'Outer space que definirem més endevant. En aquest capítol el rang r del grup lliure F_r el mantindrem sempre fixat. En tot aquest capítol treballarem amb l'alfabet $A_r = \{a_1 \dots a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1}\}$ que hem definit en el segon capítol.

1. Cota inferior

Com hem fet amb $r = 2$, per trobar una cota inferior per F_r buscarem un automorfisme concret que la seva inversa tingui una norma molt més gran que la seva propia norma. Començarem per abelianitzar un automorfisme positiu que ens donarà la cota per β_r. Després a través d'aquest automorfisme i una conjugació adient obtindrem la cota per α_r.

Definim per a tot $p \in \mathbb{Z}$ la següent matriu $M^{(p)} = (m_{i,j}^{(p)}) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}\ \mathbb{Z}^r$:

$$m_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ i = j, \\ p, & \text{si } \ j = i + 1 \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases} \tag{58}$$

El determinant de la matriu és evidentment 1, i.e. $\forall p \in \mathbb{Z} \ \ \det(M^{(p)}) = 1$. La matriu és per tant invertible.

Lema 4.1. *Per a tot $p \in \mathbb{Z}$ i $r \geq 2$, sigui $N^{(p)} = (n_{i,j}^{(p)}) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ una matriu definida per:*

$$n_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ i = j, \\ (-p)^{j-i}, & \text{si } \ i < j \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases} \tag{59}$$

Aleshores $N^{(p)} = (M^{(p)})^{-1}$

Demostració. Per demostrar que és la inversa és suficient en veure que el seu producte és la identitat, és a dir que $M^{(p)}N^{(p)} = Id_r$. Per definició de producte de matrius, la posició (i,j) és igual a:

$$\sum_{k=1}^{r} m_{i,k}^{(p)} n_{k,j}^{(p)} = \begin{cases} n_{i,j}^{(p)} + p \cdot n_{i+1,j}^{(p)}, & \text{si } i \neq r, \\ n_{i,i}^{(p)} = 1, & \text{si } i = r. \end{cases} \tag{60}$$

Hem utilitzat que $m_{i,k}^{(p)}$ és igual a 0 a tot arreu menys quan $m_{i,i}^{(p)} = 1$ i quan $m_{i,i+1}^{(p)} = p$. Ara, si $i > j$ tenim que $n_{i,j}^{(p)} + p \cdot n_{i+1,j}^{(p)} = 0 + p \cdot 0 = 0$ i si $i = j$ tenim que $n_{i,j}^{(p)} + p \cdot n_{i+1,j}^{(p)} = 1 + p \cdot 0 = 1$. Finalment si $i > j$, obtenim $n_{i,j}^{(p)} + p \cdot n_{i+1,j}^{(p)} = (-p)^{i-j} + p \cdot (-p)^{j-i-1} = (-p)^{j-i} - (-p)^{j-i} = 0$.

Ens queda veure que també tenim que $N^{(p)}M^{(p)} = Id_r$. Per fer-ho utilizem el que acabem demostrar:

$$N^{(p)}M^{(p)} = N^{(p)}M^{(p)}N^{(p)}(N^{(p)})^{-1} = N^{(p)}(N^{(p)})^{-1} = Id_r. \tag{61}$$

□

Lema 4.2. *Per a tot $p \in \mathbb{Z}$ i $r \geq 2$ tenim que $\|M^{(p)}\|_1 = r + (r-1)p$ i $\|(M^{(p)})^{-1}\|_1 > p^{r-1}$.*

Demostració. La demostració de $\|M^{(p)}\|_1$ és immediata. La de $\|(M^{(p)})^{-1}\|_1$ també és totalment immediata al veure que la posició $n_{1,r}^{(p)} = (-p)^{r-1}$ i per tant $(-p)^{r-1} \leq |p|^{r-1} < \|(M^{(p)})^{-1}\|_1$. □

Definim l'automorfisme positiu que farem servir per trobar les cotes inferiors. Per a qualsevol $p \geq 2$, $\varphi_p \in \mathrm{Aut}^+ F_r$ és:

$$a_i\varphi_p = \begin{cases} a_i a_{i+1}^p, & \text{si } 1 \leq i < r \\ a_r, & \text{si } i = r \end{cases} \tag{62}$$

L'aplicació φ_p és clarament exhaustiva, i existeix una propietat que diu que els endomorfismes exhaustius del grup lliure de rang finit són automorfismes (en particular Hopfian, demostració en [5]). A continuació demostrem una serie de propietats d'aquest automorfisme.

