

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BarcelonaTech (UPC)
FME – FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

GRAU EN MATEMÀTIQUES
TREBALL FI DE GRAU

Grups Hiperbòlics



Autora: Hilda Gambús Vinyeta

Director: Enric Ventura Capell

Departament: Matemàtiques

Barcelona, Maig 2026



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística



Universitat Politècnica de Catalunya

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

GRUPS HIPERBÒLICS

Autora: Hilda Gambús Vinyeta

Director: Enric Ventura Capell

Maig, 2026

Agraïments

L'agraïment més gran i sincer és per a tu, Enric. El temps que hem dedicat a aquest treball ha estat realment valuós. He gaudit molt del camí: de totes les pissarres que hem omplert i de totes les converses que hem compartit. De tot cor, gràcies.

A vosaltres, us vull fer un agraïment especial:

Mama i Papa... per tot. Per ser-hi sempre. Em feu molt feliç.

Jan, per ser el millor company de vida des del primer moment.

Fox, pel teu suport incondicional. M'inspires molt.

Gómez, per mostrar-me la bellesa de les matemàtiques.

Gràcies també als que heu fet del meu trajecte pel grau una etapa meravellosa: a les meves amigues properes, als amics que heu estat des del principi i a aquells amb qui ens hem descobert més tard.

FME i tots els que en formeu part... gràcies per tant!

Resum

Català

En aquest treball de fi de grau s'estudien els grups hiperbòlics en el marc dels grups finitament generats. L'objectiu principal és presentar-ne una caracterització geomètrica i mostrar que la hiperbolicitat no depèn del sistema de generadors escollit, sinó que és una propietat inherent del grup. Per fer-ho, primer s'introdueix la noció d'hiperbolicitat en espais mètrics geodèsics i, després, es defineix el graf de Cayley, que permet interpretar geomètricament un grup finitament generat. A continuació, es demostra que els grups hiperbòlics tenen el problema de la paraula resoluble i s'estudia la frontera de Gromov. Finalment, se'n dona una aplicació concreta en el cas 0-hiperbòlic del grup lliure, amb l'objectiu de demostrar que el subgrup de punts fixos d'un automorfisme d'un grup lliure finitament generat és finitament generat.

English

In this bachelor's thesis, we study hyperbolic groups in the setting of finitely generated groups. The main objective is to present a geometric characterization of these groups and to show that hyperbolicity does not depend on the chosen generating set, but is instead an intrinsic property of the group. To do this, we first introduce the notion of hyperbolicity in geodesic metric spaces and then define the Cayley graph, which makes it possible to interpret a finitely generated group geometrically. We then prove that hyperbolic groups have a solvable word problem and study the Gromov boundary. Finally, we give a concrete application in the 0-hyperbolic case of free groups, with the aim of proving that the fixed subgroup of an automorphism of a finitely generated free group is finitely generated.

Índex

Introducció	1
1 Espais Hiperbòlics	3
1.1 Geometria a gran escala	3
1.2 Hiperbolicitat i quasi-hiperbolicitat	8
1.3 Equivalència entre hiperbolicitat i quasi-hiperbolicitat en espais geodèsics .	12
2 De l'àlgebra a la geometria de grups	22
2.1 Construcció dels grups lliures	22
2.2 Presentacions de grups	26
2.3 Grafs de Cayley	27
3 Grups Hiperbòlics	31
3.1 Caracterització dels grups hiperbòlics	31
3.2 Problema de la paraula en grups hiperbòlics	33
3.3 Frontera de Gromov	40
3.3.1 Aplicació al cas del grup lliure	56
Conclusions	72
Bibliografia	73

Introducció

«Però tot allò que es pugui anomenar rigor es perd precisament quan les coses esdevenen interessants i no trivials.»

— Mikhail Gromov

La teoria dels grups hiperbòlics és molt extensa. En el context de la teoria geomètrica de grups, Mikhail Gromov en va ser el principal impulsor durant la dècada de 1980, en un intent de generalitzar el món dels grups lliures (Secció 2.1) incorporant-hi un component més geomètric. Les seves notes sobre grups hiperbòlics, recollides a [9], no tenien la forma d'una exposició sistemàtica i completament detallada, sinó que presentaven un conjunt d'idees, intuïcions geomètriques, enunciats i esbossos de demostracions que han servit de punt de partida per a molts desenvolupaments posteriors.

Aquesta combinació d'intuïció geomètrica i dificultat tècnica, juntament amb la riquesa del seu abast, explica que la teoria dels grups hiperbòlics continuï sent avui dia una àrea activa de recerca. Amb els anys han aparegut diversos llibres i articles que n'han desenvolupat els fonaments amb més detall. Per qüestions d'espai, no podem citar-los tots; tanmateix, entre les referències que han constituït la base d'aquest estudi destaquem [12], [1], [10], [13], [4], [8] i [5].

Atès que els continguts que tractarem no formen part habitualment del programa del grau, aquest treball pretén ser una introducció al tema, començant des dels fonaments i arribant a alguna aplicació concreta.

En el marc dels grups finitament generats, cal observar que parlar de “grup hiperbòlic” amaga una qüestió essencial: la hiperbolicitat és una propietat inherent al grup i, per tant, no depèn del sistema de generadors escollit. Aquesta constatació, que serà el motor del treball i un dels primers resultats centrals que caldrà demostrar per veure que la noció de grup hiperbòlic està ben definida, planteja dos camins que haurem de recórrer. Per una banda, haurem de definir en què consisteix la hiperbolicitat en un espai mètric i, per altra banda, haurem de trobar eines per associar a un grup una noció *a priori* geomètrica. En consonància amb aquest plantejament, el primer capítol estarà dedicat a introduir les eines mètriques necessàries. En particular, definirem la noció d'hiperbolicitat en espais mètrics geodèsics i introduïrem la geometria a gran escala, que permet identificar espais mètrics que, vistos de lluny, presenten una geometria semblant. Aquesta eina serà fonamental per poder afirmar, més endavant, que el sistema de generadors no és rellevant a l'hora de distingir els grups hiperbòlics dels que no ho són.

El segon capítol començarà amb la construcció dels grups lliures, que són fonamentals en teoria de grups, ja que tot grup es pot veure com un quocient d'un grup lliure (Teorema 2.2.1). Més enllà de l'interès propi d'aquest resultat, en aquest treball els grups lliures juguen un paper especial perquè, com veurem, constitueixen un cas particular de grups hiperbòlics. En aquest sentit, la noció de grup hiperbòlic pot entendre's com una generalització geomètrica de la geometria dels grups lliures.

També introduïrem les presentacions de grups i el graf de Cayley associat a un grup finitament generat. Aquest graf depèn del sistema de generadors escollit; tanmateix, gràcies a la geometria a gran escala definida en el primer capítol, veurem que els grafs de Cayley associats a diferents sistemes finits de generadors són equivalents des del punt de vista quasi-isomètric (Proposició 2.3.6).

A l'últim capítol recollirem tot el que s'ha desenvolupat anteriorment per definir els grups hiperbòlics. A grans trets, podem avançar que un grup finitament generat serà hiperbòlic si, per a algun sistema finit de generadors —i, per tant, per a qualsevol—, la realització geomètrica del seu graf de Cayley és un espai hiperbòlic. La feina feta en els capítols anteriors permetrà formular aquesta definició de manera natural. També veurem una propietat important dels grups hiperbòlics: mitjançant l'algorisme de Dehn, es pot demostrar que tenen el problema de la paraula resoluble, fet que no és cert per a tots els grups finitament presentats.

Dins d'aquest mateix capítol, anirem més enllà i definirem la frontera de Gromov, dotant-la d'una mètrica que indueix una topologia. En el cas dels grups lliures, aquesta frontera es podrà descriure de manera especialment explícita i donarà lloc a una compactificació natural de F . Finalment, en veurem una aplicació a un resultat algebraic: el subgrup de punts fixos d'un automorfisme d'un grup lliure finitament generat és finitament generat. D'aquesta manera, el treball es tancarà mostrant com, per demostrar un resultat purament algebraic, és possible fer servir eines geomètriques i topològiques. Aquest serà, en definitiva, el fil conductor de tot el treball: veure com la geometria permet revelar propietats profundes dels grups.

Capítol 1:

Espais Hiperbòlics

L'objectiu d'aquest capítol és introduir la noció d'hiperbolicitat en el sentit de Gromov a partir dels conceptes mètrics bàsics necessaris. A diferència de la geometria Riemanniana clàssica, aquí no treballarem amb curvatura definida localment, sinó amb propietats globals dels espais mètrics. En particular, ens interessarà la geometria a gran escala: aquella que estudia la forma dels espais quan s'observen des de lluny i que, per tant, ignora els detalls locals. L'eina adequada per formalitzar aquesta perspectiva és la quasi-isometria. Introduïrem també les quasi-geodèsiques, fins a arribar a les definicions d'espai hiperbòlic i d'espai quasi-hiperbòlic, i veurem que ambdues són equivalents en el cas geodèsic. Aquest capítol es basa principalment en el llibre de Löh [12, Capítols 5 i 7], amb algunes adaptacions a la notació i als objectius d'aquest treball.

1.1 Geometria a gran escala

Definició 1.1.1. Un *espai mètric* és una parella (X, d) formada per un conjunt X i una aplicació

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

que satisfà les propietats següents:

- (i) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (ii) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in X$ es compleix la desigualtat triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La funció d s'anomena distància.

En la resta de definicions i observacions d'aquest capítol, considerarem, llevat que s'indiqui el contrari, espais mètrics (X, d_X) i (Y, d_Y) , i una aplicació $f: X \rightarrow Y$. Quan les mètriques siguin clares pel context, farem un abús de notació i direm simplement que X i Y són espais mètrics.

Definició 1.1.2. Diem que f és una *immersió isomètrica* si $\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$. Si, a més, existeix una immersió isomètrica $g: Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = \text{id}_Y$ i $g \circ f = \text{id}_X$, diem que f és una *isometria*. X i Y són *isomètrics* si existeix una isometria entre ells.

Observació 1.1.3. Tota immersió isomètrica és injectiva. En efecte, si $f(x) = f(x')$, aleshores

$$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) = 0,$$

i per tant $x = x'$. Això justifica el terme *immersió*. □

Definició 1.1.4. Una aplicació $f': X \rightarrow Y$ està a *distància finita* de f si existeix $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que per a tot $x \in X$ $d_Y(f(x), f'(x)) \leq r$. També direm, simplement, que f i f' estan a distància finita.

Diem que f té *quasi-inversa* si existeix una aplicació $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ està a distància finita de id_X i $f \circ g$ està a distància finita de id_Y .

Definició 1.1.5. Diem que f és una *immersió quasi-isomètrica* si existeixen $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tals que f és una *immersió (c, b) -quasi-isomètrica*; és a dir,

$$\forall x, x' \in X, \quad \frac{1}{c}d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + b.$$

Si, a més, f té *quasi-inversa*, diem que és una *quasi-isometria*. X i Y són *quasi-isomètrics* si existeix una quasi-isometria $X \rightarrow Y$. En tal cas escriurem $X \sim_{QI} Y$.

Observació 1.1.6. A diferència d'una immersió isomètrica, una immersió quasi-isomètrica pot no ser injectiva. $\square$

Observació 1.1.7. Podem suposar $c \geq 1$ en la definició d'immersió (c, b) -quasi-isomètrica, ja que si $c < 1$ n'hi ha prou de prendre $c' = \frac{1}{c}$ i $b' = \frac{b}{c}$ per obtenir una immersió (c', b') -quasi-isomètrica amb $c' \geq 1$. $\square$

Observació 1.1.8. Si f és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica, aleshores és també una immersió (c', b') -quasi-isomètrica per a tot $c' \geq c$ i tot $b' \geq b$. $\square$

Definició 1.1.9. Sigui $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Diem que f té *imatge c -quasi-densa* si per a tot $y \in Y$ existeix $x \in X$ tal que $d_Y(f(x), y) \leq c$. Diem que f té *imatge quasi-densa* si existeix $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que f té imatge c -quasi-densa.

Observació 1.1.10. Si f té imatge c -quasi-densa, aleshores f té imatge c' -quasi-densa per a tot $c' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $c' \geq c$. $\square$

Proposició 1.1.11. Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació entre espais mètrics (X, d_X) i (Y, d_Y) . Llavors:

$$f \text{ és una quasi-isometria} \iff f \text{ és una immersió quasi-isomètrica amb imatge quasi-densa.}$$

Demostració. Per demostrar la implicació cap a la dreta, suposem que f és una quasi-isometria. Per definició, existeix una immersió quasi-isomètrica que n'és quasi-inversa, $g: Y \rightarrow X$. A més, $f \circ g$ està a distància finita de id_Y . Per tant, existeix $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que per a tot $y \in Y$ $d_Y(f(g(y)), y) \leq c$. Així, per a tot $y \in Y$, prenent $x = g(y)$, obtenim $d_Y(f(x), y) \leq c$.

Per demostrar la implicació cap a l'esquerra, suposem que f és una immersió quasi-isomètrica amb imatge quasi-densa. Per l'Observació 1.1.8 i l'Observació 1.1.10, triant una constant prou gran, podem suposar que

$$\forall x, x' \in X, \quad \frac{1}{c}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + c,$$

i també que

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad d_Y(f(x), y) \leq c.$$

Pel fet que la imatge de f és quasi-densa, per a cada $y \in Y$ podem triar un punt $x_y \in X$ tal que $d_Y(f(x_y), y) \leq c$. Usant l'axioma de l'elecció, obtenim així una aplicació

$$\begin{aligned} g: Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto x_y. \end{aligned}$$

Vegem que g és una quasi-inversa de f .

Per construcció, per a tot $y \in Y$ tenim $d_Y(f(g(y)), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c$. D'altra banda, per a tot $x \in X$, usant que f és una immersió quasi-isomètrica i que, per l'Observació 1.1.7, podem suposar que $c \geq 1$, tenim

$$\begin{aligned} d_X(g(f(x)), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 \\ &= 2c^2. \end{aligned}$$

Així, $f \circ g$ està a distància finita de id_Y i $g \circ f$ està a distància finita de id_X . Només queda comprovar que g també és una immersió quasi-isomètrica. Siguin $y, y' \in Y$, aleshores $d_X(g(y), g(y')) = d_X(x_y, x_{y'})$. Per la desigualtat quasi-isomètrica de f , tenim

$$\begin{aligned} d_X(x_y, x_{y'}) &\leq c d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + c^2 \\ &\leq c(d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(y', f(x_{y'}))) + c^2 \\ &\leq c(d_Y(y, y') + 2c) + c^2 \\ &= c d_Y(y, y') + 3c^2. \end{aligned}$$

Això dona la cota superior.

Per a la cota inferior, usant de nou que f és una immersió quasi-isomètrica, obtenim

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) &= d_X(x_y, x_{y'}) \\ &\geq \frac{1}{c} d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) - 1 \\ &\geq \frac{1}{c} (d_Y(y, y') - d_Y(f(x_y), y) - d_Y(f(x_{y'}), y')) - 1 \\ &\geq \frac{1}{c} d_Y(y, y') - \frac{2c}{c} - 1 \\ &= \frac{1}{c} d_Y(y, y') - 3. \end{aligned}$$

Per tant, g és una immersió quasi-isomètrica. A més, hem vist que $f \circ g$ i $g \circ f$ estan a distància finita de les identitats respectives. Així doncs, g és una quasi-inversa de f , i per tant f és una quasi-isometria. $\square$

Observació 1.1.12. Siguin X, Y i Z espais mètrics.

1. Tota aplicació a distància finita d'una immersió quasi-isomètrica és una immersió quasi-isomètrica.
2. Tota aplicació a distància finita d'una quasi-isometria és una quasi-isometria.
3. Siguin $f, f': X \rightarrow Y$ aplicacions a distància finita.
 - 1) Si $g: Z \rightarrow X$ és una aplicació, llavors $f \circ g$ i $f' \circ g$ estan a distància finita.
 - 2) Si $g: Y \rightarrow Z$ és una immersió quasi-isomètrica, llavors $g \circ f$ i $g \circ f'$ també estan a distància finita.
4. La composició d'immersions quasi-isomètriques dona lloc a una immersió quasi-isomètrica. Més concretament, si $f: X \rightarrow Y$ és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica i si $g: Y \rightarrow Z$ és una immersió (c', b') -quasi-isomètrica, llavors $g \circ f$ és una immersió $(cc', c'b + b')$ -quasi-isomètrica.

5. La composició de quasi-isometries dona lloc a una quasi-isometria.

Demostració.

1. Siguin $f, f': X \rightarrow Y$ aplicacions a distància finita, i suposem que f és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica. Existeix $r \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq r \quad \text{per a tot } x \in X.$$

Aleshores, per a tot $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned} d_Y(f'(x_1), f'(x_2)) &\leq d_Y(f'(x_1), f(x_1)) + d_Y(f(x_1), f(x_2)) + d_Y(f(x_2), f'(x_2)) \\ &\leq c d_X(x_1, x_2) + b + 2r. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} d_Y(f'(x_1), f'(x_2)) &\geq d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_Y(f(x_1), f'(x_1)) - d_Y(f(x_2), f'(x_2)) \\ &\geq \frac{1}{c} d_X(x_1, x_2) - b - 2r. \end{aligned}$$

Per tant, f' és una immersió $(c, b + 2r)$ -quasi-isomètrica.

2. Sigui $f: X \rightarrow Y$ una quasi-isometria i sigui $f': X \rightarrow Y$ una aplicació a distància finita de f . Pel punt anterior, f' és una immersió quasi-isomètrica. A més, com que f és una quasi-isometria, per la caracterització de les quasi-isometries de la Proposició 1.1.11, la imatge de f és quasi-densa en Y .

Així, existeixen $R, r \geq 0$ tals que

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad d_Y(y, f(x)) \leq R$$

i

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq r \quad \text{per a tot } x \in X.$$

Per tant,

$$d_Y(y, f'(x)) \leq d_Y(y, f(x)) + d_Y(f(x), f'(x)) \leq R + r.$$

Així, la imatge de f' és quasi-densa. Com que f' és una immersió quasi-isomètrica amb imatge quasi-densa, de nou per la Proposició 1.1.11, f' és una quasi-isometria.

3. Siguin $f, f': X \rightarrow Y$ aplicacions a distància finita, i sigui $r \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq r \quad \text{per a tot } x \in X.$$

3.1) Si $g: Z \rightarrow X$ és una aplicació, aleshores, per a tot $z \in Z$,

$$d_Y((f \circ g)(z), (f' \circ g)(z)) = d_Y(f(g(z)), f'(g(z))) \leq r.$$

Per tant, $f \circ g$ i $f' \circ g$ estan a distància finita.

3.2) Suposem ara que $g: Y \rightarrow Z$ és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica. Aleshores, per a tot $x \in X$,

$$\begin{aligned} d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f')(x)) &= d_Z(g(f(x)), g(f'(x))) \\ &\leq c d_Y(f(x), f'(x)) + b \\ &\leq cr + b. \end{aligned}$$

Per tant, $g \circ f$ i $g \circ f'$ estan a distància finita.

4. Siguin $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ immersions quasi-isomètriques. Suposem que f és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica i que g és una immersió (c', b') -quasi-isomètrica. Aleshores, per a tot $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned} d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) &\leq c' d_Y(f(x), f(x')) + b' \\ &\leq c' (c d_X(x, x') + b) + b' \\ &= cc' d_X(x, x') + c'b + b'. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) &\geq \frac{1}{c'} d_Y(f(x), f(x')) - b' \\ &\geq \frac{1}{c'} \left(\frac{1}{c} d_X(x, x') - b \right) - b' \\ &= \frac{1}{cc'} d_X(x, x') - \frac{b}{c'} - b'. \end{aligned}$$

Per tant, si prenem $\tilde{c} := cc'$ i $\tilde{b} := \max\{c'b + b', \frac{b}{c'} + b'\} = c'b + b'$, $g \circ f$ és una immersió $(\tilde{c}, \tilde{b})$ -quasi-isomètrica.

5. Siguin $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ quasi-isometries. Pel punt anterior, $g \circ f$ és una immersió quasi-isomètrica. Només cal veure que té imatge quasi-densa.

Com que g és una quasi-isometria, la seva imatge és quasi-densa en Z : existeix $R_g \geq 0$ tal que per a tot $z \in Z$ existeix $y \in Y$ amb

$$d_Z(z, g(y)) \leq R_g.$$

Com que f és una quasi-isometria, la seva imatge és quasi-densa en Y : existeix $R_f \geq 0$ tal que per a tot $y \in Y$ existeix $x \in X$ amb

$$d_Y(y, f(x)) \leq R_f.$$

Si g és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica, obtenim

$$d_Z(g(y), g(f(x))) \leq cR_f + b.$$

Per tant,

$$d_Z(z, g(f(x))) \leq d_Z(z, g(y)) + d_Z(g(y), g(f(x))) \leq R_g + cR_f + b.$$

Així, la imatge de $g \circ f$ és quasi-densa en Z . Com que $g \circ f$ és una immersió quasi-isomètrica amb imatge quasi-densa, és una quasi-isometria. $\square$

Definició 1.1.13. Sigui $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Una *geodèsica de longitud L en X* és una immersió isomètrica $\gamma: [0, L] \rightarrow X$, on $[0, L]$ està dotat de la mètrica induïda de $\mathbb{R}$. Diem que $\gamma(0)$ és el *punt inicial* de γ i que $\gamma(L)$ és el *punt final* de γ .