Lema 4.3. *Per a tot $p \geq 2$ i $r \geq 2$:*

(i) $\varphi_p^{ab} = M^{(p)}$

(ii) $a_r\varphi_p^{-1} = a_r$ *i* $a_i\varphi_p^{-1} = a_i(a_{i+1}\varphi_p^{-1})^{-p}$ *per a* $i = 1, \dots, r-1$

(iii) $\overline{a_i\varphi_p^{-1}} \in a_i A_r^* a_{i+1}^{-1}$ *per a* $i = 1, \dots, r-1$

(iv) $\|\varphi_p^{-1}\|_1 < 2|a_1\varphi_p^{-1}|$

Demostració. El punt *(i)* és evident. Per veure el punt *(ii)* és suficient en calcular $(a_i(a_{i+1}\varphi_p^{-1})^{-p})\varphi_p = (a_i\varphi_p)a_{i+1}^{-p} = a_i$ per $i < r$ ($i = r$ és directe).

La demostració de *(iii)* és per inducció inversa utilitzant el punt *(ii)*. Per $r-1$ veiem que $\overline{a_{r-1}\varphi_p^{-1}} = a_{r-1}(a_r\varphi_p^{-1})^{-p} = a_{r-1}a_r^{-p}$, i es compleix que $\overline{a_{r-1}\varphi_p^{-1}} \in a_{r-1}A_r^* a_r^{-1}$. Ara suposem que és cert per $i+1 < r-1$ i volem veure que funciona per i. Per *(ii)*, $a_i\varphi_p^{-1} = a_i(a_{i+1}\varphi_p^{-1})^{-p} \in a_i(a_{i+1}A_r^* a_{i+2}^{-1})^{-p} = a_i(a_{i+2}A_r^* a_{i+1}^{-1})^p = a_i a_{i+2} A_r^* a_{i+1}$, i acabem la demostració ja que en particular $\overline{a_i\varphi_p^{-1}} \in a_i A_r^* a_{i+1}^{-1}$.

Finalment per demostrar *(iv)* veiem que $|a_i\varphi_p^{-1}| > p|a_{i+1}\varphi_p^{-1}|$ per tot $i < r$, ja que per *(ii)*, $\overline{a_{i+1}\varphi_p^{-1}}$ és cíclicament reduït. Pel cas $i = r$, tenim $|a_r\varphi^{-1}| = |a_r| = 1$ i $|a_{r-1}\varphi^{-1}| = |a_{r-1}(a_r\varphi_p^{-1})^{-p}| = |a_{r-1}a_r^{-p}| = p+1$, per tant $p|a_r\varphi_p^{-1}| < |a_{r-1}\varphi_p^{-1}|$. Aleshores si apliquem la desigualtat successivament: $|a_i\varphi_p^{-1}| < \frac{1}{p^{i-1}}|a_1\varphi_p^{-1}|$ per $i = 2, \ldots, r$ i obtenim:

$$\|\varphi_p^{-1}\|_1 = \sum_{k=1}^{r}|a_i\varphi_p^{-1}| < (1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^{r-1}})|a_1\varphi_p^{-1}| < 2|a_1\varphi_p^{-1}|. \tag{63}$$

□

En el següent teorema demostrem les cotes inferiors per les funcions de complexitat α_r i β_r que haviem dit.

Teorema 4.4. *Per a tot $r \geq 2$ existeixen constants $K_r, K_r' > 0$ tals que per a tot $n \geq r$:*
(i) $K_r n^r \leq \alpha_r(n)$
(ii) $K_r' n^{r-1} \leq \beta_r(n)$

Demostració. Sigui $p \geq r$, pels dos útlims lemes i el 2.10. (φ_p és un automorfisme positiu) tenim:

$$\|\varphi_p\|_1 = \|[\varphi_p]\|_1 = \|\varphi_p^{ab}\|_1 = \|M^{(p)}\|_1 = r + (r-1)p \leq rp \tag{64}$$

Amb l'inversa de φ_p obtenim:

$$\|\varphi_p^{-1}\|_1 \leq \|[\varphi_p^{-1}]\|_1 \leq \|(\varphi_p^{-1})^{ab}\|_1 = \|(\varphi_p^{ab})^{-1}\|_1 = \|(M^{(p)})^{-1}\|_1 \geq p^{r-1}. \tag{65}$$

Definim $n_0 = \max\left\{r^2, \frac{(r-1)2^{\frac{1}{r-1}}}{2^{\frac{1}{r-1}}}\right\}$ i considerem només $n \geq n_0$. Agafem $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor = p \geq r$ que compleix $\frac{n-(r-1)}{r} \leq p \leq \frac{n}{r}$ i per tant $rp \in \{n-(r-1), \ldots, n\}$. Aleshores tot $[\varphi_p] \in \mathrm{Out}F_r$ satisfà:

$$\begin{aligned} &\|[\varphi_p]\|_1 \leq rp \leq n \\ &\|[\varphi_p^{-1}]\|_1 \geq p^{r-1} \geq \Big(\frac{n-(r-1)}{r}\Big)^{r-1} = \frac{(n-(r-1))^{r-1}}{r^{r-1}} \end{aligned} \tag{66}$$

Per poder reescriure aquesta desigualtat utilitzem els següents càlculs on $n - a > 0$:

$$(n-a)^s \geq \frac{n^s}{2} \iff (n-a) \geq \frac{n}{2^{1/s}} \iff n(1 - \frac{1}{2^{1/s}}) \geq a \iff n \geq \frac{a2^{1/s}}{2^{1/s}-1} \tag{67}$$

Per com hem definit n_0 tenim que $n \geq \frac{(r-1)2^{\frac{1}{r-1}}}{2^{\frac{1}{r-1}}}$, posem llavors $a = s = r-1$ i obtenim:

$$\|\varphi_p^{-1}\|_1 \geq \frac{(n-(r-1))^{r-1}}{r^{r-1}} \geq \frac{1}{2r^{r-1}}n^{r-1}. \tag{68}$$

Concluim que $\beta_r(n) \geq \frac{1}{2r^{r-1}}n^{r-1}$ per $n \geq n_0$. Com que n_0 és un número finit, podem disminuir la constant $\frac{1}{2r^{r-1}}$ fins a K_r' per tal que $\beta_r(n) \geq K_r' n^{r-1}$ per $n \geq r$. Així el punt *(ii)* queda demostrat.

Per demostrar *(i)* fixem $p \geq r$ i definim $\psi_p = \varphi_p\lambda_{a_1^p}$ (en aquest cas $r \geq 3$, en la resta de la demostració podia ser $r = 2$). Aleshores,

$$\|\psi_p\|_1 = \sum_{i=1}^{r}|a_1^{-p}(a_i\varphi_p)a_1^p| \leq 2rp + \|\varphi_p\|_1 \leq 3rp. \tag{69}$$

I la norma de la inversa,

$$\|\psi_p^{-1}\|_1 = \|\lambda_{a_1^{-p}}\varphi_p^{-1}\| > \sum_{i=3}^{r}|(a_1^p a_i a_1^{-p})\varphi_p^{-1}| = \sum_{i=3}^{r}|(a_1\varphi_p^{-1})^p(a_i\varphi_p^{-1})(a_1^{-1}\varphi_p^{-1})^p|. \tag{70}$$

El lema 3.3 *(iii)* diu que els 3 elements del producte i el producte sencer $(a_1\varphi_p^{-1})^p(a_i\varphi_p^{-1})(a_1^{-1}\varphi_p^{-1})^p$ són reduïts ($(a_1\varphi_p^{-1})^p$ acaba en a_2^{-1}, $a_i\varphi_p^{-1}$ comença per a_i i acaba en a_{i+1}^{-1} amb $i \geq 3$, i $(a_1^{-1}\varphi_p^{-1})^p$ comença per a_2), per tant:

$$|(a_1\varphi_p^{-1})^p(a_i\varphi_p^{-1})(a_1^{-1}\varphi_p^{-1})^p| = p|a_1\varphi_p^{-1}| + |a_i\varphi_p^{-1}| + p|a_1^{-1}\varphi_p^{-1}|. \tag{71}$$