Diem que X és *geodèsic* si, per a tot $x, x' \in X$, existeix una geodèsica en X amb punt inicial x i punt final x' .

A vegades, sobretot més endavant, quan no ens interressi la parametrització de la geodèsica, escriurem $[x, y]$ per denotar la imatge d'una geodèsica qualsevol que uneix x i y . Si hi ha més d'una geodèsica entre x i y , entendrem que n'hem fixat una.

Definició 1.1.14. Sigui $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i sigui $c \in \mathbb{R}_{> 0}$. Diem que $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ és una *geodèsica c -local* si per a tot $t, t' \in [0, L]$ amb $|t - t'| \leq c$ es té que $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$.

Definició 1.1.15. Siguin $c \in \mathbb{R}_{> 0}$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Una (c, b) -*quasi-geodèsica en X* és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica $\gamma: [0, t] \rightarrow X$, on $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i $[0, t]$ està dotat de la mètrica induïda de $\mathbb{R}$. Diem que $\gamma(0)$ és el *punt inicial* de γ i que $\gamma(t)$ és el *punt final* de γ .

Diem que X és (c, b) -*quasi-geodèsic* si, per a tot $x, x' \in X$, existeix una (c, b) -quasi-geodèsica en X amb punt inicial x i punt final x' .

1.2 Hiperbolicitat i quasi-hiperbolicitat

Per a una geodèsica $\gamma: [0, L] \rightarrow X$, escriurem $\text{im}(\gamma) := \gamma([0, L])$. A més, si $A \subseteq X$ i $\delta \geq 0$, denotarem per $B_\delta(A) := \{x \in X : \exists a \in A \text{ tal que } d_X(x, a) \leq \delta\}$ el δ -entorn de A .

Definició 1.2.1. Un *triangle geodèsic* en X és una tripleta de geodèsiques $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, amb $\gamma_i: [0, L_i] \rightarrow X$ per a $i \in \{0, 1, 2\}$, tals que

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

Diem que un triangle geodèsic $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ és δ -*prim* si (Figura 1.1)

$$\begin{aligned} \text{im}(\gamma_0) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)), \\ \text{im}(\gamma_1) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_2)), \\ \text{im}(\gamma_2) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1)). \end{aligned}$$

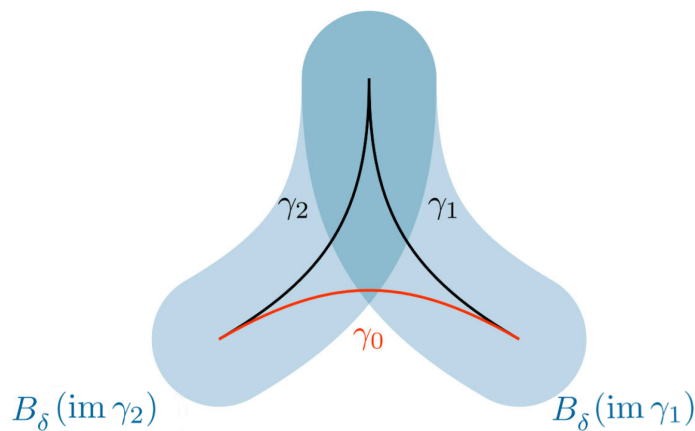


Figura 1.1: Triangle geodèsic δ -prim

Definició 1.2.2. Sigui $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Diem que X és δ -*hiperbòlic* si és geodèsic i si tots els triangles geodèsics en X són δ -prim. Diem que X és *hiperbòlic* si existeix $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que X és δ -hiperbòlic.

Observació 1.2.3. Si X és δ -hiperbòlic, amb $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, aleshores també és δ' -hiperbòlic per a tot $\delta' \geq \delta$. $\square$

Observació 1.2.4. Sigui $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. En un espai δ -hiperbòlic, tot quadrilàter geodèsic $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ és 2δ -prim; és a dir:

$$\begin{aligned} \text{im}(\gamma_0) &\subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2) \cup \text{im}(\gamma_3)), \\ \text{im}(\gamma_1) &\subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_2) \cup \text{im}(\gamma_3)), \\ \text{im}(\gamma_2) &\subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_3)), \\ \text{im}(\gamma_3) &\subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)). \end{aligned}$$

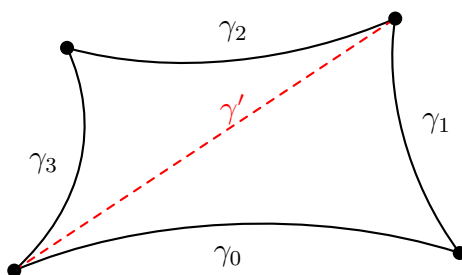


Figura 1.2: Quadrilàter geodèsic

Demostració. Comencem traçant una diagonal geodèsica que uneixi el vèrtex comú de γ_0 i γ_3 amb el vèrtex comú de γ_1 i γ_2 , la qual anomenem γ' (vegeu la Figura 1.2). Aquesta diagonal divideix el quadrilàter en dos triangles geodèsics:

$$T_1 = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma') \quad \text{i} \quad T_2 = (\gamma', \gamma_2, \gamma_3).$$

Analitzem primer el costat γ_0 . Sigui $x \in \text{im}(\gamma_0)$. Com que X és δ -hiperbòlic, el triangle T_1 és δ -prim. Per tant, existeix $y \in \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma')$ tal que $d(x, y) \leq \delta$. Si $y \in \text{im}(\gamma_1)$, aleshores ja tenim

$$d(x, \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2) \cup \text{im}(\gamma_3)) \leq \delta \leq 2\delta.$$

Si, en canvi, $y \in \text{im}(\gamma')$, apliquem la δ -primesa del triangle T_2 . Aleshores existeix

$$z \in \text{im}(\gamma_2) \cup \text{im}(\gamma_3)$$

tal que $d(y, z) \leq \delta$. Per la desigualtat triangular,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq 2\delta.$$

En qualsevol cas,

$$\text{im}(\gamma_0) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2) \cup \text{im}(\gamma_3)).$$

El mateix argument aplicat al costat γ_1 , també dins del triangle T_1 , dona

$$\text{im}(\gamma_1) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_2) \cup \text{im}(\gamma_3)).$$

Finalment, aplicant el mateix raonament al triangle T_2 i usant després la δ -primesa de T_1 per controlar els punts de la diagonal γ' , obtenim

$$\text{im}(\gamma_2) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_3)),$$

i

$$\text{im}(\gamma_3) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)).$$

Per tant, tot costat del quadrilàter està contingut en el 2δ -entorn de la unió dels altres tres costats. Així, el quadrilàter geodèsic és 2δ -prim. $\square$

Observació 1.2.5. El resultat de l'Observació 1.2.4 es pot generalitzar. Més concretament, en un espai δ -hiperbòlic, tot polígon geodèsic de n costats, amb $n \geq 3$, és $(n-2)\delta$ -prim.

La idea de la demostració és la mateixa que en el cas dels quadrilàters: es tracen diagonals geodèsiques que divideixen el polígon en triangles geodèsics i s'aplica successivament la δ -primesa d'aquests triangles. Cada vegada que cal passar d'un triangle al següent, la cota augmenta com a molt en δ , i això dona la cota total $(n-2)\delta$. $\square$

Observació 1.2.6. Si X és un espai geodèsic i té diàmetre finit D ; és a dir, $D = \sup_{x, x' \in X} d(x, x')$, llavors X és D -hiperbòlic.

Demostració. Com que el diàmetre de tot l'espai és D , la distància entre qualsevol parell de punts de X és com a màxim D . Per tant, qualsevol punt d'un costat està a distància menor o igual a D de qualsevol altre punt de l'espai (incloent els altres dos costats). Així, l'espai és D -hiperbòlic. $\square$

Definició 1.2.7. Siguin $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b, \delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Un *triangle* (c, b) -quasi-geodèsic en X és una tripleta de (c, b) -quasi-geodèsiques $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, amb $\gamma_i: [0, L_i] \rightarrow X$ per a $i \in \{0, 1, 2\}$, tals que

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0).$$

Diem que un triangle (c, b) -quasi-geodèsic $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ és δ -prim si (Figura 1.3)

$$\begin{aligned} \text{im}(\gamma_0) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)), \\ \text{im}(\gamma_1) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_2)), \\ \text{im}(\gamma_2) &\subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1)). \end{aligned}$$

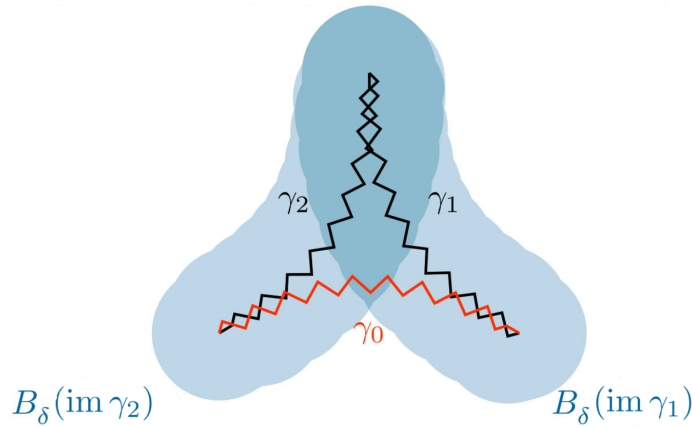


Figura 1.3: Triangle quasi-geodèsic δ -prim

Definició 1.2.8. Siguin $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b, \delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Diem que X és (c, b, δ) -quasi-hiperbòlic si és (c, b) -quasi-geodèsic i si tots els triangles (c, b) -quasi-geodèsics en X són δ -prims.

Siguin $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Diem que X és (c, b) -quasi-hiperbòlic si, per a tot $c' \in \mathbb{R}_{>0}$ i tot $b' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tals que $c' \geq c$ i $b' \geq b$, existeix $\delta' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que X és (c', b', δ') -quasi-hiperbòlic. Diem que X és quasi-hiperbòlic si existeixen $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tals que X és (c, b) -quasi-hiperbòlic.

Proposició 1.2.9. Siguin X i Y espais mètrics.

1. Si Y és quasi-geodèsic i $X \sim_{QI} Y$, llavors X també és quasi-geodèsic.
2. Si Y és quasi-hiperbòlic, X és quasi-geodèsic i existeix una immersió quasi-isomètrica $f: X \rightarrow Y$, llavors X també és quasi-hiperbòlic.
3. Si $X \sim_{QI} Y$, llavors X és quasi-hiperbòlic $\iff Y$ és quasi-hiperbòlic.

Demostració. Escriurem d_X i d_Y per a les mètriques de X i Y , respectivament.

1. Suposem que Y és quasi-geodèsic i que $X \sim_{QI} Y$. Sigui $f: X \rightarrow Y$ una quasi-isometria. Per la caracterització de les quasi-isometries, f és una immersió quasi-isomètrica amb imatge quasi-densa.

Per l'Observació 1.1.8 i l'Observació 1.1.10, triant una constant $c \geq 1$ prou gran, podem suposar que Y és (c, c) -quasi-geodèsic, que f és una immersió (c, c) -quasi-isomètrica i que f té imatge c -quasi-densa en Y .

Siguin $x, x' \in X$. Com que Y és (c, c) -quasi-geodèsic, existeix una (c, c) -quasi-geodèsica

$$\gamma: [0, L] \rightarrow Y$$

amb punt inicial $f(x)$ i punt final $f(x')$. Podem suposar que $L > 0$; en el cas $f(x) = f(x')$, podem prendre la quasi-geodèsica constant en l'interval $[0, 1]$, que és (c, c) -quasi-geodèsica perquè per l'Observació 1.1.7 podem suposar que $c \geq 1$.

Per la quasi-densitat de la imatge de f , per a cada $t \in [0, L]$ podem definir

$$S_t := \{z \in X : d_Y(f(z), \gamma(t)) \leq c\} \neq \emptyset.$$

Com que $\gamma(0) = f(x)$ i $\gamma(L) = f(x')$, tenim $x \in S_0$ i $x' \in S_L$.

Definim ara

$$T_t := \begin{cases} \{x\} & \text{si } t = 0, \\ \{x'\} & \text{si } t = L, \\ S_t & \text{si } t \in (0, L). \end{cases}$$

Tots els conjunts T_t són no buits. Per l'axioma de l'elecció, podem triar un punt $\hat{\gamma}(t) \in T_t$ per a cada $t \in [0, L]$, i obtenim així una aplicació

$$\hat{\gamma}: [0, L] \rightarrow X.$$

Per construcció,

$$\hat{\gamma}(0) = x, \quad \hat{\gamma}(L) = x',$$

i, per a tot $t \in [0, L]$,

$$d_Y(f(\hat{\gamma}(t)), \gamma(t)) \leq c.$$

Vegem que $\hat{\gamma}$ és una quasi-geodèsica. Siguin $s, t \in [0, L]$. Per la desigualtat triangular i pel fet que γ és (c, c) -quasi-geodèsica,

$$d_Y(f(\hat{\gamma}(s)), f(\hat{\gamma}(t))) \leq d_Y(\gamma(s), \gamma(t)) + 2c \leq c|s - t| + 3c.$$

Usant ara la cota inferior de la immersió quasi-isomètrica f , obtenim

$$d_X(\hat{\gamma}(s), \hat{\gamma}(t)) \leq c^2|s - t| + 4c^2.$$

Amb un argument anàleg,

$$d_Y(f(\hat{\gamma}(s)), f(\hat{\gamma}(t))) \geq d_Y(\gamma(s), \gamma(t)) - 2c \geq \frac{1}{c}|s - t| - 3c.$$

Usant ara la cota superior de la immersió quasi-isomètrica f , deduïm que

$$d_X(\hat{\gamma}(s), \hat{\gamma}(t)) \geq \frac{1}{c^2}|s - t| - 4.$$

Per tant, $\hat{\gamma}$ és una quasi-geodèsica, per exemple una $(c^2, 4c^2)$ -quasi-geodèsica. Com que $x, x' \in X$ eren arbitraris, X és quasi-geodèsic.

2. Suposem ara que Y és quasi-hiperbòlic, que X és quasi-geodèsic i que existeix una immersió quasi-isomètrica $f: X \rightarrow Y$.

Triant constants comunes, podem suposar que existeixen $c \geq 1$ i $b \geq 0$ tals que Y és (c, b) -quasi-hiperbòlic, X és (c, b) -quasi-geodèsic i f és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica.

Volem provar que X és (c, b) -quasi-hiperbòlic. Siguin, doncs, $c' \geq c$ i $b' \geq b$. Com que X és (c, b) -quasi-geodèsic, per l'Observació 1.1.8 també és (c', b') -quasi-geodèsic. Per tant, només cal veure que tots els triangles (c', b') -quasi-geodèsics en X són δ' -prims per a alguna constant $\delta' \geq 0$.

Sigui $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ un triangle (c', b') -quasi-geodèsic en X . Aleshores

$$(f \circ \gamma_0, f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$$

és un triangle quasi-geodèsic en Y . Més concretament, cada $f \circ \gamma_i$ és una (c'', b'') -quasi-geodèsica on, segons l'Observació 1.1.12.(4), podem prendre

$$c'' = cc', \quad b'' = cb' + b.$$

Com que $c'' \geq c$ i $b'' \geq b$, i com que Y és (c, b) -quasi-hiperbòlic, existeix $\delta \geq 0$ tal que tot triangle (c'', b'') -quasi-geodèsic en Y és δ -prim. En particular,

$$\text{im}(f \circ \gamma_0) \subseteq B_\delta(\text{im}(f \circ \gamma_1) \cup \text{im}(f \circ \gamma_2)),$$

i anàlogament per als altres dos costats.

Vegem que això implica que el triangle original en X és prim, amb una constant controlada. Prenem $x \in \text{im}(\gamma_0)$. Per la inclusió anterior, existeix $u \in \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)$ tal que

$$d_Y(f(x), f(u)) \leq \delta.$$

Com que f és una immersió (c, b) -quasi-isomètrica,

$$\frac{1}{c}d_X(x, u) - b \leq d_Y(f(x), f(u)) \leq \delta.$$

Per tant,

$$d_X(x, u) \leq c\delta + cb.$$

Això demostra que

$$\text{im}(\gamma_0) \subseteq B_{c\delta+cb}(\text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)).$$

El mateix argument aplicat als altres dos costats dona les altres dues inclusions. Així, el triangle $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ és $(c\delta + cb)$ -prim.

Com que el triangle (c', b') -quasi-geodèsic era arbitrari, hem vist que, per a tot $c' \geq c$ i tot $b' \geq b$, existeix la constant $\delta' = c\delta + cb$ tal que tots els triangles (c', b') -quasi-geodèsics en X són δ' -prims. Per tant, X és (c, b) -quasi-hiperbòlic, i en particular és quasi-hiperbòlic.

3. Finalment, suposem que $X \sim_{QI} Y$. Si Y és quasi-hiperbòlic, aleshores Y és quasi-geodèsic. Per l'apartat (1), X també és quasi-geodèsic. A més, existeix una quasi-isometria $f: X \rightarrow Y$, que en particular és una immersió quasi-isomètrica. Aplicant l'apartat (2), obtenim que X és quasi-hiperbòlic.

L'altra implicació s'obté intercanviant els papers de X i Y , ja que una quasi-isometria admet una quasi-inversa. Per tant,

$$X \text{ és quasi-hiperbòlic} \iff Y \text{ és quasi-hiperbòlic.} \quad \square$$

La proposició anterior mostra que la quasi-hiperbolicitat és invariant per quasi-isometries. Tanmateix, el nostre objectiu és obtenir la propietat d'invariància per a la hiperbolicitat en el sentit de Gromov. El punt delicat és que una quasi-isometria no envia, en general, geodèsiques a geodèsiques, sinó a quasi-geodèsiques. Per aquest motiu hem introduït la noció auxiliar de quasi-hiperbolicitat.

1.3 Equivalència entre hiperbolicitat i quasi-hiperbolicitat en espais geodèsics

El resultat central d'aquesta secció és que, en espais geodèsics, la noció auxiliar de la quasi-hiperbolicitat coincideix amb la d'hiperbolicitat. Per demostrar-ho, necessitem el teorema d'estabilitat de les quasi-geodèsiques: en un espai hiperbòlic, una quasi-geodèsica es manté a distància uniformement acotada de qualsevol geodèsica amb els mateixos extrems.

Teorema 1.3.1. *Sigui X un espai mètric geodèsic. Llavors:*

$$X \text{ és hiperbòlic} \iff X \text{ és quasi-hiperbòlic}.$$

Teorema 1.3.2 (Estabilitat de les quasi-geodèsiques). *Siguin $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b, \delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aleshores existeix una constant $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ amb la propietat següent: si X és un espai mètric δ -hiperbòlic, si $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ és una (c, b) -quasi-geodèsica i si $\gamma': [0, L'] \rightarrow X$ és una geodèsica amb*

$$\gamma'(0) = \gamma(0), \quad \gamma'(L') = \gamma(L),$$

llavors

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_\Delta(\text{im}(\gamma)) \quad i \quad \text{im}(\gamma) \subseteq B_\Delta(\text{im}(\gamma')).$$

Demostrarem primer el Teorema 1.3.1 assumint el Teorema 1.3.2. La demostració d'aquest resultat d'estabilitat, més tècnica, es farà a continuació.

Demostració. (Teorema 1.3.1). Per demostrar la implicació cap a l'esquerra, suposem que X és quasi-hiperbòlic. Aleshores existeixen $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tals que X és (c, b) -quasi-hiperbòlic. Prenem $C := \max\{c, 1\}$.

Com que $C \geq c$ i $b \geq b$, per la definició de (c, b) -quasi-hiperbolicitat existeix $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que X és (C, b, δ) -quasi-hiperbòlic.

Sigui $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ un triangle geodèsic en X . Com que $C \geq 1$, tota geodèsica és, en particular, una (C, b) -quasi-geodèsica. Per tant, $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ és un triangle (C, b) -quasi-geodèsic. Com que X és (C, b, δ) -quasi-hiperbòlic, aquest triangle és δ -prim. Així, tots els triangles geodèsics en X són δ -prim, i per tant X és hiperbòlic.

Per demostrar la implicació cap a la dreta, suposem que X és hiperbòlic. Aleshores existeix $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que X és δ -hiperbòlic. Volem demostrar que X és quasi-hiperbòlic. De fet, veurem que X és $(1, 0)$ -quasi-hiperbòlic.

Siguin $c \geq 1$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Com que X és geodèsic, també és (c, b) -quasi-geodèsic. Cal veure que existeix una constant $\delta' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que tots els triangles (c, b) -quasi-geodèsics en X són δ' -prim.

Sigui $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ un triangle (c, b) -quasi-geodèsic en X . Per a cada $j \in \{0, 1, 2\}$, com que X és geodèsic, podem triar una geodèsica γ'_j amb els mateixos extrems que γ_j . És a dir, si $\gamma_j: [0, L_j] \rightarrow X$, prenem una geodèsica $\gamma'_j: [0, L'_j] \rightarrow X$ tal que

$$\gamma'_j(0) = \gamma_j(0), \quad \gamma'_j(L'_j) = \gamma_j(L_j).$$

Aleshores $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$ és un triangle geodèsic en X .