A més a més pel lema 3.3 *(iv)* tenim $\|\psi_p^{-1}\|_1 > 2(r-2)p|a_1\varphi_p^{-1}| > (r-2)p\|\varphi_p^{-1}\|_1 \geq (r-2)p^r$. En la primera desigualtat simplifiquem $|a_i\varphi_p^{-1}| = 0$ (encara que no és cert) i utilitzem que $(a_1\varphi_p^{-1})^{-1} = a_1^{-1}\varphi_p^{-1}$ i per tant $|a_1\varphi_p^{-1}| = |a_1^{-1}\varphi_p^{-1}|$. Conseqüentment, per a tots els $n = 3rp$ i $p \geq r$ tenim:

$$\alpha_r(n) > (r-2)p^r = \frac{r-2}{(3r)^r}n^r. \tag{72}$$

Com en el cas de $r = 2$ adaptem $\alpha_r(n)$ per a tots els n. En aquest cas, com que els punts de la forma $n = 3rp$ estan distanciats per $3r$, la cota adaptada és:

$$\alpha_r(n) \geq \alpha_r(n-3r) > \frac{r-2}{(3r)^r}(n-3r)^r, \tag{73}$$

per a tot $n \geq 3r(p+1) \geq 3r(r+1)$. Com que $\alpha_r(n)$ és no decreixent, i el nombre de punts no acotats és finit($n < 3r(r+1)$), es pot adaptar la constant de n^r per aconseguir que $\alpha_r(n) > K_r n^r$ per a tot $n \geq r$.

□

2. Cota superior

Trobar cotes superiors per α_r i β_r resulta ser molt difícil. Haurem de fer servir l'*Outer space* per a poder trobar una cota de β_r. A continuació definirem aquest espai i algunes de les seves característiques, encara que no demostrarem cap resultat degut a la seva enorme complexitat. Notem l'*Outer space* de rang $r \geq 2$ com χ_r.

A partir d'ara quans ens referim a un *graf* serà a un graf de rang r i que tots els vèrtexs tenen com a mínim grau 3. Recordem que la formula del rang d'un graf Γ és $r(\Gamma) = 1 + |E\Gamma| - |V\Gamma|$ on $|E\Gamma|$ és el número d'arestes i $|V\Gamma|$ el número de vèrtexs. És sabut que $\sum_{v\in V\Gamma} gr(v) = 2|E\Gamma|$, tenim que $r(\Gamma) = \frac{1}{2}\sum_{v\in V\Gamma} gr(v) - |V\Gamma| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V\Gamma}(gr(v) - 2)$. Per tant, com que el rang està fixat, i el grau de tots els vèrtex es més gran o igual que 3, només hi ha un número finit de grafs amb aquestes propietats un cop fixat r.

Definim una mètrica sobre Γ com una funció $l\colon E\Gamma \to [0,1]$ definida sobre el conjunt d'arestes i tal que $\sum_{e\in E\Gamma} l(e) = 1$. Aquesta mètrica ha de complir que el conjunt d'arestes de longitud 0 formi un bosc(un conjunt d'arbres). Notem com Σ_Γ l'espai de totes les mètriques l sobre Γ. Aquest espai ens el podem imaginar com el símplex de dimensió $|E\Gamma|$ que *li falten cares*, ja que hi ha algunes cares que no pertànyen al símplex per complir la condició que el conjunt d'arestes nul·les formi un bosc. Si obtenim Γ' col·lapsant un bosc de Γ (definim col·lapsar un bosc per eliminar totes les arestes del bosc i ajuntar tots els vèrtexs de cada arbre en un de sol), el rang de Γ' segueix sent r ja que, per a cada arbre A que col·lapsem, disminuim en $|EA|$ el nombre d'arestes i en $|VA|+1$ el nombre d'vèrtexs, però el arbres compleixen la propietat que $|EA| = |VA| + 1$. LLavors tenim una inclusió natural de Σ'_Γ dins de Σ_Γ assignant un valor 0 a totes les arestes eliminades.

Fixem el graf de la rosa R_r com un graf amb un vertex o i r arestes (pètals). Identifiquem el grup lliure F_r amb el grup fonamental $\pi_1(R_r, o)$, de manera que cada pètal orientat correspon a un generador a_i de F_r. Aquesta identificació fa que cada paraula de F_r correspongui a un camí en bucle començant i acabant o (el punt base de R_r).

Un *graf marcat* és una parella (Γ, f) on f és un marcador, és a dir, una equivalència homotòpica entre R_r i Γ. Considerem la relació d'equivalència entre dos grafs marcats següent: $(\Gamma, f) \sim (\Gamma', f')$ si i només si existeix un homeomorfisme $\mu\colon \Gamma \to \Gamma'$ tal que $f\mu$ sigui homotòpica a f'. Notem aquest espai mòdul la relació d'equivalencia com: $\mathcal{MG}/\sim$. Aquesta classe d'equivalència s'enten com que tots el representants d'una clase $[(\Gamma, f)] \in \mathcal{MG}/\sim$ comparteixen un mateix graf subjacent. Per tant, si a l'espai de totes les mètriques de Γ el denotem $\Sigma_{[(\Gamma,f)]}$, aleshores l'*Outer space* χ_r és la unió disjunta de

$$\bigsqcup_{[(\Gamma,f)]\in\mathcal{MG}/\sim} \Sigma_{[(\Gamma,f)]} \tag{74}$$

identificant certes cares de símplexs amb certes d'altres segons la inclusio de natural de $\Sigma_{\Gamma'}$ en Σ_Γ, comentada antriorment, per cada col·lapse d'un bosc de Γ per obtenir Γ'. Aquesta unió disjunta, amb les identificacions, forma l'espai χ_r que és connex, però aquest resultat és complicat i no en farem la demostració ([5]). Amb aquesta definició obtenim un punt $x \in \chi_r$ està representat per una tripleta de la forma (Γ, f, l). Una manera intuïtiva d'entendre aquest espai és que (Γ, f) defineix un símplex, i que l és un punt sobre aquest símplex.

Hi ha una acció natural de Aut F_r sobre χ_r. Sigui $\varphi \in$ Aut F_r, si l'entenem com un automorfisme sobre la rosa $\varphi\colon R_r \to R_r$, llavors per a tot punt $x = (\Gamma, f, l) \in \chi_r$ definim l'acció $\varphi \cdot x$ com $(\Gamma, \varphi f, l)$. És evident que aquesta acció compleix les propietats perquè sigui una acció de Aut F_r sobre χ_r. La construcció d'aquesta acció fa que els outer automorfismes actuin de forma trivial ja que no afecta l'acció perquè la relació de conjugació està inclosa en les identificacions de l'Outer space. Això permet que tinguem també una acció de Out F_r sobre χ_r definida igual que la de Aut F_r, $[\varphi] \cdot x = (\Gamma, \varphi f, l)$.

Sobre aquest espai χ_r s'hi pot definir la mètrica de Lipschitz. Siguin $x, x' \in \chi_r$, agafem dos representants (Γ, f, l) i (Γ', f', l') de x i x' respectivament. Una *diferència de marcatge* és una aplicació $\mu\colon \Gamma \to \Gamma'$ lineal en les arestes (una aresta s'aplica sobre la seva imatge a velocitat constant) i tal que $f\mu$ sigui homotòpica a f'. Per una diferència de marcatge podem definir $\sigma(\mu)$ com el pendent màxim de μ sobre les aretes $e \in E\Gamma$. El pendent d'una aresta s'enten com el quocient entre la longitud de la imatge de l'aresta (per la mètrica l') i la longitud de la pròpia aresta (per la mètrica l). Amb tot això podem definir la distància entre x i x' com:

$$d(x, x') = \min_{\mu} \{\log \sigma(\mu)\}. \tag{75}$$

El mínim s'agafa de tots les possibles diferències de marcatges, i es pot demostrar que aquest mínim s'assoleix gràcies al Teorema d'Arzela-Ascoli.

A continuació enunciem una sèrie de propietats d'aquesta distància sense entrar en les seves demostracions.

(i) $d(x, y) \geq 0$ i $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$,

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ per a tots els $x, y, z \in \chi_r$,

(iii) Out F_r actua per isometries: $d([\varphi] \cdot x, [\varphi] \cdot y) = d(\varphi \cdot x, \varphi \cdot y) = d(x, y)$ per a tot $x, y \in \chi_r$ i $\varphi \in \text{Aut } F_r$,

(iv) $d(x, y) \neq d(y, x)$ en general.

Per tant d no es una distància en el sentit classic, pero li direm distancia igualment. I de fet, aquesta assimetria és la que ens permetrà demostrar la desigualtat que volem.

Ja per últim, definim per a tot $\epsilon > 0$ la *ϵ-thick part* de χ_r:

$$\chi_r(\epsilon) = \{(\Gamma, f, l) \in \chi_r \mid l(p) \geq \epsilon \;\; \forall p \text{ camí tancat no trivial de} \Gamma\} \tag{76}$$

El següent teorema és en el que ens basarem per trobar la cota superior de β_r.