Pel Teorema d'estabilitat de les quasi-geodèsiques (Teorema 1.3.2) aplicat amb les constants δ , c i b , existeix una constant $\Delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, per a cada $j \in \{0, 1, 2\}$,

$$\text{im}(\gamma'_j) \subseteq B_\Delta(\text{im}(\gamma_j)) \quad i \quad \text{im}(\gamma_j) \subseteq B_\Delta(\text{im}(\gamma'_j)).$$

Com que X és δ -hiperbòlic, el triangle geodèsic $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$ és δ -prim. Per tant,

$$\text{im}(\gamma'_0) \subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma'_1) \cup \text{im}(\gamma'_2)),$$

i anàlogament per als altres dos costats.

Vegem que el triangle original $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ és $(2\Delta + \delta)$ -prim. Prenem $x \in \text{im}(\gamma_0)$. Pel Teorema 1.3.2, existeix $x' \in \text{im}(\gamma'_0)$ tal que

$$d_X(x, x') \leq \Delta.$$

Com que el triangle geodèsic $(\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2)$ és δ -prim, existeix

$$y' \in \text{im}(\gamma'_1) \cup \text{im}(\gamma'_2)$$

tal que

$$d_X(x', y') \leq \delta.$$

En particular, $y' \in \text{im}(\gamma_k)$ per a $k \in \{1, 2\}$. Aplicant de nou el Teorema 1.3.2, existeix

$$y \in \text{im}(\gamma_k) \subseteq \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)$$

tal que

$$d_X(y', y) \leq \Delta.$$

Per la desigualtat triangular,

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, x') + d_X(x', y') + d_X(y', y) \leq \Delta + \delta + \Delta = 2\Delta + \delta.$$

Com que $x \in \text{im}(\gamma_0)$ era arbitrari, hem provat que

$$\text{im}(\gamma_0) \subseteq B_{2\Delta+\delta}(\text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)).$$

El mateix argument aplicat als altres dos costats dona

$$\text{im}(\gamma_1) \subseteq B_{2\Delta+\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_2)),$$

i

$$\text{im}(\gamma_2) \subseteq B_{2\Delta+\delta}(\text{im}(\gamma_0) \cup \text{im}(\gamma_1)).$$

Per tant, qualsevol triangle (c, b) -quasi-geodèsic en X és $(2\Delta + \delta)$ -prim.

Com que $c \geq 1$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eren arbitraris, hem demostrat que, per a tot $c \geq 1$ i tot $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, existeix una constant $\delta' = 2\Delta + \delta$ tal que X és (c, b, δ') -quasi-hiperbòlic. Així, X és $(1, 0)$ -quasi-hiperbòlic. En particular, X és quasi-hiperbòlic. $\square$

Queda pendent demostrar el Teorema 1.3.2. Per fer-ho necessitem dos lemes auxiliars. El primer controla la distància d'una geodèsica a una corba en un espai hiperbòlic. El segon permet substituir una quasi-geodèsica arbitrària per una quasi-geodèsica contínua amb constants controlades.

Lema 1.3.3 (Lema de l'arbre de Nadal). *Si $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i sigui (X, d) un espai δ -hiperbòlic. Si $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ és una corba contínua i si $\gamma': [0, L'] \rightarrow X$ és una geodèsica amb*

$$\gamma'(0) = \gamma(0), \quad \gamma'(L') = \gamma(L),$$

llavors, per a tot $t' \in [0, L']$,

$$d(\gamma'(t'), \text{im}(\gamma)) \leq \delta \left| \log_2(L_X(\gamma)) \right| + 1,$$

on $L_X(\gamma)$ denota la longitud de γ .

Demostració. Si $L_X(\gamma) = \infty$, no hi ha res a provar. Suposem, doncs, que $L_X(\gamma) < \infty$. Si $L_X(\gamma) \leq 1$, aleshores la longitud de la geodèsica γ' és

$$L' = d(\gamma'(0), \gamma'(L')) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \leq L_X(\gamma) \leq 1.$$

Per tant, per a qualsevol $t \in [0, L']$,

$$d(\gamma'(t), \text{im}(\gamma)) \leq d(\gamma'(t), \gamma'(0)) \leq L' \leq 1 \leq \delta \left| \log_2(L_X(\gamma)) \right| + 1.$$

Així, podem suposar que $L_X(\gamma) > 1$.

Podem suposar sense pèrdua de generalitat que γ està parametritzada per longitud d'arc. Escriurem $\ell := L_X(\gamma)$ i mantindrem la notació $\gamma: [0, \ell] \rightarrow X$. Així, per a tot subinterval $[a, b] \subseteq [0, \ell]$, la longitud de $\gamma|_{[a, b]}$ és $b - a$.

Fixem $t' \in [0, L']$. Triem $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\ell}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{\ell}{2^N}.$$

En particular,

$$N \leq \log_2(\ell).$$

Construïrem inductivament punts

$$x_0, x_1, \dots, x_N \in X$$

i geodèsiques $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N$ amb les propietats següents:

$x_0 = \gamma'(t')$, $x_k \in \text{im}(\sigma_k)$, els extrems de σ_k pertanyen a $\text{im}(\gamma)$, i aquests extrems delimiten en γ un subarc de longitud com a molt $\frac{\ell}{2^k}$. A més,

$$d(x_{k-1}, x_k) \leq \delta \quad \text{per a } k = 1, \dots, N.$$

Comencem amb $\sigma_0 = \gamma'$. Els seus extrems són $\gamma(0)$ i $\gamma(\ell)$, que delimiten tota la corba γ , de longitud ℓ . Posem $x_0 = \gamma'(t')$.

Suposem ara construïts x_k i σ_k . Siguin $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ els extrems de σ_k , amb $a \leq b$, i suposem que

$$b - a \leq \frac{\ell}{2^k}.$$

Prenem el punt mig del subarc, és a dir,

$$m := \frac{a + b}{2}.$$

Com que X és geodèsic, podem triar una geodèsica α_1 que uneixi $\gamma(a)$ amb $\gamma(m)$ i una geodèsica α_2 que uneixi $\gamma(m)$ amb $\gamma(b)$. Aleshores σ_k , α_1 i α_2 formen un triangle geodèsic. Com que X és δ -hiperbòlic, aquest triangle és δ -prim. Com que $x_k \in \text{im}(\sigma_k)$, existeix un punt

$$x_{k+1} \in \text{im}(\alpha_1) \cup \text{im}(\alpha_2)$$

tal que

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \delta.$$

Definim σ_{k+1} com el costat α_1 o α_2 que conté x_{k+1} . Els extrems de σ_{k+1} pertanyen a $\text{im}(\gamma)$ i delimiten un subarc de γ de longitud com a molt

$$\frac{1}{2}(b - a) \leq \frac{\ell}{2^{k+1}}.$$

Això completa la construcció inductiva.

Després de N passos, tenim

$$d(x_0, x_N) \leq \sum_{k=1}^N d(x_{k-1}, x_k) \leq N\delta.$$

A més, x_N pertany a una geodèsica σ_N els extrems de la qual són punts de $\text{im}(\gamma)$ i delimiten un subarc de γ de longitud com a molt $\frac{\ell}{2^N}$. Per tant, la longitud de σ_N és com a molt $\frac{\ell}{2^N}$. Així, algun dels seus extrems, que denotem per $x \in \text{im}(\gamma)$, satisfà

$$d(x_N, x) \leq \frac{1}{2} \frac{\ell}{2^N} = \frac{\ell}{2^{N+1}} < 1.$$

Per la desigualtat triangular,

$$d(\gamma'(t'), x) = d(x_0, x) \leq d(x_0, x_N) + d(x_N, x) \leq N\delta + 1.$$

Com que $N \leq \log_2(\ell)$, obtenim

$$d(\gamma'(t'), \text{im}(\gamma)) \leq d(\gamma'(t'), x) \leq \delta \log_2(\ell) + 1.$$

Com que en aquest cas $\ell > 1$, tenim $\log_2(\ell) = |\log_2(\ell)|$. Per tant,

$$d(\gamma'(t'), \text{im}(\gamma)) \leq \delta |\log_2(L_X(\gamma))| + 1.$$

Com que $t' \in [0, L']$ era arbitrari, el resultat queda demostrat (vegeu la Figura 1.4). $\square$

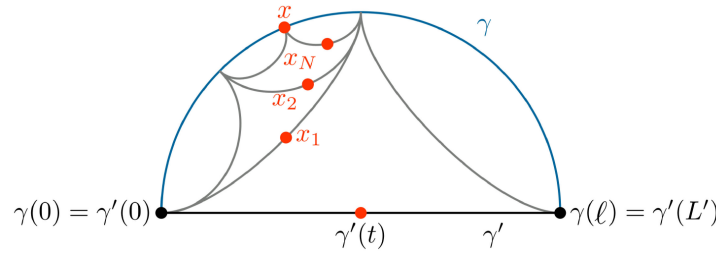


Figura 1.4: Distància entre geodèsiques i corbes en espais hiperbòlics

Lema 1.3.4 (Regularització de quasi-geodèsiques). *Siguin $c \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aleshores existeixen constants $c' \in \mathbb{R}_{>0}$ i $b' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ amb la propietat següent: si (X, d) és un espai mètric geodèsic i $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ és una (c, b) -quasi-geodèsica, aleshores existeix una (c', b') -quasi-geodèsica contínua*

$$\gamma': [0, L] \rightarrow X$$

amb $\gamma'(0) = \gamma(0)$ i $\gamma'(L) = \gamma(L)$, tal que:

a. Per a tot $s, t \in [0, L]$ amb $s \leq t$,

$$L_X(\gamma'|_{[s,t]}) \leq c' d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + b'.$$

b. A més,

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\gamma)) \quad i \quad \text{im}(\gamma) \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\gamma')).$$

Demostració. Si $L = 0$, el resultat és immediat. Suposem, doncs, que $L > 0$.

Definim

$$I := ([0, L] \cap \mathbb{Z}) \cup \{L\}.$$

Escrivim els elements de I en ordre creixent:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = L.$$

Observem que

$$t_{i+1} - t_i = 1 \quad \text{per a tot } i \in \{0, \dots, m-2\} \quad \text{i} \quad t_{i+1} - t_i \leq 1 \quad \text{per a } i = m-1.$$

Construïm ara una nova corba $\gamma': [0, L] \rightarrow X$. Per a cada $i \in \{0, \dots, m-1\}$, com que X és geodèsic, triem un segment geodèsic que uneixi $\gamma(t_i)$ amb $\gamma(t_{i+1})$, i definim γ' sobre $[t_i, t_{i+1}]$ com una parametrització d'aquest segment. En particular,

$$\gamma'(t_i) = \gamma(t_i) \quad \text{per a tot } i \in \{0, \dots, m\}.$$

Per construcció, γ' és contínua i satisfà

$$\gamma'(0) = \gamma(0), \quad \gamma'(L) = \gamma(L).$$

Vegem primer que γ' es manté a distància controlada de γ . Si $x \in \text{im}(\gamma')$, aleshores x pertany a algun segment geodèsic que uneix $\gamma(t_i)$ amb $\gamma(t_{i+1})$. Per tant,

$$d(x, \gamma(t_i)) \leq d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Com que γ és una (c, b) -quasi-geodèsica i $t_{i+1} - t_i \leq 1$, tenim

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq c|t_{i+1} - t_i| + b \leq c + b.$$

Així,

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\gamma)).$$

Recíprocament, sigui $x \in \text{im}(\gamma)$. Aleshores $x = \gamma(t)$ per a algun $t \in [0, L]$. Podem triar un punt $t_i \in I$ tal que $|t - t_i| \leq 1$. Com que $\gamma'(t_i) = \gamma(t_i)$, obtenim

$$d(x, \gamma'(t_i)) = d(\gamma(t), \gamma(t_i)) \leq c|t - t_i| + b \leq c + b.$$

Per tant,

$$\text{im}(\gamma) \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\gamma')).$$

Vegem ara la cota superior de la longitud. Siguin $s, t \in [0, L]$ amb $s \leq t$. Hem vist que per a tot $i \in \{0, \dots, m-1\}$ el subinterval $[t_i, t_{i+1}]$ té longitud $|t_{i+1} - t_i| \leq 1$ i que $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq c + b$. A més, l'interval $[s, t] \subseteq [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{m-1}, t_m]$ talla com a molt $t - s + 2$ subintervalls $[t_i, t_{i+1}]$. Per tant,

$$L_X(\gamma'|_{[s,t]}) \leq (t - s + 2)(c + b).$$

D'altra banda, per a qualsevol $u \in [0, L]$ existeix $t_i \in I$ tal que $|u - t_i| \leq 1$, de manera que tenim

$$d(\gamma(u), \gamma'(u)) \leq d(\gamma(u), \gamma(t_i)) + d(\gamma'(t_i), \gamma'(u)) \leq 2(c + b).$$

Aplicant això als punts s i t , i usant que γ és una (c, b) -quasi-geodèsica per a la cota inferior, obtenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}|t - s| - b &\leq d(\gamma(s), \gamma(t)) \\ &\leq d(\gamma(s), \gamma'(s)) + d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + d(\gamma'(t), \gamma(t)) \\ &\leq d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + 4(c + b). \end{aligned}$$

Per tant,

$$|t - s| \leq c d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + 4c(c + b) + cb.$$

Substituint aquesta cota en l'estimació de la longitud, obtenim

$$\begin{aligned} L_X(\gamma'|_{[s,t]}) &\leq (t-s+2)(c+b) \\ &\leq c(c+b)d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + (4c(c+b) + cb + 2)(c+b). \end{aligned}$$

Així doncs, triant constants $c' := c(c+b)$ i $b' := (4c(c+b) + cb + 2)(c+b)$, podem assegurar simultàniament que γ' és una (c', b') -quasi-geodèsica i que

$$L_X(\gamma'|_{[s,t]}) \leq c' d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + b'$$

per a tot $s, t \in [0, L]$ amb $s \leq t$. Això demostra el Lema. $\square$

Demostració. (Teorema 1.3.2). Escriurem d_X per a la mètrica de X .

Siguin $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ una (c, b) -quasi-geodèsica i $\gamma': [0, L'] \rightarrow X$ una geodèsica amb

$$\gamma'(0) = \gamma(0), \quad \gamma'(L') = \gamma(L).$$

Pel Lema 1.3.4, existeixen constants $\tilde{c} \in \mathbb{R}_{>0}$ i $\tilde{b} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, que només depenen de c i b , i una $(\tilde{c}, \tilde{b})$ -quasi-geodèsica contínua

$$\tilde{\gamma}: [0, \tilde{L}] \rightarrow X$$

amb els mateixos extrems que γ , és a dir,

$$\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0), \quad \tilde{\gamma}(\tilde{L}) = \gamma(L),$$

tals que

$$\text{im}(\tilde{\gamma}) \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\gamma)) \quad \text{i} \quad \text{im}(\gamma) \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\tilde{\gamma})).$$

A més, $\tilde{\gamma}$ satisfà la propietat de longitud

$$L_X(\tilde{\gamma}|_{[r,s]}) \leq \tilde{c} d_X(\tilde{\gamma}(r), \tilde{\gamma}(s)) + \tilde{b}$$

per a tot $r, s \in [0, \tilde{L}]$ amb $r \leq s$.

Farem la prova per a la quasi-geodèsica contínua $\tilde{\gamma}$ i, al final, tornarem a la quasi-geodèsica original γ .

Definim $D := \sup_{t' \in [0, L']} d_X(\gamma'(t'), \text{im}(\tilde{\gamma}))$.

Com que γ' i $\tilde{\gamma}$ són contínues i els intervals de definició són compactes, aquest suprem s'assoleix. Prenem $t'_0 \in [0, L']$ tal que

$$D = d_X(\gamma'(t'_0), \text{im}(\tilde{\gamma})).$$

Si $D \leq 1$, ja tenim una cota. Supposem, doncs, que $D > 1$.

Definim

$$r' := \max\{0, t'_0 - 2D\}, \quad s' := \min\{L', t'_0 + 2D\}.$$

Per la definició de D , podem trobar $\tilde{r}, \tilde{s} \in [0, \tilde{L}]$ tals que

$$d_X(\gamma'(r'), \tilde{\gamma}(\tilde{r})) \leq D, \quad d_X(\gamma'(s'), \tilde{\gamma}(\tilde{s})) \leq D.$$

Considerem ara la corba contínua η que uneix $\gamma'(r')$ amb $\gamma'(s')$ seguint primer una geodèsica de $\gamma'(r')$ a $\tilde{\gamma}(\tilde{r})$, després el tram de $\tilde{\gamma}$ entre $\tilde{\gamma}(\tilde{r})$ i $\tilde{\gamma}(\tilde{s})$, i finalment una geodèsica de $\tilde{\gamma}(\tilde{s})$ a $\gamma'(s')$.

Per construcció, el punt $\gamma'(t'_0)$ està a distància almenys D de la imatge d'aquesta corba η , tant dels seus trams geodèsics que van de γ' a $\tilde{\gamma}$ com del tram de $\tilde{\gamma}$. Aplicant el Lema 1.3.3 a la corba η i al tram geodèsic $\gamma'|_{[r',s']}$, obtenim

$$D \leq d(\gamma'|_{[r',s']}(t'_0), \text{im}(\eta)) \leq \delta |\log_2(L_X(\eta))| + 1.$$

D'altra banda, per la construcció de η , per la propietat de longitud de $\tilde{\gamma}$ provinent del Lema 1.3.4 i pel fet que $d_X(\gamma'(r'), \gamma'(s')) \leq 4D$,

$$\begin{aligned} L_X(\eta) &\leq D + L_X(\tilde{\gamma}|_{[\tilde{r},\tilde{s}]}) + D \\ &\leq \tilde{c} d_X(\tilde{\gamma}(\tilde{r}), \tilde{\gamma}(\tilde{s})) + \tilde{b} + 2D \\ &\leq \tilde{c}(d_X(\tilde{\gamma}(\tilde{r}), \gamma'(r')) + d_X(\gamma'(r'), \gamma'(s')) + d_X(\gamma'(s'), \tilde{\gamma}(\tilde{s}))) + \tilde{b} + 2D \\ &\leq \tilde{c}(D + 4D + D) + \tilde{b} + 2D \\ &\leq (6\tilde{c} + 2)D + \tilde{b}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$D \leq \delta |\log_2((6\tilde{c} + 2)D + \tilde{b})| + 1.$$

Si $\delta = 0$, de la desigualtat anterior obtenim directament $D \leq 1$. Per tant, podem suposar que $\delta > 0$. Així doncs,

$$\frac{D-1}{\delta} \leq |\log_2((6\tilde{c} + 2)D + \tilde{b})|.$$

Si ens mirem $\frac{D-1}{\delta}$ i $|\log_2((6\tilde{c} + 2)D + \tilde{b})|$ com a funcions de la variable D , podem raonar així: com que el logaritme creix més lentament que qualsevol funció lineal, la desigualtat força que D estigui acotat superiorment per una constant que només depèn de δ , $\tilde{c}$ i $\tilde{b}$, en cap cas de les corbes. Així, existeix una constant

$$M_1 = M_1(\delta, \tilde{c}, \tilde{b})$$

tal que

$$D \leq M_1.$$

Per la definició de D , per a tot $t' \in [0, L']$ tenim

$$d_X(\gamma'(t'), \text{im}(\tilde{\gamma})) \leq D \leq M_1.$$

Per tant,

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_{M_1}(\text{im}(\tilde{\gamma})).$$

Vegem ara que la quasi-geodèsica $\tilde{\gamma}$ tampoc no s'allunya gaire de γ' . Considerem un interval maximal $(\tilde{r}, \tilde{s}) \subseteq [0, \tilde{L}]$ tal que

$$\tilde{\gamma}((\tilde{r}, \tilde{s})) \subseteq X \setminus B_{M_1}(\text{im}(\gamma')).$$

Si no existeix cap interval d'aquest tipus, aleshores ja tenim

$$\text{im}(\tilde{\gamma}) \subseteq B_{M_1}(\text{im}(\gamma')).$$

Suposem, doncs, que existeix un tal interval. Com que

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_{M_1}(\text{im}(\tilde{\gamma})),$$

i com que els punts de $\tilde{\gamma}((\tilde{r}, \tilde{s}))$ estan fora de $B_{M_1}(\text{im}(\gamma'))$, la connexió de l'interval $[0, L']$ implica que existeix un punt $t' \in [0, L']$ i existeixen $\tilde{r}_0 \in [0, \tilde{r}]$ i $\tilde{s}_0 \in [\tilde{s}, \tilde{L}]$ tals que

$$d_X(\gamma'(t'), \tilde{\gamma}(\tilde{r}_0)) \leq M_1, \quad d_X(\gamma'(t'), \tilde{\gamma}(\tilde{s}_0)) \leq M_1.$$

En particular,

$$d_X(\tilde{\gamma}(\tilde{r}_0), \tilde{\gamma}(\tilde{s}_0)) \leq 2M_1.$$

Per la propietat de longitud de $\tilde{\gamma}$ del Lema 1.3.4,

$$L_X(\tilde{\gamma}|_{[\tilde{r}, \tilde{s}]}) \leq L_X(\tilde{\gamma}|_{[\tilde{r}_0, \tilde{s}_0]}) \leq \tilde{c} d_X(\tilde{\gamma}(\tilde{r}_0), \tilde{\gamma}(\tilde{s}_0)) + \tilde{b} \leq 2\tilde{c}M_1 + \tilde{b}.$$

A més, per maximalitat de l'interval $(\tilde{r}, \tilde{s})$, els extrems $\tilde{\gamma}(\tilde{r})$ i $\tilde{\gamma}(\tilde{s})$ estan a distància com a molt M_1 de $\text{im}(\gamma')$. Així, per a qualsevol $\tilde{u} \in [\tilde{r}, \tilde{s}]$, el punt $\tilde{\gamma}(\tilde{u})$ està a distància com a molt

$$M_1 + \frac{1}{2}L_X(\tilde{\gamma}|_{[\tilde{r}, \tilde{s}]}) \leq M_1 + \tilde{c}M_1 + \frac{\tilde{b}}{2} = (\tilde{c} + 1)M_1 + \frac{\tilde{b}}{2}$$

de $\text{im}(\gamma')$.