Teorema 4.5 (Algom-Kfir, Bestvina)**.** *Sigui $r \geq 2$, per a tot $\epsilon > 0$ existeix una constant $M = M(r, \epsilon) > 0$ tal que per a qualsevol $x, y \in \chi_r(\epsilon)$*

$$d(x, y) \leq M \cdot d(y, x) \tag{77}$$

La cota superior de β_r és un corol·lari d'aquest teorema:

Lema 4.6. *Per a qualsevol $r \geq 2$ existeixen dos constants $K_r, M_r > 0$ tals que $\beta_r(n) \leq K_r n^{M_r}$ per $n \geq 1$*

Demostració. Fixem l'automorfisme $\varphi \in \text{Aut } F_r$ i prenem el punt $x \in \chi_r$ representat per (R_r, id, l_0) on l_0 assigna longitud $1/r$ a cada petal. El marcador és la identitat i per això $\Gamma = R_r$. La imatge de x per l'acció de $[\varphi]$ és $[\varphi] \cdot x = (R_r, \varphi, l_0)$, i l'aplicació $\mu \colon R_r \to R_r$ és una diferència de marcatge (entre x i $[\varphi] \cdot x$) si i només si μ és homotòpica a φ. Per la construcció de l'Outer space i les identificacions que fa servir, això succeeix si i només si $\mu = \varphi \lambda_w \lambda_p$ per algun $w \in F_r$ i per algun camí p del punt base o fins un punt interior d'un petal amb $l_0(p) \leq 1/(2r)$. El motiu que $l_0(p) \leq 1/(2r)$ és que si p recorre menys d'un pètal aleshores en un sentit o un altre del pètal arribariem a que $l_0(p) \leq 1/(2r)$ (ja que per defininció de l_0 cada pètal té longitud $1/r$), i en el cas que p recorregués més d'un pètal, podriem incloure aquests pètals complets en la paraula $w \in F_r$.

Amb aquesta definició de μ tenim que $l_0(a_i\mu) = l_0(p) + |a_i\varphi\lambda_w|\frac{1}{r} + l_0(p)$ ja que l'imatge de l'aresta a_i fa dos cops el camí p (en un sentit i en l'altre per la conjugació), i com que $|a_i\varphi\lambda_w|$ és la longitud de la paraula $a_i\varphi\lambda_w$ per la definició de l_0 dividim per r. La definició que $\sigma(\mu)$ és la següent:

$$\sigma(\mu) = \max_{i=1,\ldots,r} \frac{l_0(a_i\mu)}{l_0(a_i)} = \max_{i=1,\ldots,r} \left(2rl_0(p) + \frac{r}{r}|a_i\varphi\lambda_w|\right) = 2rl_0(p) + \|a_i\varphi\lambda_w\|_\infty. \tag{78}$$

I conseqüentment,

$$\begin{aligned} d(x, [\varphi] \cdot x) &= \min_{w,p} \{\log(\sigma(\mu))\} = \log\left(\min_{w,p} (2rl_0(p) + \|a_i\varphi\lambda_w\|_\infty)\right) \\ &= \log(\|[\varphi]\|_\infty). \end{aligned} \tag{79}$$

Per la propietat d'isometria de d tenim que,

$$d([\varphi]\cdot x, x) = d(x, [\varphi^{-1}]\cdot x) = \log(\|[\varphi^{-1}]\|_\infty). \tag{80}$$

Amb tots aquests resultats podem aplicar el teorema de Algom-Kfir i Bestvina ja que tots els punts que estem considerant estan a la $\frac{1}{r}$-*thick part* de χ_r gràcies a la definició de l_0. Per tant, el teorema ens diu que existeix una constant $M_r = M(r, \frac{1}{r})$ tal que $d([\varphi]\cdot x, x) \leq M_r \cdot d(x, [\varphi]\cdot x)$ i substituint $\log(\|[\varphi^{-1}]\|_\infty) \leq M_r \log(\|[\varphi]\|_\infty)$, i arribem a $\|[\varphi^{-1}]\|_\infty \leq \|[\varphi]\|_\infty^{M_r}$. Utilitzant la Proposició 2.5. i anomenant $C_r = C_{\infty,1,r}$ obtenim,

$$\|[\varphi^{-1}]\|_1 \leq C_r\|[\varphi^{-1}]\|_\infty \leq C_r\|[\varphi]\|_\infty^{M_r} \leq C_r^{M_r+1}\|[\varphi]\|_1^{M_r} \tag{81}$$

i concloem que $\beta_r(n) \leq K_r n^{M_r}$ si anomenem $K_r = C_r^{M_r+1}$.