Per tant, tots els trams de $\tilde{\gamma}$ que surten del M_1 -entorn de $\text{im}(\gamma')$ queden continguts en el

$$\left((\tilde{c} + 1)M_1 + \frac{\tilde{b}}{2} \right)\text{-entorn}$$

de $\text{im}(\gamma')$. En conseqüència, si definim

$$M_2 := (\tilde{c} + 1)M_1 + \frac{\tilde{b}}{2},$$

obtenim

$$\text{im}(\tilde{\gamma}) \subseteq B_{M_2}(\text{im}(\gamma')).$$

Ara tornem a la quasi-geodèsica γ original. Hem demostrat que existeix una constant

$$M := \max\{M_1, M_2\},$$

que només depèn de δ , $\tilde{c}$ i $\tilde{b}$, tal que

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_M(\text{im}(\tilde{\gamma})) \quad \text{i} \quad \text{im}(\tilde{\gamma}) \subseteq B_M(\text{im}(\gamma')).$$

Com que, pel Lema 1.3.4,

$$\text{im}(\tilde{\gamma}) \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\gamma)) \quad \text{i} \quad \text{im}(\gamma) \subseteq B_{c+b}(\text{im}(\tilde{\gamma})),$$

deduïm que

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_{M+c+b}(\text{im}(\gamma))$$

i també

$$\text{im}(\gamma) \subseteq B_{M+c+b}(\text{im}(\gamma')).$$

Finalment, definint

$$\Delta := M + c + b,$$

obtenim

$$\text{im}(\gamma') \subseteq B_\Delta(\text{im}(\gamma)) \quad \text{i} \quad \text{im}(\gamma) \subseteq B_\Delta(\text{im}(\gamma')).$$

La constant Δ només depèn de δ , c i b , ja que $\tilde{c}$ i $\tilde{b}$ depenen només de c i b . Això prova el Teorema (vegeu la Figura 1.5). $\square$

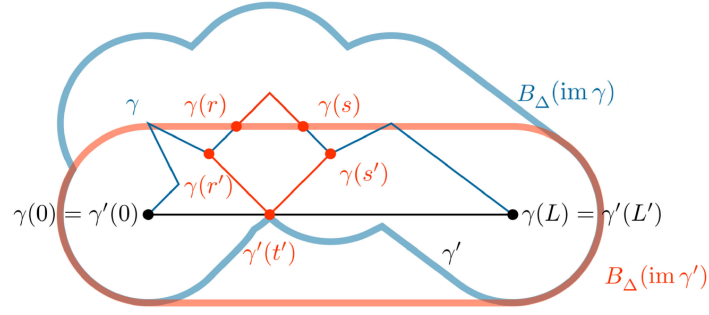


Figura 1.5: En espais hiperbòlics, les geodèsiques són a prop de les quasi-geodèsiques

Corol·lari 1.3.5. *Siguin X i Y espais mètrics.*

1. *Si Y és hiperbòlic, X és quasi-geodèsic i hi ha una immersió quasi-isomètrica $f: X \rightarrow Y$, llavors X és quasi-hiperbòlic.*
2. *Si Y és geodèsic i $X \sim_{QI} Y$, llavors*

$$X \text{ és quasi-hiperbòlic} \iff Y \text{ és hiperbòlic.}$$

3. *Si X i Y són geodèsics i $X \sim_{QI} Y$, llavors*

$$X \text{ és hiperbòlic} \iff Y \text{ és hiperbòlic.}$$

Demostració.

1. Suposem que Y és hiperbòlic, que X és quasi-geodèsic i que existeix una immersió quasi-isomètrica $f: X \rightarrow Y$.

Com que Y és hiperbòlic, pel Teorema 1.3.1 també és quasi-hiperbòlic. Aplicant ara la Proposició 1.2.9, obtenim que X és quasi-hiperbòlic.

2. Suposem que Y és geodèsic i que $X \sim_{QI} Y$. Volem veure que

$$X \text{ és quasi-hiperbòlic} \iff Y \text{ és hiperbòlic.}$$

Si Y és hiperbòlic, aleshores, pel Teorema 1.3.1, Y és quasi-hiperbòlic. Com que $X \sim_{QI} Y$, per la Proposició 1.2.9, obtenim que X és quasi-hiperbòlic.

Recíprocament, suposem que X és quasi-hiperbòlic. Com que $X \sim_{QI} Y$, per la Proposició 1.2.9, Y també és quasi-hiperbòlic. Però Y és geodèsic, i per tant, pel Teorema 1.3.1, Y és hiperbòlic.

3. Suposem finalment que X i Y són geodèsics i que $X \sim_{QI} Y$. Per l'apartat anterior,

$$X \text{ és quasi-hiperbòlic} \iff Y \text{ és hiperbòlic.}$$

Com que X és geodèsic, pel Teorema 1.3.1,

$$X \text{ és hiperbòlic} \iff X \text{ és quasi-hiperbòlic.}$$

Combinant aquestes dues equivalències, obtenim

$$X \text{ és hiperbòlic} \iff Y \text{ és hiperbòlic.}$$

□

Capítol 2:

De l'àlgebra a la geometria de grups

En el capítol anterior hem introduït la noció d'hiperbolicitat per a espais mètrics. Abans de traslladar aquesta idea als grups, necessitem establir el llenguatge algebraic i geomètric que farem servir. En aquest capítol estudiarem els grups lliures, les presentacions de grups i els grafs de Cayley. Els grups lliures proporcionen el model algebraic més simple de grup generat per un conjunt: els seus elements es poden representar mitjançant paraules reduïdes, sense relacions més enllà de les necessàries per tenir inversos. A partir d'aquests grups veurem que tot grup es pot obtenir com a quocient d'un grup lliure, fet que condueix de manera natural a la noció de presentació d'un grup. Finalment, associarem a un grup finitament generat un graf de Cayley, que serà l'objecte geomètric sobre el qual definirem la hiperbolicitat dels grups més endavant.

2.1 Construcció dels grups lliures

En aquesta secció construirem els grups lliures a partir de paraules reduïdes. La idea és començar amb un alfabet A , introduir formalment les lletres inverses i imposar únicament les cancel·lacions necessàries perquè cada lletra tingui invers. Seguirem la construcció donada en [5].

Definició 2.1.1. Sigui A un conjunt, finit o infinit, que anomenarem *alfabet* o *conjunt de lletres*. Denotarem per

$$A^{-1} := \{a^{-1} : a \in A\}$$

una còpia formal disjunta de A . Els elements de A^{-1} s'anomenen *inversos formals* dels elements de A ; en aquest moment encara no són inversos en cap grup. Escriurem

$$A^{\pm 1} := A \sqcup A^{-1}.$$

Una *paraula sobre $A^{\pm 1}$* és una concatenació finita de lletres

$$w = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad x_i \in A^{\pm 1}.$$

El nombre n s'anomena *longitud* de w i s'escriu $|w| = n$. Per conveni, hi ha una única paraula de longitud zero, que denotarem per 1 i anomenarem *paraula buida*. El conjunt de totes les paraules sobre $A^{\pm 1}$ el denotarem per $(A^{\pm 1})^*$.

Si $x \in A^{\pm 1}$, denotarem per x^{-1} la seva inversa formal; és a dir, si $x = a$ per a alguna $a \in A$, aleshores $x^{-1} = a^{-1}$, i si $x = a^{-1}$, aleshores $x^{-1} = a$.

Definició 2.1.2. Una paraula $w = x_1 \cdots x_n$ sobre $A^{\pm 1}$ és *reduïda* si no conté cap parell de lletres consecutives mútuament inverses; és a dir, si

$$x_{i+1} \neq x_i^{-1} \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Denotarem per $R(A)$ el conjunt de paraules reduïdes sobre $A^{\pm 1}$.

Definició 2.1.3. Una *reducció elemental* consisteix a eliminar dins d'una paraula un parell de lletres consecutives de la forma aa^{-1} o $a^{-1}a$, amb $a \in A$. És a dir, si u, v són paraules sobre $A^{\pm 1}$, tenim

$$uaa^{-1}v \rightsquigarrow uv, \quad ua^{-1}av \rightsquigarrow uv.$$

La transformació inversa d'una reducció elemental s'anomena *inserció elemental*. Així, una inserció elemental consisteix a introduir dins d'una paraula un parell de la forma aa^{-1} o $a^{-1}a$.

Anomenarem *transformació elemental* una reducció elemental o bé una inserció elemental. Denotarem una transformació elemental entre u i v

$$u \longleftrightarrow v.$$

Definició 2.1.4. Diem que dues paraules $w, w' \in (A^{\pm 1})^*$ són *equivalents*, i escrivim $w \sim w'$, si es pot passar de w a w' mitjançant una quantitat finita de transformacions elementals; és a dir, si existeixen paraules

$$w_0, w_1, \dots, w_n \in (A^{\pm 1})^*$$

tals que

$$w_0 = w, \quad w_n = w',$$

i

$$w_0 \longleftrightarrow w_1 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow w_n.$$

El cas $n = 0$ també està permès, i correspon a $w = w'$.

Observació 2.1.5. La relació $\sim$ és una relació d'equivalència sobre $(A^{\pm 1})^*$.

Demostració. És reflexiva perquè permetem successions de transformacions elementals de longitud zero. És simètrica perquè tota transformació elemental es pot recórrer en sentit contrari, ja que una reducció elemental és la inversa d'una inserció elemental. Finalment, és transitiva perquè podem concatenar dues successions finites de transformacions elementals. $\square$

Proposició 2.1.6. Cada classe d'equivalència de la relació $\sim$ sobre $(A^{\pm 1})^*$ conté una i només una paraula reduïda.

Demostració. L'existència és immediata. Si una paraula no és reduïda, conté una cancel·lació aa^{-1} o $a^{-1}a$. Eliminant-la obtenim una paraula equivalent de longitud estrictament menor. Com que la longitud és un enter no negatiu, aquest procés acaba després d'un nombre finit de passos i dona una paraula reduïda.

Vegem ara la unicitat. Suposem, per buscar una contradicció, que existeixen dues paraules reduïdes diferents $u, u' \in R(A)$ tals que $u \sim u'$. Entre totes les successions de transformacions elementals que uneixen u amb u' , triem-ne una

$$u = w_0 \longleftrightarrow w_1 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow w_n = u'$$

amb n mínim. Entre totes les successions amb aquest valor de n , triem-ne una que minimitzi la suma

$$N := \sum_{i=0}^n |w_i|.$$

Com que u és reduïda, el primer pas no pot ser una reducció elemental; per tant, és una inserció. De manera anàloga, com que u' és reduïda, l'últim pas no pot ser una inserció

elemental; per tant, és una reducció. Així, al llarg de la successió hi ha algun índex $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que

$$|w_{j-1}| < |w_j| \quad \text{i} \quad |w_j| > |w_{j+1}|.$$

És a dir, el pas $w_{j-1} \rightsquigarrow w_j$ és una inserció elemental i el pas $w_j \rightsquigarrow w_{j+1}$ és una reducció elemental.

Fixem-nos en les dues lletres de w_j introduïdes en la inserció i en les dues lletres eliminades en la reducció següent. Si són les mateixes, aleshores $w_{j-1} = w_{j+1}$ i podem eliminar w_j de la successió, contradient la minimalitat de n .

Si les dues operacions afecten parelles de lletres disjundes, les podem intercanviar: primer fem la reducció corresponent i després la inserció. Això dona una nova successió de u a u' amb el mateix nombre de passos, però amb una paraula intermèdia de longitud menor que $|w_j|$, contradient la minimalitat de N .

Finalment, si les dues parelles comparteixen una lletra, aleshores la reducció elimina una de les lletres acabades d'inserir juntament amb una lletra veïna. En aquest cas, el resultat final torna a ser w_{j-1} . Per exemple, localment tenim una de les situacions

$$xa^{-1}aa^{-1}y \rightsquigarrow xa^{-1}y \quad \text{o} \quad xaa^{-1}ay \rightsquigarrow xay,$$

i en ambdós casos la paraula obtinguda és la mateixa que abans de la inserció. Per tant, també tindríem $w_{j-1} = w_{j+1}$, de nou en contradicció amb la minimalitat de n .

En tots els casos obtenim una contradicció. Per tant, no poden existir dues paraules reduïdes diferents equivalents. Així, tota paraula sobre $A^{\pm 1}$ és equivalent a una única paraula reduïda. $\square$

Donada una paraula $w \in (A^{\pm 1})^*$, denotarem per $\bar{w}$ l'única paraula reduïda equivalent a w . Quan es dedueixi del context que la paraula és reduïda, escriurem w .

Definició 2.1.7. Definim el *grup lliure sobre A* com el conjunt de paraules reduïdes sobre $A^{\pm 1}$, $\mathbb{F}_A := R(A)$, dotat de l'operació següent: si $u, v \in R(A)$, aleshores $u \cdot v := \overline{uv}$, on uv és la concatenació de u i v , i $\overline{uv}$ denota l'única paraula reduïda equivalent a uv .

Sovint escriurem simplement uv per referir-nos al producte de u i v en $\mathbb{F}_A$, sobreentenent que després de concatenar cal reduir la paraula obtinguda.

Observació 2.1.8. El conjunt $\mathbb{F}_A$ amb l'operació anterior és un grup.

Demostració. L'element neutre és la paraula buida 1. Si $w = x_1x_2 \cdots x_n \in \mathbb{F}_A$, aleshores l'invers de w és $w^{-1} = x_n^{-1} \cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$, ja que ww^{-1} i $w^{-1}w$ es redueixen a la paraula buida. L'associativitat prové del fet que reduir una paraula no altera la seva classe d'equivalència: tant $(u \cdot v) \cdot w$ com $u \cdot (v \cdot w)$ són la paraula reduïda equivalent a la concatenació uvw . Per tant, $\mathbb{F}_A$ és un grup. $\square$

Tenim una aplicació natural injectiva

$$\begin{aligned} \iota_A: A &\longrightarrow \mathbb{F}_A \\ a &\longmapsto a, \end{aligned}$$

on a la dreta entenem a com la paraula reduïda de longitud 1 formada per la lletra a . A partir d'ara farem un abús de notació i escriurem simplement $A \subseteq \mathbb{F}_A$ en lloc de $\iota_A(A) \subseteq \mathbb{F}_A$.

Definició 2.1.9. Sigui F un grup i sigui $A \subseteq F$. Diem que F és lliure amb base A si l'aplicació natural

$$\mathbb{F}_A \longrightarrow F$$

que envia cada lletra $a \in A$ a l'element corresponent de F és un isomorfisme.

Equivalentment, F és lliure amb base A si tot element de F s'escriu de manera única com un producte reduït d'elements de $A^{\pm 1}$, incloent-hi el producte buit, que representa l'element neutre.

Proposició 2.1.10. Per a tot conjunt A , el grup $\mathbb{F}_A$ és lliure amb base A .

Demostració. Amb la identificació $A \subseteq \mathbb{F}_A$ anterior, l'aplicació natural

$$\mathbb{F}_A \longrightarrow \mathbb{F}_A$$

que envia cada lletra $a \in A$ a ella mateixa és la identitat. Per tant, és un isomorfisme. Així, $\mathbb{F}_A$ és lliure amb base A . $\square$

Proposició 2.1.11 (Propietat universal del grup lliure). *Sigui F un grup lliure amb base A . Aleshores, per a tot grup G i tota aplicació de conjunts*

$$\varphi: A \longrightarrow G$$

existeix un únic morfisme de grups

$$\widehat{\varphi}: F \longrightarrow G$$

tal que

$$\widehat{\varphi}|_A = \varphi.$$

Equivalentment, si $\iota_A: A \hookrightarrow F$ denota la inclusió natural, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \iota_A \downarrow & \nearrow \exists! \widehat{\varphi} & \\ F & & \end{array}$$

commuta, és a dir,

$$\widehat{\varphi} \circ \iota_A = \varphi.$$

Aquest resultat, que no demostrarem aquí, és una de les caracteritzacions fonamentals dels grups lliures; vegeu [5, Proposició 16].

Definició 2.1.12. Sigui $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Diem que un grup lliure té rang k si admet una base de cardinal k .

Observació 2.1.13. Usarem el resultat clàssic que totes les bases d'un mateix grup lliure tenen el mateix cardinal i que, recíprocament, dos grups lliures amb bases del mateix cardinal són isomorfs; vegeu [5, Proposició 17]. Per tant, per a cada $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ hi ha un únic grup lliure de rang k , llevat d'isomorfisme. El denotarem per $\mathbb{F}_k$.

En particular,

$$\mathbb{F}_0 \cong \{1\}, \quad \mathbb{F}_1 \cong \mathbb{Z}.$$

Per a $k \geq 2$, els grups $\mathbb{F}_k$ ja no són abelians.

2.2 Presentacions de grups

Teorema 2.2.1. *Tot grup G és quocient d'un grup lliure. És a dir, per a tot grup G existeixen $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ i un subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_k$ tals que*

$$G \cong \mathbb{F}_k / N.$$

Demostració. Sigui $A \subseteq G$ un sistema de generadors de G ; sempre podem prendre, per exemple, $A = G$. Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ sobre A . Per la propietat universal del grup lliure (Proposició 2.1.11) aplicada a la inclusió

$$A \hookrightarrow G,$$

existeix un únic morfisme de grups

$$\Phi: \mathbb{F}_A \longrightarrow G$$

tal que $\Phi(a) = a$ per a tot $a \in A$. Com que A genera G , el morfisme Φ és exhaustiu. Per tant, pel primer teorema d'isomorfia,

$$\mathbb{F}_A / \ker(\Phi) \cong G.$$

Com que $\ker(\Phi)$ és un subgrup normal de $\mathbb{F}_A$, prenent $k = |A|$ i $N = \ker(\Phi)$ obtenim el resultat. $\square$

Si al teorema anterior fixem una base per a $\mathbb{F}_k$ i una família de generadors de N com a subgrup normal de $\mathbb{F}_k$, aleshores obtenim el concepte de presentació d'un grup. Abans de donar-ne la definició, recordem la noció de clausura normal.

Definició 2.2.2. Sigui F un grup i sigui $R \subseteq F$. La *clausura normal* de R en F , que denotarem per $\langle\langle R \rangle\rangle_F$, és el subgrup normal més petit de F que conté R . És a dir:

$$\langle\langle R \rangle\rangle_F = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq F \\ R \subseteq N}} N.$$

Equivalentment, és el subgrup generat per tots els conjugats

$$grg^{-1}, \quad g \in F, r \in R.$$

És a dir, els seus elements són precisament els productes finits de la forma

$$g_1 r_{i_1}^{\varepsilon_1} g_1^{-1} \cdots g_n r_{i_n}^{\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

amb $n \geq 0$, $g_i \in F$, $r_{i_j} \in R$ i $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$.

El cas $n = 0$ correspon al producte buit, és a dir, a l'element neutre. Quan el grup ambient sigui clar, escriurem simplement $\langle\langle R \rangle\rangle$.

Observació 2.2.3. La clausura normal de R és el subgrup pel qual cal quocientar per imposar que tots els elements de R siguin trivials.

Definició 2.2.4. Sigui G un grup. Una *presentació* de G és un parell (A, R) , on A és un conjunt de símbols i R és un subconjunt de $\mathbb{F}_A$, tal que

$$G \cong \mathbb{F}_A / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Aquí $\langle\langle R \rangle\rangle$ denota el subgrup normal de $\mathbb{F}_A$ generat per R . Els elements de A s'anomenen *generadors* i els elements de R s'anomenen *relators*. Escriurem aquesta presentació com

$$G = \langle A \mid R \rangle.$$

Donada una presentació $\langle S \mid R \rangle$, si $u, v \in (S \cup S^{-1})^*$ són paraules, escriurem

$$u =_{\langle S \mid R \rangle} v$$

per indicar que u i v representen el mateix element del grup presentat. Quan el grup presentat sigui clar pel context, escriurem

$$u =_G v.$$

Observació 2.2.5. El grup lliure amb base A admet la presentació

$$\mathbb{F}_A = \langle A \mid \emptyset \rangle.$$

Definició 2.2.6. Diem que una presentació $G = \langle A \mid R \rangle$ és *finita* si tant A com R són conjunts finits. Diem que un grup és *finitament presentat* si admet una presentació finita.

El Teorema 2.2.1 admet dues interpretacions contraposades. Per una banda, implica que, col·lectivament, els reticles de subgrups normals dels grups lliures contenen tota la informació algebraica possible sobre qualsevol grup concebible. Això els converteix en candidats naturals i molt concrets on buscar informació sobre qualsevol grup. Per altra banda, per aquesta mateixa raó, aquests reticles han de ser extraordinàriament complicats, i és utòpic pretendre entendre'ls completament.

2.3 Grafs de Cayley

Les presentacions descriuen els grups mitjançant generadors i relacions. Per estudiar-los geomètricament, però, necessitem associar a cada grup finitament generat un espai mètric. L'objecte que fa aquest pas de l'àlgebra a la geometria és el graf de Cayley.