□

Arribem a la conclusió que existeixen dues constants $K_r, K'_r > 0$ tals que $K'_r n^{r-1} \leq \beta_r(n) \leq K_r n^{M_r}$ on $M_r > 0$ és una constant prou gran. Això significa que la distància entre les cotes pot ser molt gran i el més probable és que cap de les dues s'acosti gaire a $\beta_r(n)$. En el cas de la cota inferior és degut a que hem utilitzat l'abelianització d'automorfismes, i seria lògic que automorfismes no abelianitzats poguessin donar cotes inferiors superiors a la que hem construit amb φ_p. Pel que fa a la cota superior, hem vist que pel teorema de Algom-Kfir i Bestvina existeix una constant prou gran per acotar el grau polinòmic de $\beta_r(n)$, però sembla raonable pensar que el grau de $\beta_r(n)$ mai arribarà a ser tant gran.

Capítol 5
El grup lliure abelià

Per realitzar aquest treball hem seguit principalment el que s'havia fet en l'article [1]. En canvi, en aquest capítol, estudiem el grup lliure abelià que encara no s'havia tractat. És tracte d'un cas particular del que hem vist en l'anterior capítol, i per tant més senzill d'analitzar, ja que podrem utilitzar alguns arguments que només són vàlids en el cas que el grup sigui abelià.

El grup lliure abelià de rang r és isomorf a $\mathbb{Z}^r$. En els grups lliures abeliàns no té sentit diferenciar les funcions $\alpha_{\mathbb{Z}^r}$ i $\beta_{\mathbb{Z}^r}$ ja que la conjugació per a qualsevol element és la funció identitat i llavors $\alpha_{\mathbb{Z}^r}(n) = \beta_{\mathbb{Z}^r}(n)$ per a qualsevol $n \geq 1$. Definim llavors la funció de complexitat de $\mathbb{Z}^r$ com $\alpha_{\mathbb{Z}^r} = \beta_{\mathbb{Z}^r} = \alpha_r$. Com ja hem vist anteriorment els automorfismes del grup lliure abelia de rang r són Aut $\mathbb{Z}^r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$. Aleshores la definició formal de α_r és:

$$\alpha_r(n) = \max\{\|A^{-1}\|_1 \mid \quad A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}), \quad \|A\|_1 \leq n\} \tag{82}$$

Definim $\alpha_r(n)$ amb la $1-$norma, ja que hem vist en la proposició 1.5 que canviar la norma no altera la classe d'equivalencia de $\beta_r(n)$ (per F_r), i és evident que passa el mateix per $\alpha_r(n)$. També és evident que $\alpha_r(n)$ és una funció no decreixent. Com en els casos de α_G i β_G (per un grup qualsevol), tenim que $\alpha_r(n) = 0$ per $n = 0, \ldots, r-1$.

En aquest cas també volem obtenir una cota inferior i superior el més pròximes possibles entre elles. Comencem per la cota inferior que és més senzilla.

En el capítol anterior hem definit la matriu $M^{(p)}$ per trobar les cotes inferiors de α_r i β_r, ara la farem servir també per acotar inferiorment la funció $\alpha_r(n)$. Recordem que en el lema 3.2 hem vist que $\|M^{(p)}\|_1 = r + (r-1)p$ i $\|(M^{(p)})^{-1}\|_1 > p^{r-1}$.

Lema 5.1. *Per a tot $r \geq 2$ existeix una constant $L > 0$ tal que per a tot $n \geq r$, $\alpha_r(n) \geq Ln^{r-1}$*

Demostració. Gràcies al lema 3.2 tenim que si $\|M^{(p)}\|_1 = r + (r-1)p = n$, aleshores per a tots els n tals que $p = \frac{n-r}{r-1}$ és enter tenim que:

$$\alpha_r(n) \geq \|(M^{(p)})^{-1}\|_1 > p^{r-1} = \left(\frac{n-r}{r-1}\right)^{r-1} = \frac{1}{(r-1)^{r-1}}(n-r)^{r-1}. \tag{83}$$

Per adaptar la funció per a qualsevol n enter utilitzem que només hi ha un element $n' \in \{n, n-1, \ldots, n-r+2\}$ tal que $n' \equiv r \equiv 1 \pmod{r-1}$. Aleshores,