Definició 2.3.1. Siguin G un grup i $S \subseteq G$ un sistema de generadors de G . El *graf de Cayley de G respecte de S* , designat per $\text{Cay}(G, S)$ (Figura 2.1), és el graf dirigit amb conjunt de vèrtexs G i una aresta dirigida

$$g \longrightarrow gs$$

per a cada $g \in G$ i cada $s \in S^{\pm 1}$.

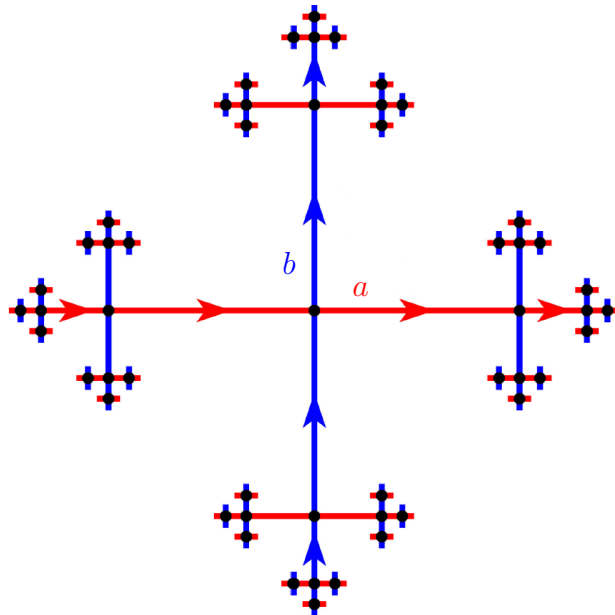


Figura 2.1: Graf de Cayley del grup lliure de rang 2 respecte dels generadors a i b

Observació 2.3.2. Els grafs de Cayley respecte de sistemes de generadors són connexos. En efecte, com que $\langle S \rangle = G$, qualsevol $g \in G$ es pot escriure en la forma

$$g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

per a cert $k \geq 0$, amb $s_{i_j} \in S$ i $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$. Per tant, el camí

$$1 \xrightarrow{s_{i_1}^{\varepsilon_1}} s_{i_1}^{\varepsilon_1} \xrightarrow{s_{i_2}^{\varepsilon_2}} s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \xrightarrow{s_{i_3}^{\varepsilon_3}} \cdots \xrightarrow{s_{i_k}^{\varepsilon_k}} g$$

connecta el vèrtex $1 \in G$ amb el vèrtex $g \in G$.

Per altra banda, si S és finit, el graf de Cayley és $2|S|$ -regular: de cada vèrtex $g \in G$ surt una aresta per cada $s \in S^{\pm 1}$, que va al vèrtex gs , i n'arriba una per cada $s \in S^{\pm 1}$, que ve de gs^{-1} .

Definició 2.3.3. Sigui G un grup generat per S . La mètrica de la paraula respecte de S és la mètrica d_S sobre G definida per

$$d_S(g, h) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid g^{-1}h = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}, s_{i_j} \in S, \varepsilon_j \in \{\pm 1\}\}.$$

Equivalentment, $d_S(g, h)$ és la longitud mínima d'una paraula en $S^{\pm 1}$ que representa $g^{-1}h$.

Aquesta mètrica coincideix amb la mètrica combinatoria del graf de Cayley restringida al conjunt de vèrtexs: la distància entre dos vèrtexs és el nombre mínim d'arestes d'un camí que els uneix.

Ara bé, com a espai mètric discret, el conjunt de vèrtexs d'un graf no és geodèsic, excepte en casos trivials. Per això, quan volem estudiar hiperbolicitat en el sentit geodèsic, és més natural passar a la realització geomètrica del graf.

Definició 2.3.4. La realització geomètrica del graf de Cayley $\text{Cay}(G, S)$, que denotarem per

$$|\text{Cay}(G, S)|,$$

és l'espai mètric obtingut substituint cada aresta del graf per una còpia de l'interval $[0, 1]$ i enganxant els extrems d'aquests intervals als vèrtexs corresponents. La mètrica és la mètrica de camins induïda prenent cada aresta amb longitud 1.

Proposició 2.3.5. La realització geomètrica $|\text{Cay}(G, S)|$ és un espai mètric geodèsic.

Demostració. Siguin $x, y \in |\text{Cay}(G, S)|$. Si x i y són vèrtexs, com que el graf de Cayley és connex, existeix un camí d'arestes que els uneix. Prenent un camí de longitud mínima, i identificant cada aresta amb un interval de longitud 1, obtenim una geodèsica entre x i y .

Si x o y són punts interiors d'arestes, triem els extrems corresponents d'aquestes arestes i unim aquests extrems per un camí mínim en el graf. Afegint els subintervals inicial i final dins de les arestes que contenen x i y , obtenim un camí de longitud mínima entre x i y . Per tant, $|\text{Cay}(G, S)|$ és geodèsic. $\square$

Proposició 2.3.6. Sigui G un grup finitament generat i siguin S_1 i S_2 dos sistemes finits de generadors de G . Aleshores

$$|\text{Cay}(G, S_1)| \sim_{QI} |\text{Cay}(G, S_2)|.$$

Demostració. Primer comparem les mètriques de la paraula sobre el conjunt de vèrtexs G . Com que S_1 i S_2 són finits i tots dos generen G , existeixen constants $C_1, C_2 \geq 1$ tals que cada element de S_1 es pot escriure com una paraula de longitud com a molt C_1 en $S_2^{\pm 1}$, i cada element de S_2 es pot escriure com una paraula de longitud com a molt C_2 en $S_1^{\pm 1}$.

Per tant, per a tot $g, h \in G$,

$$d_{S_2}(g, h) \leq C_1 d_{S_1}(g, h),$$

i també

$$d_{S_1}(g, h) \leq C_2 d_{S_2}(g, h).$$

Així, la identitat

$$\text{id}: (G, d_{S_1}) \longrightarrow (G, d_{S_2})$$

és una quasi-isometria.

D'altra banda, per a cada sistema finit de generadors S , la inclusió dels vèrtexs

$$G \hookrightarrow |\text{Cay}(G, S)|$$

és una quasi-isometria: les distàncies entre vèrtexs coincideixen amb la mètrica de la paraula, i tot punt de la realització geomètrica és a distància com a molt $\frac{1}{2}$ d'algun vèrtex.

Per composició de quasi-isometries, obtenim

$$|\text{Cay}(G, S_1)| \sim_{QI} |\text{Cay}(G, S_2)|. \quad \square$$

Exemple 2.3.7. Un exemple visualment il·lustratiu del fet que els grafs de Cayley d'un mateix grup, associats a sistemes finits de generadors diferents, tenen la mateixa geometria a gran escala és el del grup lliure de rang 1, que és isomorf a $\mathbb{Z}$. En aquest exemple compararem directament les mètriques de la paraula associades a dos sistemes de generadors; aquesta comparació reflecteix la geometria a gran escala dels grafs de Cayley corresponents.

Considerem els dos sistemes de generadors $S_1 = \{1\}$ i $S_2 = \{2, 3\}$.

El graf de Cayley $\text{Cay}(\mathbb{Z}, S_1)$ és la recta infinita: cada enter n està unit amb $n+1$ i amb $n-1$. En canvi, en $\text{Cay}(\mathbb{Z}, S_2)$ cada enter n està unit amb $n \pm 2$ i amb $n \pm 3$.

Així, els dos grafs són clarament diferents des del punt de vista local: el primer té l'aspecte d'una línia, mentre que el segon té moltes més arestes i permet fer salts de longituds 2 i 3 (vegeu la Figura 2.2).

Tanmateix, tots dos descriuen la mateixa geometria a gran escala. En efecte, si denotem per d_{S_1} i d_{S_2} les mètriques de la paraula associades, tenim

$$d_{S_1}(m, n) = |m - n| \quad \text{per a tot } m, n \in \mathbb{Z}.$$

D'altra banda, cada pas en $\text{Cay}(\mathbb{Z}, S_2)$ modifica el valor d'un enter en com a màxim 3, i per tant

$$|m - n| \leq 3 d_{S_2}(m, n).$$

És a dir,

$$\frac{1}{3} |m - n| \leq d_{S_2}(m, n).$$

Recíprocament, com que $1 = 3 - 2$, podem avançar o retrocedir una unitat fent com a molt dos passos en el graf corresponent a S_2 . Repetint aquest procediment $|m - n|$ vegades, obtenim

$$d_{S_2}(m, n) \leq 2 |m - n|.$$

En conseqüència,

$$\frac{1}{3}d_{S_1}(m, n) \leq d_{S_2}(m, n) \leq 2d_{S_1}(m, n) \quad \text{per a tot } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Per tant, la identitat

$$\text{id}: (\mathbb{Z}, d_{S_1}) \longrightarrow (\mathbb{Z}, d_{S_2})$$

és una $(3, 0)$ -quasi-isometria. Això mostra que, encara que els grafs de Cayley depenguin del sistema de generadors escollit i puguin ser molt diferents localment, la seva geometria a gran escala és la mateixa.



Figura 2.2: Dos grafs de Cayley de $\mathbb{Z}$ associats a sistemes de generadors diferents

Remarquem, doncs, que el graf de Cayley depèn del sistema de generadors escollit. No obstant això, si treballem amb sistemes finits de generadors, aquesta dependència desapareix a gran escala: les realitzacions geomètriques corresponents són sempre quasi-isomètriques.

Capítol 3:

Grups Hiperbòlics

Els grups lliures constitueixen el cas model dins la teoria dels grups hiperbòlics. En efecte, el graf de Cayley d'un grup lliure respecte d'una base és un arbre, i els arbres són exemples fonamentals d'espais hiperbòlics. Els grups hiperbòlics es poden entendre com una relaxació geomètrica d'aquesta situació: el seu graf de Cayley ja no ha de ser un arbre, però ha de conservar, a gran escala, un comportament semblant, expressat mitjançant la primesa dels triangles geodèsics.

En aquest capítol ajuntarem les eines desenvolupades fins ara per traslladar la hiperbolicitat al context dels grups finitament generats. Donat un grup G i un sistema finit de generadors S , considerarem el seu graf de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ i direm que G és hiperbòlic si la realització geomètrica d'aquest graf és un espai hiperbòlic. Veurem que aquesta definició no depèn del sistema finit de generadors triat, ja que, per la Proposició 2.3.6, els grafs de Cayley associats a dos sistemes finits de generadors d'un mateix grup són quasi-isomètrics.

Un cop establerta la definició, estudiarem dues conseqüències importants de la hiperbolicitat: la resolubilitat del problema de la paraula i l'existència d'una frontera natural associada al grup. Finalment, aplicarem aquesta construcció al cas dels grups lliures, on la frontera admet una descripció explícita en termes de paraules infinites reduïdes.

3.1 Caracterització dels grups hiperbòlics

Definició 3.1.1. Un grup finitament generat G és *hiperbòlic* si per algun (i per tant per cada) sistema finit de generadors S de G , el graf de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ és quasi-hiperbòlic, o, equivalentment, si la seva realització geomètrica $|\text{Cay}(G, S)|$ és hiperbòlica.

Proposició 3.1.2. *Siguin G i H grups finitament generats. Si H és hiperbòlic i si existeixen sistemes finits de generadors S_G i S_H de G i de H respectivament, tals que existeix una immersió quasi-isomètrica $(G, d_{S_G}) \rightarrow (H, d_{S_H})$, llavors G també és hiperbòlic. En particular, si $G \sim_{QI} H$, llavors:*

$$G \text{ és hiperbòlic} \iff H \text{ és hiperbòlic}.$$

Demostració. Suposem que H és hiperbòlic i que existeix una immersió quasi-isomètrica

$$f: (G, d_{S_G}) \longrightarrow (H, d_{S_H}).$$

Com que H és hiperbòlic, la realització geomètrica del seu graf de Cayley

$$|\text{Cay}(H, S_H)|$$

és un espai mètric hiperbòlic. D'altra banda, la inclusió natural dels vèrtexs

$$(H, d_{S_H}) \hookrightarrow |\text{Cay}(H, S_H)|$$

és una quasi-isometria. Per tant, composant aquesta inclusió amb f , obtenim una immersió quasi-isomètrica

$$(G, d_{S_G}) \longrightarrow |\text{Cay}(H, S_H)|.$$

Com que S_G és finit i genera G , l'espai mètric (G, d_{S_G}) és quasi-geodèsic. A més, com que $|\text{Cay}(H, S_H)|$ és hiperbòlic, també és quasi-hiperbòlic. Per la invariància de la quasi-hiperbolicitat per immersions quasi-isomètriques, deduïm que (G, d_{S_G}) és quasi-hiperbòlic. Finalment, la inclusió natural

$$(G, d_{S_G}) \hookrightarrow |\text{Cay}(G, S_G)|$$

és una quasi-isometria, i $|\text{Cay}(G, S_G)|$ és un espai mètric geodèsic. Per tant, com que en espais geodèsics la hiperbolicitat i la quasi-hiperbolicitat són equivalents, obtenim que

$$|\text{Cay}(G, S_G)|$$

és hiperbòlic. Així, per definició, G és hiperbòlic.

En particular, si $G \sim_{QI} H$ i H és hiperbòlic, existeix una quasi-isometria

$$(G, d_{S_G}) \longrightarrow (H, d_{S_H}),$$

que en particular és una immersió quasi-isomètrica. Pel que acabem de provar, G és hiperbòlic. La implicació recíproca s'obté intercanviant els papers de G i H . Per tant,

$$G \text{ és hiperbòlic} \iff H \text{ és hiperbòlic.} \quad \square$$

Exemple 3.1.3. Els exemples més senzills de grups hiperbòlics són els grups finits i els grups lliures de rang finit. En efecte, si G és finit, aleshores qualsevol graf de Cayley de G té diàmetre finit i, per tant, és hiperbòlic. D'altra banda, si $\mathbb{F}_k$ és un grup lliure de rang finit, el seu graf de Cayley respecte d'una base lliure és un arbre; així, la seva realització geomètrica és 0-hiperbòlica.

Observació 3.1.4. Com que la hiperbolicitat és invariant per quasi-isometries, si dos grups finitament generats G i H admeten sistemes finits de generadors S_G i S_H tals que

$$|\text{Cay}(G, S_G)| \sim_{QI} |\text{Cay}(H, S_H)|,$$

aleshores G és hiperbòlic si i només si H ho és.

Exemple 3.1.5. El grup $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ és hiperbòlic, perquè la realització geomètrica del seu graf de Cayley és quasi-isomètrica a la de $\mathbb{Z}$. Intuïtivament, el factor finit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ només afegeix una direcció acotada i no modifica la geometria a gran escala.

En canvi, $\mathbb{Z}^2$ no és hiperbòlic. Considerem el sistema de generadors

$$S = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

La mètrica de la paraula associada és

$$d_S((a, b), (c, d)) = |a - c| + |b - d|.$$

Per a cada $n \geq 1$, considerem el triangle geodèsic de vèrtexs

$$(0, 0), \quad (n, 0), \quad (0, n),$$

on prenem com a costat entre $(n, 0)$ i $(0, n)$ el camí geodèsic que passa per (n, n) . Aquest camí té longitud $2n$, que coincideix amb la distància entre $(n, 0)$ i $(0, n)$.

Ara bé, el punt (n, n) d'aquest costat és a distància n dels altres dos costats del triangle. Com que n pot ser arbitràriament gran, no existeix cap constant δ que faci tots els triangles geodèsics δ -prims. Per tant, $\mathbb{Z}^2$ no és hiperbòlic.

3.2 Problema de la paraula en grups hiperbòlics

Definició 3.2.1. Sigui $\langle S \mid R \rangle$ una presentació finita d'un grup. Diem que el *problema de la paraula és resoluble* per a la presentació $\langle S \mid R \rangle$ si existeix un algorisme que, per a tota paraula $w \in (S \cup S^{-1})^*$, acaba en temps finit i decideix si w representa l'element neutre del grup $\langle S \mid R \rangle$ o no. Com és habitual, entenem S^{-1} com el conjunt d'inversos formals dels elements de S .

Existeixen grups finitament presentats per als quals el problema de la paraula no és resoluble per a cap presentació finita. No demostrarem aquest resultat aquí, ja que el nostre objectiu és centrar-nos en el cas dels grups hiperbòlics. Veurem, basant-nos en [12] i en [10], que tot grup hiperbòlic té el problema de la paraula resoluble. En particular, això també s'aplica als grups lliures, cosa que és clara amb la seva descripció mitjançant paraules reduïdes: en un grup lliure, com que cada element es pot representar per una única paraula reduïda (Proposició 2.1.6), per decidir si una paraula representa l'element neutre, n'hi ha prou de reduir-la i comprovar si s'obté la paraula buida.

Teorema 3.2.2. Sigui G un grup hiperbòlic i sigui S un sistema finit de generadors de G . Llavors existeix un conjunt finit $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$ tal que $G \cong \langle S \mid R \rangle$ i tal que $\langle S \mid R \rangle$ té problema de la paraula resoluble.

Definició 3.2.3. Una presentació finita $\langle S \mid R \rangle$ és una *presentació de Dehn* si existeix $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i si existeixen paraules $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ tals que:

- (i) $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$;
- (ii) per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$ la paraula v_j és estrictament més curta que la paraula u_j ;
- (iii) per a tota paraula $w \in (S \cup S^{-1})^* \setminus \{1\}$ que representa l'element neutre del grup $\langle S \mid R \rangle$ existeix $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que u_j és una subparaula de w .

Proposició 3.2.4 (Algorisme de Dehn). Si $\langle S \mid R \rangle$ és una presentació de Dehn, llavors el problema de la paraula per a $\langle S \mid R \rangle$ és resoluble.

Demostració. Escrivim $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$ com en la Definició 3.2.3. Donada una paraula $w \in (S \cup S^{-1})^*$, procedim de la manera següent.

Si $w = 1$, aleshores w representa l'element neutre del grup $\langle S \mid R \rangle$.

Suposem ara que $w \neq 1$. Si no existeix cap $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que u_j sigui una subparaula de w , aleshores w no representa l'element neutre de $\langle S \mid R \rangle$, per la tercera propietat de les presentacions de Dehn.

Si, en canvi, existeix $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que u_j és una subparaula de w , podem escriure

$$w = w' u_j w''$$

per a certes paraules $w', w'' \in (S \cup S^{-1})^*$. Com que $u_j v_j^{-1} \in R$, les paraules u_j i v_j representen el mateix element de $\langle S \mid R \rangle$. Per tant,

$$w =_G 1 \iff w' v_j w'' =_G 1.$$

Apliquem ara el mateix procediment a la paraula $w' v_j w''$. Com que, en una presentació de Dehn, la substitució de u_j per v_j redueix estrictament la longitud de la paraula, l'algorisme acaba després d'un nombre finit de passos.

En acabar, obtenim o bé la paraula buida, i aleshores la paraula inicial representava l'element neutre, o bé una paraula no buida que no conté cap subparaula u_j , i aleshores la paraula inicial no representava l'element neutre. Així, el procediment decideix en temps finit si una paraula arbitrària de $(S \cup S^{-1})^*$ representa l'element neutre de $\langle S \mid R \rangle$ o no. Per tant, el problema de la paraula per a $\langle S \mid R \rangle$ és resoluble. $\square$

Acabem de veure que tot grup que admet una presentació de Dehn té el problema de la paraula resoluble. Per tant, per demostrar que els grups hiperbòlics tenen el problema de la paraula resoluble, n'hi haurà prou de veure que tot grup hiperbòlic admet una presentació de Dehn. Abans de provar el Teorema 3.2.2, necessitarem dos lemes auxiliars. Començarem pel més tècnic, que després aplicarem en el lema principal.

Lema 3.2.5 (Geodèsiques locals en espais hiperbòlics). *Sigui $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i sigui (X, d) un espai δ -hiperbòlic. Sigui $c \in \mathbb{R}_{> 8\delta}$ i sigui $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ una geodèsica c -local. Si $\gamma': [0, L'] \rightarrow X$ és una geodèsica amb*

$$\gamma'(0) = \gamma(0), \quad \gamma'(L') = \gamma(L),$$

llavors

$$\text{im}(\gamma) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma')).$$

Demostració. Sigui $D := \max_{t \in [0, L]} d(\gamma(t), \text{im}(\gamma'))$.

Aquest màxim existeix perquè $[0, L]$ és compacte i la funció $t \mapsto d(\gamma(t), \text{im}(\gamma'))$ és contínua. Prenem $s \in [0, L]$ tal que

$$D = d(\gamma(s), \text{im}(\gamma')),$$

i escrivim

$$x := \gamma(s).$$

Volem veure que $D \leq 2\delta$.

Suposem, per buscar una contradicció, que $D > 2\delta$. Com que $c > 8\delta$, podem triar

$$\Delta \in \mathbb{R}_{> 0} \quad \text{tal que} \quad 4\delta < \Delta < \frac{c}{2}.$$

Considerem primer el cas en què

$$s \in [\Delta, L - \Delta].$$

Definim

$$x_1 := \gamma(s - \Delta), \quad x_2 := \gamma(s + \Delta).$$

Com que

$$|(s + \Delta) - (s - \Delta)| = 2\Delta < c,$$

i γ és una geodèsica c -local, el tram

$$\gamma|_{[s-\Delta, s+\Delta]}$$

és una geodèsica entre x_1 i x_2 . En particular,

$$d(x_1, x) = \Delta, \quad d(x, x_2) = \Delta.$$

Siguin $x'_1, x'_2 \in \text{im}(\gamma')$ els punts de $\text{im}(\gamma')$ més propers a x_1 i x_2 , respectivament. Així,

$$d(x_1, x'_1) = d(x_1, \text{im}(\gamma')) \leq D, \quad d(x_2, x'_2) = d(x_2, \text{im}(\gamma')) \leq D.$$

Construïm el quadrilàter geodèsic amb costats

$$[x_1, x_2], \quad [x_2, x'_2], \quad [x'_2, x'_1], \quad [x'_1, x_1],$$

on $[x_1, x_2]$ és el tram de γ entre x_1 i x_2 , $[x'_2, x'_1]$ és el tram corresponent de γ' i $[x_2, x'_2], [x'_1, x_1]$ són trams geodèsics entre x_i i x'_i , per a $i \in \{1, 2\}$, els quals sabem que existeixen perquè X és hiperbòlic i, per tant, geodèsic.

Hem vist en l'Observació 1.2.4 que en un espai δ -hiperbòlic tot quadrilàter geodèsic és 2δ -prim. Així doncs, com que $x \in [x_1, x_2]$, existeix

$$y \in [x_2, x'_2] \cup [x'_2, x'_1] \cup [x'_1, x_1]$$

tal que

$$d(x, y) \leq 2\delta.$$

Si $y \in [x'_2, x'_1]$, aleshores $y \in \text{im}(\gamma')$, i per tant

$$D = d(x, \text{im}(\gamma')) \leq d(x, y) \leq 2\delta,$$

contradient que $D > 2\delta$.

Si $y \in [x'_1, x_1]$, tenim

$$d(y, x'_1) = d(x_1, x'_1) - d(x_1, y).$$

D'altra banda, per la desigualtat triangular,

$$d(x_1, y) \geq d(x_1, x) - d(x, y) \geq \Delta - 2\delta.$$

Per tant, usant que $d(x_1, x'_1) \leq D$,

$$d(y, x'_1) \leq D - (\Delta - 2\delta).$$

Així,

$$\begin{aligned} D = d(x, \text{im}(\gamma')) &\leq d(x, x'_1) \\ &\leq d(x, y) + d(y, x'_1) \\ &\leq 2\delta + D - \Delta + 2\delta \\ &= D - \Delta + 4\delta. \end{aligned}$$

D'aquí se segueix que $\Delta \leq 4\delta$, contradient l'elecció de Δ .

El cas $y \in [x_2, x'_2]$ és anàleg: usant que $d(x, x_2) = \Delta$ i que $d(x_2, x'_2) \leq D$, s'obté de nou

$$D \leq D - \Delta + 4\delta,$$

i, per tant, la mateixa contradicció.

Així, en el cas $s \in [\Delta, L - \Delta]$, cap possibilitat és compatible amb $D > 2\delta$.

Queda considerar el cas en què s és a distància menor que Δ d'un dels extrems de l'interval.

Suposem, per exemple, que $s < \Delta$; el cas $L - s < \Delta$ és simètric.

Si, a més de $s < \Delta$, també $L - s < \Delta$, aleshores $L < 2\Delta < c$. Com que γ és una geodèsica c -local, això implica que γ és una geodèsica entre $\gamma(0)$ i $\gamma(L)$. Per altra banda, γ' també és una geodèsica entre aquests mateixos extrems ja que $\gamma(0) = \gamma'(0)$ i $\gamma(L) = \gamma'(L')$.

Considerem el triangle geodèsic degenerat amb vèrtexs $\gamma(0)$, $\gamma(L)$ i $\gamma(L)$, els costats del qual són γ , γ' i el camí constant en $\gamma(L)$. Per la δ -primesa dels triangles geodèsics, tot punt de $\text{im}(\gamma)$ és a distància com a molt δ de

$$\text{im}(\gamma') \cup \{\gamma(L)\}.$$

Com que $\gamma(L) \in \text{im}(\gamma')$, obtenim

$$\text{im}(\gamma) \subseteq B_\delta(\text{im}(\gamma')) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma')).$$

Per tant, en aquest cas el resultat queda provat.

Suposem, doncs, que $s < \Delta$, $L - s \geq \Delta$ i definim

$$x_2 := \gamma(s + \Delta).$$

El tram $\gamma|_{[0,s+\Delta]}$ és geodèsic, ja que $s + \Delta < 2\Delta < c$. Prenem $x'_2 \in \text{im}(\gamma')$ tal que

$$d(x_2, x'_2) = d(x_2, \text{im}(\gamma')) \leq D.$$

El triangle geodèsic amb costats el tram de γ entre $\gamma(0)$ i $\gamma(s + \Delta) = x_2$, un segment geodèsic que uneixi x_2 amb x'_2 , el qual denotem $[x_2, x'_2]$, i el tram de γ' entre $\gamma(0) = \gamma'(0)$ i x'_2 és δ -prim. Com que $\gamma(s) = x$ pertany al primer costat, existeix un punt

$$y \in [x_2, x'_2] \cup \text{im}(\gamma')$$

tal que $d(x, y) \leq \delta$.

Si $y \in \text{im}(\gamma')$, aleshores

$$D \leq d(x, y) \leq \delta,$$

contradient $D > 2\delta$.

Si $y \in [x_2, x'_2]$, aleshores, com abans,

$$d(x_2, y) \geq d(x_2, x) - d(x, y) \geq \Delta - \delta,$$

i per tant

$$d(y, x'_2) \leq D - (\Delta - \delta).$$

Així,

$$D \leq d(x, x'_2) \leq d(x, y) + d(y, x'_2) \leq \delta + D - \Delta + \delta = D - \Delta + 2\delta,$$

cosa que contradiu $\Delta > 4\delta$.

En tots els casos obtenim una contradicció. Per tant,

$$D \leq 2\delta.$$

Com que D era la distància màxima d'un punt de $\text{im}(\gamma)$ a $\text{im}(\gamma')$, concloem que

$$\text{im}(\gamma) \subseteq B_{2\delta}(\text{im}(\gamma')).$$

□

Per al Lema següent prendrem una constant d'hiperbolicitat estrictament positiva. Això no suposa cap pèrdua de generalitat: per l'Observació 1.2.3, si un espai és 0-hiperbòlic, també és δ -hiperbòlic per a qualsevol $\delta > 0$.

Lema 3.2.6 (Dreceres en cicles de grups hiperbòlics). *Sigui G un grup hiperbòlic, sigui S un sistema finit de generadors de G i suposem que la realització geomètrica $|\text{Cay}(G, S)|$ del graf de Cayley és δ -hiperbòlica, amb $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Sigui

$$\gamma: [0, n] \longrightarrow |\text{Cay}(G, S)|$$

la realització geomètrica, lineal a trossos i parametritzada per longitud d'arc, d'un cicle de longitud $n \in \mathbb{R}_{>0}$ en $\text{Cay}(G, S)$. Aleshores existeixen $t, t' \in [0, n]$, amb $t < t'$, tals que

$$L(\gamma|_{[t, t']}) \leq 8\delta$$

i la restricció $\gamma|_{[t, t']}$ no és geodèsica.

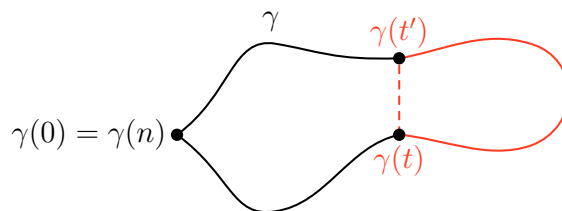


Figura 3.1: Dreceres en grups hiperbòlics

Demostració. Distingim dos casos segons el valor de n .

Si $n \leq 8\delta$, com que γ és un cicle, tenim $\gamma(0) = \gamma(n)$. Però la longitud de γ és $n > 0$, i per tant γ no pot ser geodèsica: una geodèsica entre un punt i ell mateix ha de tenir longitud zero. Així, prenent $t = 0$ i $t' = n$, obtenim un subcamí de longitud $n \leq 8\delta$ que no és geodèsic.

Suposem ara que $n > 8\delta$. Raonarem per contradicció. Suposem que tot subcamí de γ de longitud com a molt 8δ és geodèsic. Aleshores γ és una geodèsica 8δ -local. Com que $|\text{Cay}(G, S)|$ és δ -hiperbòlic, podem aplicar el Lema de les geodèsiques locals en espais hiperbòlics (Lema 3.2.5). La geodèsica que uneix els extrems de γ és constant, ja que $\gamma(0) = \gamma(n)$. Per tant, $\text{im}(\gamma) \subseteq B_{2\delta}(\gamma(0))$. En particular, qualsevol punt de $\text{im}(\gamma)$ està a distància com a molt 2δ de $\gamma(0)$.

Ara bé, com que $n > 8\delta$, el tram $\gamma|_{[0, 4\delta]}$ està ben definit i té longitud $4\delta < 8\delta$. Per la nostra suposició, aquest tram és geodèsic. Per tant, $d(\gamma(0), \gamma(4\delta)) = 4\delta$.

Això contradia la inclusió anterior, que implicava $d(\gamma(0), \gamma(4\delta)) \leq 2\delta$.

Així, la suposició era falsa. Per tant, existeix algun subcamí de γ de longitud com a molt 8δ que no és geodèsic (vegeu la Figura 3.1). $\square$

Abans d'entrar en la demostració del Teorema 3.2.2, fixem la relació entre paraules i camins al graf de Cayley que farem servir. Si

$$w = s_1 \cdots s_n \in (S \cup S^{-1})^*,$$

aleshores w determina un camí en $\text{Cay}(G, S)$ que comença a 1 i passa successivament pels vèrtexs

$$1, \quad s_1, \quad s_1 s_2, \quad \dots, \quad s_1 \cdots s_n.$$

La seva realització geomètrica, parametritzada per longitud d'arc, és un camí

$$\gamma_w: [0, n] \longrightarrow |\text{Cay}(G, S)|.$$

Així, la longitud de γ_w coincideix amb la longitud de la paraula w . A més, els subcamins de γ_w amb extrems en vèrtexs corresponen exactament a subparaules de w .

Direm que una paraula $u \in (S \cup S^{-1})^*$ és geodèsica si el camí que defineix entre els seus extrems és geodèsic. Equivalentment, si

$$\pi: \mathbb{F}_S \longrightarrow G$$

és l'homomorfisme canònic, això vol dir que

$$|u| = d_S(1, \pi(u)).$$

Per tant, dir que una subparaula u no és geodèsica equival a dir que existeix una paraula v amb

$$\pi(v) = \pi(u) \quad \text{i} \quad |v| < |u|.$$

Demostració. (Teorema 3.2.2). Com que G és hiperbòlic, podem prendre una constant $\delta > 0$ tal que la realització geomètrica $|\text{Cay}(G, S)|$ sigui δ -hiperbòlica.

Definim $D := \lceil 8\delta \rceil + 2$.

Pel Lema 3.2.6, tot cicle en $|\text{Cay}(G, S)|$ conté un tram de longitud com a molt 8δ que no és geodèsic. Ara bé, nosaltres treballarem amb paraules, i per tant ens interessen subcamins que comencin i acabin en vèrtexs del graf de Cayley.

Si el Lema ens dona un tram

$$\gamma|_{[t, t']} \quad \text{amb} \quad t' - t \leq 8\delta,$$

prenem

$$i := \lfloor t \rfloor, \quad j := \lceil t' \rceil.$$

Aleshores i i j són enters, el subcamí $\gamma|_{[i,j]}$ té extrems en vèrtexs i conté el tram $\gamma|_{[t,t']}$. A més,

$$j - i \leq (t' - t) + 2 \leq 8\delta + 2 \leq \lceil 8\delta \rceil + 2 = D.$$

Finalment, aquest subcamí tampoc no és geodèsic: si $\gamma|_{[i,j]}$ fos geodèsic, qualsevol subtram seu també ho seria, en contradicció amb el fet que $\gamma|_{[t,t']}$ no és geodèsic.

Considerem ara l'homomorfisme canònic

$$\pi: \mathbb{F}_S \longrightarrow G,$$

que envia cada generador $s \in S$ a l'element corresponent de G . Aquest homomorfisme és exhaustiu, ja que S genera G .

Construïm el conjunt R amb totes les dreceres possibles fins a longitud D :

$$R := \left\{ uv^{-1} : \begin{array}{l} u, v \in (S \cup S^{-1})^*, \\ 0 < |u| \leq D, \\ \pi(u) = \pi(v), \\ |v| = d_S(1, \pi(u)) < |u| \end{array} \right\}.$$

És a dir, u és una paraula no geodèsica de longitud com a molt D , i v és una paraula geodèsica que representa el mateix element de G . Fixem-nos que $\pi(u) = \pi(v)$ equival a dir que $u =_G v$ segons la notació que hem introduït prèviament en el treball.

El conjunt R és finit. En efecte, com que S és finit, només hi ha un nombre finit de paraules en $S \cup S^{-1}$ de longitud com a molt D . A més, per a cadascuna d'aquestes paraules u , només hi ha un nombre finit de paraules v de longitud estrictament menor que $|u|$.

Per construcció,

$$R \subseteq \ker(\pi).$$

Per tant,

$$\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \ker(\pi),$$

on $\langle\langle R \rangle\rangle$ denota la clausura normal de R en $\mathbb{F}(S)$.

Vegem ara la inclusió contrària. Demostrarem, per inducció sobre la longitud $|w|$, que tota paraula

$$w \in (S \cup S^{-1})^*$$

tal que $\pi(w) = 1$ pertany a $\langle\langle R \rangle\rangle$.

Si $|w| = 0$, aleshores $w = 1$ i no hi ha res a demostrar. Suposem, doncs, que $|w| \geq 1$ i que el resultat és cert per a tota paraula de longitud estrictament menor que $|w|$ que representa l'element neutre de G . Distingim dos casos.

Primer suposem que w no està lliurement reduïda. Aleshores w conté una subparaula del tipus xx^{-1} , amb $x \in S \cup S^{-1}$. Podem escriure

$$w = w'xx^{-1}w''$$

i definir

$$\tilde{w} := w'w''.$$

Com que $\pi(\tilde{w}) = \pi(w) = 1$ i

$$|\tilde{w}| = |w| - 2 < |w|,$$

per hipòtesi d'inducció tenim

$$\tilde{w} \in \langle\langle R \rangle\rangle.$$

D'altra banda, com que xx^{-1} representa l'element neutre i la paraula buida és geodèsica, tenim

$$xx^{-1} \in R.$$

A més,

$$w\tilde{w}^{-1} = w'xx^{-1}w''(w'w'')^{-1} = w'xx^{-1}w''(w'')^{-1}(w')^{-1} = w'xx^{-1}(w')^{-1},$$

que és un conjugat d'un element de R . Per tant,

$$w\tilde{w}^{-1} \in \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Com que també $\tilde{w} \in \langle\langle R \rangle\rangle$, deduïm que

$$w \in \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Suposem ara que w està lliurement reduïda. Com que $\pi(w) = 1$, la paraula w representa un cicle en el graf de Cayley de G respecte de S . Pel que hem vist al principi de la demostració, aquest cicle conté una subparaula u de longitud com a molt D que no és geodèsica. Per tant, podem escriure

$$w = w'uw''.$$

Com que u no és geodèsica, existeix una paraula geodèsica v tal que

$$\pi(v) = \pi(u), \quad |v| = d_S(1, \pi(u)) < |u|.$$

Per definició de R , tenim

$$uv^{-1} \in R.$$

Definim

$$\tilde{w} := w'vw''.$$

Aleshores

$$\pi(\tilde{w}) = \pi(w) = 1,$$

i, com que $|v| < |u|$,

$$|\tilde{w}| < |w|.$$

Per hipòtesi d'inducció,

$$\tilde{w} \in \langle\langle R \rangle\rangle.$$

D'altra banda,

$$w\tilde{w}^{-1} = w'uw''(w'vw'')^{-1} = w'uv^{-1}(w')^{-1},$$

que és un conjugat del relator $uv^{-1} \in R$. Per tant,

$$w\tilde{w}^{-1} \in \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Com que també $\tilde{w} \in \langle\langle R \rangle\rangle$, obtenim

$$w \in \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Així hem provat que

$$\ker(\pi) \subseteq \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Com que l'altra inclusió ja l'havíem observada, tenim

$$\ker(\pi) = \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Pel primer teorema d'isomorfia,

$$G \cong \mathbb{F}_S / \ker(\pi) = \mathbb{F}_S / \langle\langle R \rangle\rangle = \langle S \mid R \rangle.$$

Finalment, comprovem que aquesta presentació és de Dehn. Per construcció, tot relator de R és de la forma uv^{-1} , on v és estrictament més curta que u . Sigui ara

$$w \in (S \cup S^{-1})^* \setminus \{1\}$$

una paraula que representa l'element neutre de $\langle S \mid R \rangle$. Equivalentment, per l'isomorfisme anterior, $\pi(w) = 1$.

Si w no està lliurement reduïda, aleshores conté una subparaula del tipus xx^{-1} , i aquesta és una dreuera inclosa en R , ja que es pot substituir per la paraula buida.

Si w està lliurement reduïda, el camí tancat que defineix en $|\text{Cay}(G, S)|$ conté, pel Lema de les dreceres en cicles de grups hiperbòlics (Lema 3.2.6), una subparaula no geodèsica u de longitud com a molt D . Per construcció de R , existeix una paraula geodèsica v , amb $|v| < |u|$, tal que

$$uv^{-1} \in R.$$

Per tant, tota paraula no trivial que representa l'element neutre conté una subparaula u que pot ser substituïda, mitjançant un relator de R , per una paraula estrictament més curta. Així, $\langle S \mid R \rangle$ és una presentació de Dehn. $\square$

Hem demostrat que tot grup hiperbòlic admet una presentació de Dehn i, en conseqüència, que tot grup hiperbòlic té el problema de la paraula resoluble. En realitat, aquest resultat forma part d'una caracterització més precisa: un grup finitament generat és hiperbòlic si i només si admet una presentació de Dehn. La implicació recíproca no la demostrarem en aquest treball, però es pot trobar a [10].

3.3 Frontera de Gromov

En aquesta secció introduïrem la frontera de Gromov associada a un grup hiperbòlic. Intuïtivament, aquesta frontera recull les direccions que tendeixen a l'infinit dins del graf de Cayley del grup. Per fer-ne la construcció, convé formular primer les definicions en el context dels espais hiperbòlics. En efecte, si G és un grup finitament generat amb sistema finit de generadors S , considerem la realització geomètrica $|\text{Cay}(G, S)|$, que és un espai mètric geodèsic. Així, encara que l'objectiu sigui estudiar grups hiperbòlics, la frontera de G s'obté aplicant una construcció geomètrica general al cas $X = |\text{Cay}(G, S)|$.

Després ens centrarem en el cas dels grups lliures. Com hem vist, si F és un grup lliure amb una base fixada, el seu graf de Cayley és un arbre i, per tant, és 0-hiperbòlic. En aquest cas, la frontera admet una descripció especialment concreta en termes de paraules reduïdes infinites.