(84)
$$\alpha_r(n) \geq \alpha_r(n') \geq \frac{1}{(r-1)^{r-1}}(n'-r)^{r-1} \geq \frac{1}{(r-1)^{r-1}}(n-r+2-r)^{r-1} = \frac{1}{(r-1)^{r-1}}(n-2(r-1))^{r-1}.$$

Com que $\alpha_r(n)$ és una funció creixent podem canviar la constant $\frac{1}{(r-1)^{r-1}}$ per una altra constant $L > 0$ tal que $\alpha_r(n) \geq Ln^{r-1}$. □

Amb continuació demostrem la cota superior de $\alpha_r(n)$, que també és polinòmica de grau $r-1$.

Lema 5.2. *Per a tot $r \geq 2$ existeix una constant $U > 0$ tal que per a tot $n \geq r$, $\alpha_r(n) \leq Un^{r-1}$*

Demostració. Sigui $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ amb $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}|a_{i,j}| \leq n$, i la fórmula per la matriu inversa de A és:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{cof}(A)^T \tag{85}$$

i com que $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$, tenim que $\det A = \pm 1$. Notem $\mathrm{cof}(A)^T := (c_{i,j}) = (-1)^{i+j}\det\,(M(i,j))$, on $M(i,j)$ és la matriu A si eliminem la fila i i la columna j (matriu de $(r+1)\times(r+1)$). Calculem el determinant de $M(i,j) = (m_{k,l})$:

$$\det\,(M(i,j)) = \left|\sum_{\sigma\in S_{r-1}} \mathrm{sign}(\sigma)\prod_{k=1}^{r-1} m_{k,\sigma_k}\right| \leq \sum_{\sigma\in S_{r-1}}\left|\prod_{k=1}^{r-1} m_{k,\sigma_k}\right| = \sum_{\sigma\in S_{r-1}}\prod_{k=1}^{r-1}|m_{k,\sigma_k}| \tag{86}$$

Ara utilitzem la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i geomètrica per veure que:

$$\prod_{k=1}^{r-1}|m_{k,\sigma_k}| \leq \left(\frac{|m_{1,\sigma_1}| + \cdots + |m_{r-1,\sigma_{r-1}}|}{r-1}\right)^{r-1} \leq \frac{(n-1)^{r-1}}{(r-1)^{r-1}}, \tag{87}$$

com que cap fila ni columna de A pot ser nul·la, $|m_{1,\sigma_1}| + \cdots + |m_{r-1,\sigma_{r-1}}| \leq n-1$. Ara doncs ja podem acotar el determinant de $M(i,j)$,

$$\det\,(M(i,j)) \leq \sum_{\sigma\in P_n}\prod_{k=1}^{r-1}|m_{k,\sigma_k}| \leq \frac{(r-1)!}{(r-1)^{r-1}}(n-1)^{r-1}$$

Ja que els elements m_{k,σ_k} són elements de A. Amb tots aquests resultats ja podem acotar la funció de complexitat α_r,

$$\|A^{-1}\|_1 = \|\mathrm{cof}(A)^T\|_1 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}|c_{i,j}| = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}|M(i,j)| \leq \frac{r^2(r-1)!}{(r-1)^{r-1}}(n-1)^{r-1} \tag{88}$$

I per tant, existeix una constant $U > 0$ tal que per a qualsevol $n \geq r$, $\alpha_r(n) \leq Un^{r-1}$

□

Concluim que la funció de complexitat $\alpha_r(n)$ és una funció polinòmica de grau $r-1$.

Bibliografia

[1] M.Ladra, P.V. Silva, and E. Ventura, Bounding the gap between a free group (outer) automorphism and its inverse, acceptat a *Collectanea Mathematica*.

[2] M. Cohen, W. Metzler, and A. Zimmermann, What does a basis of F(a,b) look like? *Math. Ann.* 257 (1981), 435-445.

[3] Y. ALgom-Kfir and M. Bestvina, Asymmetry of Outer Space. *Geom. Dedicata* 156 (2012), 81-92.

[4] R.C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1997

[5] M. Culler, K. Vogtmann, Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.* 84 (1986), no. 1, 91-119.

[6] Z.X. Wen i Z.Y. Wen, Local isomorphisms of invertible substitutions. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 318 (1994), 299-304

[7] J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Mathematische Annalen* 91, 169-209 (1924).

[8] J. Nielsen, Kurvennetze auf Flächen. Thesis, Kiel 1913.