Definició 3.3.1. Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $x_1, x_2, p \in X$. El *producte de Gromov* entre x_1 i x_2 respecte d'un *punt base* p es defineix de la manera següent (vegeu la Figura 3.2):

$$(x_1, x_2)_p := \frac{1}{2} (d(p, x_1) + d(p, x_2) - d(x_1, x_2)).$$

Lema 3.3.2. *Sigui X un espai δ -hiperbòlic. Aleshores, per a tot $x, y, p \in X$ i per a tota geodèsica $[x, y]$ entre x i y , es compleix*

$$(x.y)_p \leq d(p, [x, y]) \leq (x.y)_p + 2\delta.$$

Demostració. Primer provem la primera desigualtat, que no utilitza la hiperbolicitat. Sigui $q \in [x, y]$. Per la desigualtat triangular,

$$d(x, p) + d(p, y) \leq d(x, q) + d(q, p) + d(p, q) + d(q, y).$$

Com que $q \in [x, y]$, tenim

$$d(x, q) + d(q, y) = d(x, y).$$

Per tant,

$$d(x, p) + d(p, y) \leq d(x, y) + 2d(p, q),$$

i, reorganitzant,

$$(x.y)_p \leq d(p, q).$$

Prenent l'ínfim sobre tots els punts $q \in [x, y]$, obtenim

$$(x.y)_p \leq d(p, [x, y]).$$

Provem ara la segona desigualtat. Triem $q \in [x, y]$ tal que

$$d(x, q) = d(x, p) - (x.y)_p.$$

Això és possible perquè aquesta quantitat pertany a l'interval $[0, d(x, y)]$. En efecte,

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x, p) - (x.y)_p &= \frac{1}{2}(d(x, p) - d(p, y) + d(x, y)) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x, y) + d(y, p) - d(p, y) + d(x, y)) = d(x, y). \end{aligned}$$

A més, com que $q \in [x, y]$, també tenim

$$d(y, q) = d(y, p) - (x.y)_p.$$

Considerem el triangle geodèsic de vèrtexs p, x, y . Com que X és δ -hiperbòlic, aquest triangle és δ -prim. Per tant, com que $q \in [x, y]$, existeix un punt

$$r \in [p, x] \cup [p, y]$$

tal que

$$d(q, r) \leq \delta.$$

Si $r \in [p, x]$, aleshores

$$d(x, r) \geq d(x, q) - d(q, r) \geq d(x, p) - (x.y)_p - \delta.$$

Com que $r \in [p, x]$, tenim

$$d(p, r) = d(p, x) - d(x, r).$$

Per tant,

$$d(p, r) \leq (x.y)_p + \delta.$$

Així,

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) \leq (x.y)_p + 2\delta.$$

El cas $r \in [p, y]$ és anàleg. En aquest cas,

$$d(y, r) \geq d(y, q) - d(q, r) \geq d(y, p) - (x.y)_p - \delta,$$

i, com que $r \in [p, y]$,

$$d(p, r) = d(p, y) - d(y, r) \leq (x.y)_p + \delta.$$

Per tant, de nou,

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) \leq (x.y)_p + 2\delta.$$

En tots dos casos hem obtingut

$$d(p, [x, y]) \leq d(p, q) \leq (x.y)_p + 2\delta. \quad \square$$

Proposició 3.3.3. *Si X és un espai δ -hiperbòlic, llavors per a tot $x_1, x_2, x_3, p \in X$ es verifica*

$$(x_1.x_2)_p \geq \min\{(x_1.x_3)_p, (x_3.x_2)_p\} - 3\delta.$$

Demostració. Fixem $x_1, x_2, x_3, p \in X$, i triem geodèsiques

$$[x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_1].$$

Per simplificar la notació, escrivim

$$D_{ij} := d(p, [x_i, x_j]).$$

Pel Lema 3.3.2 aplicat a x_1 i x_2 , tenim

$$D_{12} \leq (x_1.x_2)_p + 2\delta.$$

Per tant,

$$(x_1.x_2)_p \geq D_{12} - 2\delta.$$

Considerem ara el triangle geodèsic $([x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1])$, que té vèrtexs x_1, x_2, x_3 . Com que X és δ -hiperbòlic, aquest triangle és δ -prim. En particular,

$$[x_1, x_2] \subset B_\delta([x_1, x_3] \cup [x_3, x_2]).$$

Això implica que, per a tot $q \in [x_1, x_2]$, existeix

$$r \in [x_1, x_3] \cup [x_3, x_2]$$

tal que

$$d(q, r) \leq \delta.$$

Per la desigualtat triangular,

$$d(p, q) \geq d(p, r) - d(q, r) \geq d(p, [x_1, x_3] \cup [x_3, x_2]) - \delta.$$

Com que

$$d(p, [x_1, x_3] \cup [x_3, x_2]) = \min\{D_{13}, D_{32}\},$$

obtenim

$$d(p, q) \geq \min\{D_{13}, D_{32}\} - \delta.$$

Prenent l'ínfim sobre $q \in [x_1, x_2]$, resulta

$$D_{12} \geq \min\{D_{13}, D_{32}\} - \delta.$$

Per tant,

$$(x_1.x_2)_p \geq D_{12} - 2\delta \geq \min\{D_{13}, D_{32}\} - 3\delta.$$

Finalment, pel Lema 3.3.2 aplicat a x_1, x_3 i a x_3, x_2 , tenim

$$(x_1.x_3)_p \leq D_{13}, \quad (x_3.x_2)_p \leq D_{32}.$$

Així,

$$\min\{D_{13}, D_{32}\} \geq \min\{(x_1.x_3)_p, (x_3.x_2)_p\}.$$

Substituint-ho en la desigualtat anterior, obtenim

$$(x_1.x_2)_p \geq \min\{(x_1.x_3)_p, (x_3.x_2)_p\} - 3\delta. \quad \square$$

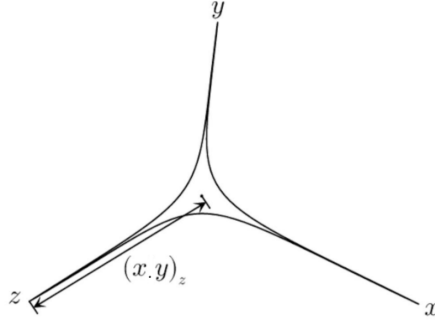


Figura 3.2: Producte de Gromov entre x i y respecte del punt z

A partir d'ara farem servir el producte de Gromov per definir la frontera mitjançant successions. Les dues definicions següents tenen sentit en qualsevol espai mètric. Ara bé, la hiperbolicitat serà essencial per garantir que la relació que introduïrem sigui realment una relació d'equivalència.

Definició 3.3.4. Sigui X un espai mètric. Una successió de punts (x_i) en X *convergeix a l'infinit* si existeix un punt base $p \in X$ tal que

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i.x_j)_p = \infty;$$

és a dir, si per a tot $M > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i, j \geq n_0$, llavors $(x_i.x_j)_p > M$.

Observació 3.3.5. La definició anterior és independent del punt base escollit.

Demostració. Siguin $p, p' \in X$. Per a tot $x_i, x_j \in X$, tenim

$$\begin{aligned} |(x_i.x_j)_p - (x_i.x_j)_{p'}| &= \frac{1}{2} |d(p, x_i) - d(p', x_i) + d(p, x_j) - d(p', x_j)| \\ &\leq \frac{1}{2} |d(p, x_i) - d(p', x_i)| + \frac{1}{2} |d(p, x_j) - d(p', x_j)| \\ &\leq d(p, p'). \end{aligned}$$

Per tant, els productes de Gromov respecte de p i de p' difereixen com a molt en una constant independent de i i j . Suposem que $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i.x_j)_p = \infty$.

Donat $M > 0$, triem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i, j \geq n_0$, aleshores

$$(x_i.x_j)_p > M + d(p, p').$$

Llavors, per a tot $i, j \geq n_0$,

$$(x_i \cdot x_j)_{p'} \geq (x_i \cdot x_j)_p - d(p, p') > M.$$

Així,

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i \cdot x_j)_{p'} = \infty.$$

Com que el raonament és simètric en p i p' , la condició no depèn del punt base escollit. $\square$

Definició 3.3.6. Sigui X un espai mètric. Diem que dues successions (x_i) i (x'_i) que convergeixen a l'infinit en X són *equivalents*, i escrivim $(x_i) \sim (x'_i)$, si per algun punt base $p \in X$ es compleix

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot x'_i)_p = \infty.$$

Observació 3.3.7. La definició anterior també és independent del punt base escollit.

Demostració. Siguin $p, p' \in X$. Com hem vist a l'Observació 3.3.5, per a tot $x_i, x'_i \in X$ tenim

$$|(x_i \cdot x'_i)_p - (x_i \cdot x'_i)_{p'}| \leq d(p, p').$$

Suposem que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot x'_i)_p = \infty.$$

Donat $M > 0$, triem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq n_0$, aleshores

$$(x_i \cdot x'_i)_p > M + d(p, p').$$

Llavors, per a tot $i \geq n_0$,

$$(x_i \cdot x'_i)_{p'} \geq (x_i \cdot x'_i)_p - d(p, p') > M.$$

Per tant,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot x'_i)_{p'} = \infty.$$

Com que el raonament és simètric en p i p' , la condició no depèn del punt base escollit. $\square$

Quan X és hiperbòlic, la intuïció geomètrica darrere de la Definició 3.3.6 és la següent. En un arbre, el producte de Gromov $(x \cdot y)_p$ mesura exactament la longitud del tram inicial comú dels camins geodèsics $[p, x]$ i $[p, y]$. En un espai δ -hiperbòlic, aquesta interpretació deixa de ser exacta, però continua sent vàlida fins a un error controlat per δ : si $(x \cdot y)_p$ és gran, podem interpretar que les geodèsiques de p cap a x i de p cap a y romanen properes durant un tram inicial llarg. Així, si dues successions (x_i) i (y_i) satisfan $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_i)_p = \infty$, això significa que, vistes des del punt base p , avancen cap a l'infinit seguint la mateixa direcció durant trams cada vegada més llargs. Per aquest motiu les identifiquem com a representants del mateix punt de la frontera.

Exemple 3.3.8. Considerem el graf mètric representat a la Figura 3.3, on totes les arestes tenen longitud 1. Aquest graf és un arbre i, per tant, és 0-hiperbòlic.

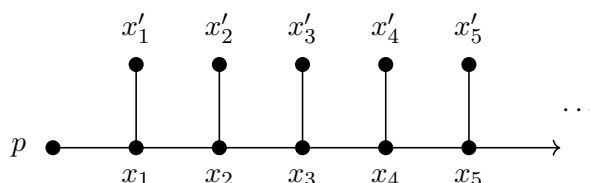


Figura 3.3: Successions que convergeixen al mateix punt de la frontera

Per a tot $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(x_i.x_j)_p = (x'_i.x'_j)_p = \min\{i, j\}, \quad (x_i.x'_i)_p = i.$$

Per tant,

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i.x_j)_p = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{i,j \rightarrow \infty} (x'_i.x'_j)_p = \infty,$$

de manera que tant (x_i) com (x'_i) convergeixen a l'infinit. A més, com que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i.x'_i)_p = \infty,$$

les dues successions són equivalents, és a dir,

$$(x_i) \sim (x'_i).$$

Observació 3.3.9. Si X és un espai δ -hiperbòlic, llavors la relació $\sim$ de la Definició 3.3.6 és d'equivalència.

Demostració. Treballem sobre el conjunt de successions de punts de X que convergeixen a l'infinit, i fixem un punt base $p \in X$.

Vegem primer que la relació és reflexiva. Sigui (x_i) una successió que convergeix a l'infinit. Aleshores

$$(x_i.x_i)_p = \frac{1}{2}(d(p, x_i) + d(p, x_i) - d(x_i, x_i)) = d(p, x_i).$$

Com que (x_i) convergeix a l'infinit, tenim $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i.x_j)_p = \infty$. Prenent $i = j$, obtenim

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i.x_i)_p = \infty. \text{ Per tant, } (x_i) \sim (x_i).$$

La simetria és immediata, ja que el producte de Gromov és simètric. Així, si $(x_i) \sim (x'_i)$, aleshores també $(x'_i) \sim (x_i)$.

Finalment, provem la transitivitat. Siguin (x_i) , (x'_i) i (x''_i) tres successions que convergeixen a l'infinit, i suposem que $(x_i) \sim (x'_i)$ i $(x'_i) \sim (x''_i)$.

Això vol dir que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i.x'_i)_p = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (x'_i.x''_i)_p = \infty.$$

Per la desigualtat del producte de Gromov en espais δ -hiperbòlics de la Proposició 3.3.3 aplicada als punts x_i, x'_i, x''_i i al punt base p , tenim

$$(x_i.x''_i)_p \geq \min\{(x_i.x'_i)_p, (x'_i.x''_i)_p\} - 3\delta.$$

Com que els dos termes que apareixen dins del mínim tendeixen a infinit, també ho fa el mínim. Per tant,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i.x''_i)_p = \infty.$$

Així, $(x_i) \sim (x''_i)$.

Hem provat que la relació és reflexiva, simètrica i transitiva; per tant, és una relació d'equivalència. $\square$

Exemple 3.3.10. La hiperbolicitat és essencial perquè la relació $\sim$ sigui una relació d'equivalència. Considerem $X = \mathbb{Z}^2$, que hem vist en l'Exemple 3.1.5 que no és hiperbòlic, amb la mètrica de la paraula respecte dels generadors $(1, 0)$ i $(0, 1)$, i prenem com a punt base $p = (0, 0)$.

Per a cada $i \geq 1$, definim (Figura 3.4)

$$a_i = (i, 0), \quad b_i = (0, i), \quad c_i = (i, i).$$

Les tres successions (a_i) , (b_i) i (c_i) convergeixen a l'infinit. En efecte,

$$(a_i \cdot a_j)_p = \min\{i, j\}, \quad (b_i \cdot b_j)_p = \min\{i, j\},$$

i

$$(c_i \cdot c_j)_p = 2 \min\{i, j\}.$$

Per tant, en tots tres casos el producte de Gromov tendeix a infinit quan $i, j \rightarrow \infty$.

Vegem ara que la relació $\sim$ no és transitiva. D'una banda,

$$(a_i \cdot c_i)_p = i \longrightarrow \infty \quad \text{i} \quad (b_i \cdot c_i)_p = i \longrightarrow \infty.$$

Així,

$$(a_i) \sim (c_i) \quad \text{i} \quad (b_i) \sim (c_i).$$

D'altra banda,

$$(a_i \cdot b_i)_p = 0$$

per a tot $i \geq 1$. Per tant,

$$(a_i) \not\sim (b_i).$$

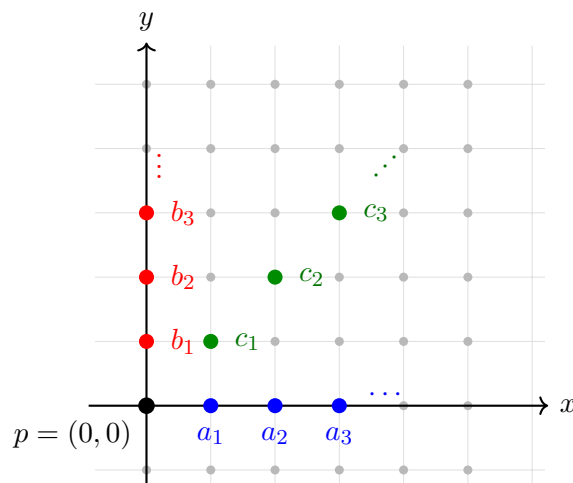


Figura 3.4: Successions a $\mathbb{Z}^2$ que mostren que la relació $\sim$ no és transitiva en general

Així doncs, la relació $\sim$ no és transitiva en aquest exemple. En particular, en un espai mètric arbitrari no podem definir la frontera com el conjunt de classes d'equivalència de successions que convergeixen a l'infinit. Aquest és un dels motius pels quals ens restringim al cas dels espais hiperbòlics.

A partir d'ara, suposarem que X és un espai δ -hiperbòlic. Per l'Observació 3.3.9, la relació $\sim$ és una relació d'equivalència sobre el conjunt de successions que convergeixen a l'infinit, i per tant podem definir la frontera de X .

Definició 3.3.11. La *frontera* de X , denotada per ∂X , és el conjunt de classes d'equivalència de successions de punts de X que convergeixen a l'infinit respecte de la relació $\sim$.

A continuació considerarem el conjunt $\widehat{X} := X \cup \partial X$, que es pot entendre com l'espai obtingut afegint a X els seus punts de l'infinit. Sota hipòtesis adequades, aquest conjunt dona lloc a una compactificació de X ; no ho demostrarem en el cas general, però es pot consultar, per exemple, a [11, Proposició 2.14]. En canvi, sí que ho veurem explícitament en el cas dels grups lliures més endavant.

L'objectiu ara és preparar les eines que permeten descriure la topologia de la frontera. Per anar en aquesta direcció, començarem veient que el producte de Gromov es pot estendre a tot $\widehat{X}$.

En el que segueix, si $x \in \partial X$, escriurem $(x_i) \in x$ per indicar que (x_i) és una successió representant de la classe x .

Definició 3.3.12. Fixat un punt base $p \in X$, estenem el producte de Gromov a $\widehat{X}$ de la manera següent. Per a $x, y \in \widehat{X}$, definim

$$(x.y)_p := \begin{cases} \frac{1}{2}(d(p, x) + d(p, y) - d(x, y)) & \text{si } x, y \in X, \\ \inf_{(y_i) \in y} \liminf_{i \rightarrow \infty} (x.y_i)_p & \text{si } x \in X, y \in \partial X, \\ \inf_{(x_i) \in x} \liminf_{i \rightarrow \infty} (x_i.y)_p & \text{si } x \in \partial X, y \in X, \\ \inf_{\substack{(x_i) \in x \\ (y_j) \in y}} \liminf_{i, j \rightarrow \infty} (x_i.y_j)_p & \text{si } x, y \in \partial X. \end{cases}$$

En els casos en què apareixen punts de la frontera, els ínfims es prenen sobre totes les successions representants de les classes corresponents.

Exemple 3.3.13. L'exemple següent mostra per què, en l'extensió del producte de Gromov a la frontera, cal prendre tant un ínfim sobre les successions representants com un límit inferior.

Considerem el graf mètric X de la Figura 3.5, que pot ser vist com el graf de Cayley de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, el qual hem vist que és hiperbòlic en l'Observació 3.1.4. La frontera consisteix en dos punts, anomenem-los $a^{+\infty}$ i $a^{-\infty}$.

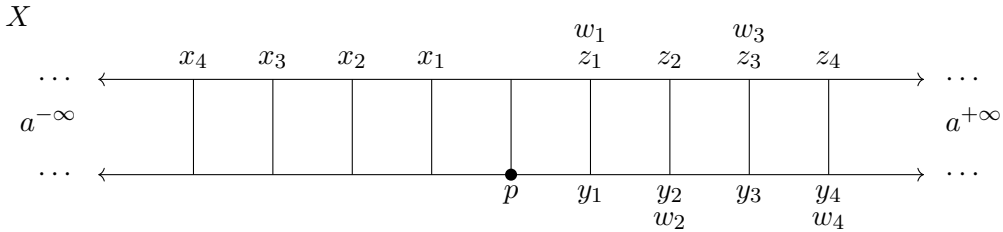


Figura 3.5: Exemple que motiva l'extensió del producte de Gromov a la frontera

Amb la notació de la figura, tenim

$$x_i \longrightarrow a^{-\infty}, \quad y_i \longrightarrow a^{+\infty}, \quad z_i \longrightarrow a^{+\infty}, \quad w_i \longrightarrow a^{+\infty}.$$

Ara bé, les successions (y_i) i (z_i) representen el mateix punt de la frontera, però donen valors diferents del producte de Gromov amb (x_i) . En efecte, per a tot i, j tenim

$$d(p, x_i) = i + 1, \quad d(p, y_j) = j, \quad d(p, z_j) = j + 1,$$

i també

$$d(x_i, y_j) = i + j + 1, \quad d(x_i, z_j) = i + j.$$

Per tant,

$$(x_i.y_j)_p = \frac{1}{2}((i + 1) + j - (i + j + 1)) = 0,$$

mentre que

$$(x_i \cdot z_j)_p = \frac{1}{2}((i+1) + (j+1) - (i+j)) = 1.$$

Així,

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_p = 0, \quad \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot z_j)_p = 1.$$

Això mostra que, si fixéssim arbitràriament unes successions representants, el valor obtingut podria dependre de la tria del representant. Per aquest motiu, en la definició del producte de Gromov per a punts de ∂X , prenem l'ímfim sobre totes les successions representants.

D'altra banda, la successió (w_i) alterna entre punts de la part superior i punts de la part inferior del graf. Per això, el valor de $(x_i \cdot w_j)_p$ alterna entre els valors anteriors:

$$(x_i \cdot w_j)_p = \begin{cases} 1 & \text{si } w_j = z_j, \\ 0 & \text{si } w_j = y_j. \end{cases}$$

En conseqüència, el límit $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot w_j)_p$ no existeix. Tanmateix, el límit inferior sí que existeix i val $\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot w_j)_p = 0$.

Això justifica que en la definició no es faci servir el límit ordinari, sinó el límit inferior: aquest continua tenint sentit encara que els productes de Gromov oscil·lin segons la successió representant escollida.

Observació 3.3.14. El producte de Gromov està a $\widehat{X}$ respecte del punt base $p \in X$ pren valors en $[0, \infty]$. A més, donats $x, y \in \widehat{X}$, es té

$$(x \cdot y)_p = \infty \iff x, y \in \partial X \quad \text{i} \quad x = y.$$

Demostració. Si $x, y \in X$, aleshores

$$(x \cdot y)_p = \frac{1}{2}(d(p, x) + d(p, y) - d(x, y)) \geq 0$$

per la desigualtat triangular. Per tant, com que en la definició per a $\widehat{X}$ només prenem límits inferiors i ínfims de quantitats no negatives, el producte de Gromov està pren valors en $[0, \infty]$.

Vegem ara quan pot valer ∞ . Demostrem primer la implicació cap a la dreta. Suposem que $(x \cdot y)_p = \infty$. Si $x, y \in X$, aleshores $(x \cdot y)_p < \infty$, ja que totes les distàncies que apareixen en la definició són finites. Per tant, no pot passar que $x, y \in X$. Suposem ara que $x \in X$ i $y \in \partial X$. Llavors, per a qualsevol successió representant $(y_i) \in y$, tenim

$$(x \cdot y_i)_p = \frac{1}{2}(d(p, x) + d(p, y_i) - d(x, y_i)) \leq d(p, x),$$

ja que, per la desigualtat triangular,

$$d(p, y_i) - d(x, y_i) \leq d(p, x).$$

Així,

$$(x \cdot y)_p \leq d(p, x) < \infty.$$

El mateix argument serveix si $x \in \partial X$ i $y \in X$. Per tant, si $(x \cdot y)_p = \infty$, necessàriament $x, y \in \partial X$. Queda veure que, en aquest cas, $x = y$. Com que $x, y \in \partial X$, per definició tenim

$$(x \cdot y)_p = \inf_{\substack{(x_i) \in x \\ (y_j) \in y}} \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_p.$$

Aquest ínfim val ∞ . Com que tots els termes que apareixen en l'ínfim pertanyen a $[0, \infty]$, això implica que, per a qualsevol parell de representants $(x_i) \in x$ i $(y_j) \in y$,

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_p = \infty.$$

En particular, prenent $j = i$, obtenim

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_i)_p = \infty.$$

Per tant, $(x_i) \sim (y_i)$ i, així, $x = y$ com a punts de la frontera.

Demostrem ara la implicació cap a l'esquerra. Suposem que $x, y \in \partial X$ i que $x = y$. Siguin $(x_i) \in x$ i $(y_j) \in y$ dues successions representants qualsevols. Com que representen el mateix punt de la frontera, tenim $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_i)_p = \infty$.

A més, com que (y_i) convergeix a l'infinit, $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (y_i \cdot y_j)_p = \infty$.

Per la desigualtat del producte de Gromov,

$$(x_i \cdot y_j)_p \geq \min\{(x_i \cdot y_i)_p, (y_i \cdot y_j)_p\} - 3\delta.$$

Els dos termes que apareixen dins del mínim tendeixen a infinit quan $i, j \rightarrow \infty$. Per tant,

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_p = \infty.$$

Com que això val per a qualsevol tria de representants, l'ínfim que defineix $(x \cdot y)_p$ també és infinit. Així, $(x \cdot y)_p = \infty$. $\square$

Proposició 3.3.15. *Siguin $x, x', x'' \in \partial X$. Aleshores*

$$(x \cdot x')_p \geq \min\{(x \cdot x'')_p, (x'' \cdot x')_p\} - 3\delta.$$

Demostració. Denotem

$$A := (x \cdot x'')_p, \quad B := (x'' \cdot x')_p, \quad m := \min\{A, B\}.$$

Si $m = \infty$, aleshores $A = B = \infty$. Per l'Observació 3.3.14, això implica que $x = x''$ i $x'' = x'$. Per tant, $x = x'$ i, de nou per l'Observació 3.3.14, tenim $(x \cdot x')_p = \infty$. Així, la desigualtat és trivial en aquest cas.

Suposem, doncs, que $m < \infty$. Prenem successions representants qualsevols

$$(x_i) \in x, \quad (x'_j) \in x', \quad (x''_k) \in x''.$$

Per la desigualtat del producte de Gromov en X , per a tot i, j, k tenim

$$(x_i \cdot x'_j)_p \geq \min\{(x_i \cdot x''_k)_p, (x''_k \cdot x'_j)_p\} - 3\delta.$$

Ara bé, com que $(x \cdot x'')_p$ és l'ínfim sobre totes les successions representants de x i de x'' , tenim

$$\liminf_{i,k \rightarrow \infty} (x_i \cdot x''_k)_p \geq A.$$

De la mateixa manera,

$$\liminf_{k,j \rightarrow \infty} (x''_k \cdot x'_j)_p \geq B.$$

Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$, si els índexs són prou grans, es té

$$(x_i \cdot x''_k)_p > m - \varepsilon, \quad (x''_k \cdot x'_j)_p > m - \varepsilon.$$

Així, si i i j són prou grans, podem prendre k prou gran i obtenir

$$(x_i.x'_j)_p \geq m - \varepsilon - 3\delta.$$

En conseqüència,

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i.x'_j)_p \geq m - \varepsilon - 3\delta.$$

Com que això val per a tot $\varepsilon > 0$, obtenim

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i.x'_j)_p \geq m - 3\delta.$$

Finalment, com que les successions representants $(x_i) \in x$ i $(x'_j) \in x'$ eren qualsevols, prenent l'ímfim sobre totes aquestes tries deduïm que

$$(x.x')_p \geq \min\{(x.x'')_p, (x''.x')_p\} - 3\delta. \quad \square$$

Recordem que l'objectiu és dotar $\widehat{X} = X \cup \partial X$ d'una topologia. En el cas general, però, ens centrarem només en la part afegida a X , és a dir, en la frontera ∂X . Per fer-ho, construirem una mètrica sobre ∂X que induirà la topologia desitjada. El primer pas serà definir una funció de proximitat entre punts de la frontera.

La idea és que dos punts de la frontera han de ser propers si poden ser representats per successions que, vistes des del punt base p , avancen cap a l'infinit mantenint un producte de Gromov gran. Per això, per a $a > 1$, considerem la funció

$$\rho(x, y) := a^{-(x.y)_p}, \quad x, y \in \partial X,$$

on fem servir el conveni $a^{-\infty} = 0$. Com més gran és el producte $(x.y)_p$, més properes considerem les direccions representades per x i y , i més petit és el valor de $\rho(x, y)$.

Així doncs, ρ és una bona candidata per mesurar la distància entre punts de ∂X . Ara bé, en general pot no satisfer la desigualtat triangular. El que sí que satisfà és una desigualtat quasi-ultramètrica, que en particular implica una desigualtat triangular afeblida.

Definició 3.3.16. Sigui Z un conjunt. Diem que una aplicació $q: Z \times Z \rightarrow [0, \infty)$ és una K -quasi-mètrica en Z si es compleixen les condicions següents:

- (i) $\forall z, z' \in Z, \quad q(z, z') = 0 \iff z = z';$
- (ii) $\forall z, z' \in Z, \quad q(z, z') = q(z', z);$
- (iii) $\forall z, z', z'' \in Z$, es compleix la *desigualtat quasi-triangular*:

$$q(z, z'') \leq K(q(z, z') + q(z', z'')).$$

Diem que q és una *quasi-mètrica* si existeix $K \geq 1$ tal que q és una K -quasi-mètrica.

Definició 3.3.17. Sigui Z un conjunt. Diem que una aplicació $q: Z \times Z \rightarrow [0, \infty)$ és una K -quasi-ultramètrica en Z si és una quasi-mètrica i, a més, compleix la *desigualtat quasi-ultramètrica*:

$$\forall z, z', z'' \in Z, \quad q(z, z'') \leq K \max\{q(z, z'), q(z', z'')\}.$$

Diem que q és una *quasi-ultramètrica* si existeix $K \geq 1$ tal que q és una K -quasi-ultramètrica.

Observació 3.3.18. Siguin X un espai δ -hiperbòlic, $p \in X$ i $a > 1$. L'aplicació

$$\begin{aligned} \rho: \partial X \times \partial X &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x, x') &\longmapsto a^{-(x.x')_p} \end{aligned}$$

és una $a^{3\delta}$ -quasi-ultramètrica en ∂X .

Demostració. Primer observem que ρ està ben definida com a aplicació amb valors en $[0, \infty)$. En efecte, per l'Observació 3.3.14, el producte de Gromov estès pren valors en $[0, \infty]$; amb el conveni $a^{-\infty} = 0$, això implica que $\rho(x, x') = a^{-(x.x')_p} \in [0, \infty)$ per a tot $x, x' \in \partial X$. Vegem ara la primera propietat. Per l'Observació 3.3.14, per a $x, x' \in \partial X$ tenim

$$(x.x')_p = \infty \iff x = x'.$$

Per tant,

$$\rho(x, x') = 0 \iff a^{-(x.x')_p} = 0 \iff (x.x')_p = \infty \iff x = x'.$$

La simetria també és immediata, ja que el producte de Gromov estès és simètric:

$$(x.x')_p = (x'.x)_p.$$

Així,

$$\rho(x, x') = a^{-(x.x')_p} = a^{-(x'.x)_p} = \rho(x', x).$$

Finalment, provem la desigualtat quasi-ultramètrica. Siguin $x, x', x'' \in \partial X$. Per la Proposició 3.3.15,

$$(x.x')_p \geq \min\{(x.x'')_p, (x''.x')_p\} - 3\delta.$$

Com que la funció $t \mapsto a^{-t}$ és decreixent, obtenim

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &= a^{-(x.x')_p} \\ &\leq a^{-\min\{(x.x'')_p, (x''.x')_p\} + 3\delta} \\ &= a^{3\delta} \max\{a^{-(x.x'')_p}, a^{-(x''.x')_p}\} \\ &= a^{3\delta} \max\{\rho(x, x''), \rho(x'', x')\}. \end{aligned}$$

Per tant, ρ és una $a^{3\delta}$ -quasi-ultramètrica. □

Així, ρ potser no és una mètrica, però sí una quasi-ultramètrica. A continuació veurem com, a partir de ρ , es pot construir una mètrica sobre ∂X mitjançant la construcció en cadena que tot seguit definirem. La topologia associada a aquesta mètrica serà la topologia que considerarem sobre la frontera.

Definició 3.3.19. Sigui Z un conjunt i sigui q una quasi-mètrica en Z . L'aplicació obtinguda mitjançant la *construcció en cadena* és l'aplicació $d_q: Z \times Z \rightarrow [0, \infty)$ definida per

$$d_q(z, z') := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) \mid k \in \mathbb{N}, z = z_0, z_1, \dots, z_k = z' \right\}.$$

És a dir, l'ínfim es pren sobre totes les cadenes finites de punts de Z que comencen a z i acaben a z' .

Intuïtivament, aquesta construcció corregeix el possible defecte de la desigualtat triangular de q . En lloc de mesurar només la separació directa $q(z, z')$, mesurem la menor longitud possible d'anar de z a z' passant per una cadena finita de punts intermedis, on la longitud d'una cadena es calcula sumant les separacions donades per q entre punts consecutius. D'aquesta manera, d_q incorpora automàticament la idea de desigualtat triangular.

Ara bé, en general no podem assegurar encara que d_q sigui una mètrica: podria passar que dos punts diferents $z, z' \in Z$ es poguessin unir mitjançant cadenes amb longitud respecte de q tan petita com es vulgui. En aquest cas, l'ímfim d'aquestes longituds seria 0, i per tant tindríem $d_q(z, z') = 0$ tot i que $z \neq z'$.

Observació 3.3.20. Si la quasi-mètrica q ja és una mètrica en Z , aleshores la construcció en cadena no la modifica; és a dir, $d_q = q$.

Demostració. En efecte, per una banda, la cadena formada només pels punts z i z' dona

$$d_q(z, z') \leq q(z, z').$$

Per altra banda, si

$$z = z_0, z_1, \dots, z_k = z'$$

és qualsevol cadena que uneix z amb z' , la desigualtat triangular aplicada repetidament dona

$$q(z, z') \leq \sum_{i=0}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}).$$

Prenent l'ímfim sobre totes les cadenes que uneixen z amb z' , obtenim

$$q(z, z') \leq d_q(z, z').$$

Per tant, $d_q(z, z') = q(z, z')$ per a tot $z, z' \in Z$. □

Proposició 3.3.21. *Segui q una K -quasi-ultramètrica en un conjunt Z , amb $1 \leq K \leq 2$. Llavors l'aplicació d_q obtinguda mitjançant la construcció en cadena és una mètrica en Z .*

Demostració. Per definició de d_q , tenim $d_q(z, z') \geq 0$ per a tot $z, z' \in Z$. A més, $d_q(z, z) = 0$, ja que podem considerar la cadena formada només pel punt z .

La simetria també és immediata. En efecte, si

$$z = z_0, z_1, \dots, z_k = z'$$

és una cadena que uneix z amb z' , aleshores

$$z' = z_k, z_{k-1}, \dots, z_0 = z$$

és una cadena que uneix z' amb z . Com que q és simètrica, les dues cadenes tenen la mateixa longitud respecte de q . Per tant,

$$d_q(z, z') = d_q(z', z).$$

Vegem ara la desigualtat triangular. Siguin $z, z', z'' \in Z$ i sigui $\varepsilon > 0$. Per definició d'ímfim, podem triar una cadena

$$z = z_0, z_1, \dots, z_k = z'$$

tal que

$$\sum_{i=0}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) < d_q(z, z') + \frac{\varepsilon}{2},$$

i una cadena

$$z' = z'_0, z'_1, \dots, z'_\ell = z''$$

tal que

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} q(z'_j, z'_{j+1}) < d_q(z', z'') + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Concatenant aquestes dues cadenes obtenim una cadena que uneix z amb z'' i que compleix

$$\begin{aligned} d_q(z, z'') &\leq \sum_{i=0}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) + \sum_{j=0}^{\ell-1} q(z'_j, z'_{j+1}) \\ &< d_q(z, z') + d_q(z', z'') + \varepsilon. \end{aligned}$$

Com que això val per a tot $\varepsilon > 0$, deduïm que

$$d_q(z, z'') \leq d_q(z, z') + d_q(z', z'').$$

Només queda provar que d_q separa punts. Per fer-ho, veurem que si $z \neq z'$, aleshores no hi pot haver cadenes de longitud respecte de q arbitràriament petita que uneixin z amb z' . Sigui

$$\sigma = (z = z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1} = z')$$

una cadena finita que uneix z amb z' . Denotem-ne la longitud per

$$\ell_q(\sigma) := \sum_{i=0}^k q(z_i, z_{i+1}).$$

Veurem la desigualtat següent:

$$q(z, z') \leq 2K \ell_q(\sigma).$$

Aquesta desigualtat implica el resultat que volem provar. En efecte, com que val per a tota cadena σ que uneix z amb z' , prenent l'ínfim sobre totes aquestes cadenes obtenim

$$q(z, z') \leq 2K d_q(z, z').$$

Per tant, si $d_q(z, z') = 0$, aleshores $q(z, z') = 0$. Com que q separa punts, això implica $z = z'$.

Provem, doncs, la desigualtat anterior. De fet, veurem una desigualtat una mica més precisa. Per a una cadena

$$\sigma = (z = z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1} = z')$$

amb almenys dos salts, definim

$$\Sigma(\sigma) := K \left(q(z_0, z_1) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) + q(z_k, z_{k+1}) \right).$$

Veurem que

$$q(z, z') \leq \Sigma(\sigma).$$

Aquesta desigualtat implica

$$q(z, z') \leq 2K \ell_q(\sigma),$$

perquè

$$q(z_0, z_1) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) + q(z_k, z_{k+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^k q(z_i, z_{i+1}) = 2\ell_q(\sigma).$$

Provem ara que $q(z, z') \leq \Sigma(\sigma)$ per inducció sobre el nombre de salts de la cadena. Si la cadena té només dos salts, és a dir, si

$$\sigma = (z = z_0, z_1, z_2 = z'),$$

llavors la desigualtat quasi-ultramètrica dona directament

$$q(z, z') \leq K \max\{q(z, z_1), q(z_1, z')\}.$$

Com que

$$\max\{q(z, z_1), q(z_1, z')\} \leq q(z, z_1) + q(z_1, z'),$$

obtenim

$$q(z, z') \leq K(q(z, z_1) + q(z_1, z')) = \Sigma(\sigma).$$

Això prova el cas inicial de la inducció.

Suposem ara que el resultat és cert per a cadenes amb menys salts i considerem una cadena

$$\sigma = (z = z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1} = z')$$

amb més de dos salts. Volem provar que $q(z, z') \leq \Sigma(\sigma)$.

Per a cada $h \in \{0, \dots, k\}$, la desigualtat quasi-ultramètrica dona

$$q(z, z') \leq K \max\{q(z, z_h), q(z_h, z')\}.$$

Triem h màxim tal que

$$q(z, z') \leq Kq(z_h, z').$$

Aquest h existeix, perquè per a $h = 0$ la desigualtat és

$$q(z, z') \leq Kq(z, z'),$$

que és certa ja que $K \geq 1$.

Suposem que no es compleix $q(z, z') \leq \Sigma(\sigma)$. És a dir, suposem que

$$q(z, z') > \Sigma(\sigma).$$

En particular,

$$q(z, z') > Kq(z, z_1) \quad \text{i} \quad q(z, z') > Kq(z_k, z').$$

La primera desigualtat implica que $h \geq 1$, i la segona que $h \leq k - 1$. Per tant,

$$h \in \{1, \dots, k - 1\}.$$

Per la maximalitat de h , tenim

$$q(z, z') > Kq(z_{h+1}, z').$$

Com que

$$q(z, z') \leq K \max\{q(z, z_{h+1}), q(z_{h+1}, z')\},$$

necessàriament

$$q(z, z') \leq Kq(z, z_{h+1}).$$

D'altra banda, per la definició de h ,

$$q(z, z') \leq Kq(z_h, z').$$

Així,

$$q(z, z') \leq K \min\{q(z, z_{h+1}), q(z_h, z')\}.$$

Ara considerem les dues subcadenaes

$$\sigma_1 = (z_0, z_1, \dots, z_{h+1}) \quad \text{i} \quad \sigma_2 = (z_h, z_{h+1}, \dots, z_{k+1}).$$

Tenen menys salts que σ , i per tant hi podem aplicar la hipòtesi d'inducció. Obtenim

$$q(z, z_{h+1}) \leq \Sigma(\sigma_1) \quad \text{i} \quad q(z_h, z') \leq \Sigma(\sigma_2).$$

Sumant,

$$q(z, z_{h+1}) + q(z_h, z') \leq \Sigma(\sigma_1) + \Sigma(\sigma_2).$$

Per la definició de Σ , tenim

$$\begin{aligned} \Sigma(\sigma_1) + \Sigma(\sigma_2) &= K \left(q(z_0, z_1) + 2 \sum_{i=1}^{h-1} q(z_i, z_{i+1}) + 2q(z_h, z_{h+1}) + 2 \sum_{i=h+1}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) + q(z_k, z_{k+1}) \right) \\ &= K \left(q(z_0, z_1) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} q(z_i, z_{i+1}) + q(z_k, z_{k+1}) \right) \\ &= \Sigma(\sigma). \end{aligned}$$

Per tant,

$$q(z, z_{h+1}) + q(z_h, z') \leq \Sigma(\sigma).$$

Com que estem suposant que $q(z, z') > \Sigma(\sigma)$, deduïm que

$$q(z, z_{h+1}) + q(z_h, z') < q(z, z').$$

Ara bé, com que $K \leq 2$, per a qualsevols nombres no negatius A i B tenim

$$K \min\{A, B\} \leq A + B.$$

Aplicant-ho a

$$A = q(z, z_{h+1}), \quad B = q(z_h, z'),$$

obtenim

$$q(z, z') \leq K \min\{q(z, z_{h+1}), q(z_h, z')\} \leq q(z, z_{h+1}) + q(z_h, z') < q(z, z'),$$

que és impossible.

Així, la suposició $q(z, z') > \Sigma(\sigma)$ era falsa, i per tant

$$q(z, z') \leq \Sigma(\sigma).$$

Com hem vist abans, això implica

$$q(z, z') \leq 2K \ell_q(\sigma).$$

Finalment, prenent l'ímfim sobre totes les cadenes σ que uneixen z amb z' , obtenim

$$q(z, z') \leq 2K d_q(z, z').$$

Per tant, si $d_q(z, z') = 0$, aleshores $q(z, z') = 0$, i com que q separa punts, tenim $z = z'$. Hem provat que d_q és no negativa, simètrica, satisfà la desigualtat triangular i separa punts. Per tant, d_q és una mètrica en Z . $\square$

Corol·lari 3.3.22. *Sigui X un espai δ -hiperbòlic i sigui ∂X la seva frontera. Fixem un punt base $p \in X$. Sigui $a > 1$ tal que $a^{3\delta} \leq 2$.*

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \rho: \partial X \times \partial X &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x, x') &\longmapsto a^{-(x.x')_p}. \end{aligned}$$

Llavors, l'aplicació d_ρ obtinguda a partir de ρ mitjançant la construcció en cadena és una mètrica en ∂X .

Demostració. Per l'Observació 3.3.18, ρ és una $a^{3\delta}$ -quasi-ultramètrica en ∂X . Com que $a^{3\delta} \leq 2$, podem aplicar la Proposició 3.3.21 amb $K = a^{3\delta}$. Per tant, d_ρ és una mètrica en ∂X . $\square$

Observació 3.3.23. En el Corol·lari 3.3.22, si $\delta > 0$, la condició $a^{3\delta} \leq 2$ equival a

$$1 < a \leq 2^{\frac{1}{3\delta}}. \quad \square$$

Com ja hem vist, en el cas d'un grup lliure finitament generat F amb base A , el graf de Cayley $\text{Cay}(F, A)$ és un arbre. Per tant, la seva realització geomètrica és 0-hiperbòlica, i la frontera admet una descripció molt més explícita i fàcil d'entendre i de manipular.

3.3.1 Aplicació al cas del grup lliure

En aquesta subsecció estudiarem amb més detall la frontera en el cas dels grups lliures. Anirem més enllà del que hem fet per a un espai hiperbòlic general: primer identificarem la frontera d'un grup lliure amb el conjunt de paraules reduïdes infinites i hi definirem una mètrica més intuïtiva, equivalent a la mètrica construïda anteriorment. Després veurem que, afegint aquesta frontera al grup lliure F , l'espai $\widehat{F} := F \cup \partial F$ és compacte i que F és dens en $\widehat{F}$. Finalment, usarem aquesta compactificació per demostrar un resultat algebraic sobre els automorfismes de grups lliures finitament generats: el subgrup de punts fixos d'un automorfisme és finitament generat. Ens basarem principalment en [4], amb alguns ingredients de [3].

Al llarg d'aquesta subsecció, F denotarà un grup lliure finitament generat. Fixem una base A de F i identifiquem F amb $R(A)$, el conjunt de paraules reduïdes finites sobre $A^{\pm 1} := A \cup A^{-1}$, on A^{-1} denota el conjunt dels inversos formals dels elements de A . Recordem que la mètrica de la paraula en F ve donada per

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha^{-1}\beta|, \quad \alpha, \beta \in F,$$

on $|\alpha^{-1}\beta|$ denota la longitud de la paraula reduïda associada a $\alpha^{-1}\beta$.

Denotarem per $R_\infty(A)$ el conjunt de paraules reduïdes infinites sobre $A^{\pm 1}$, és a dir,

$$R_\infty(A) := \{w = w_1 w_2 w_3 \cdots \mid w_i \in A^{\pm 1} \text{ i } w_{i+1} \neq w_i^{-1} \text{ per a tot } i \geq 1\}.$$

Si $u \in R(A) \cup R_\infty(A)$, escriurem $|u|$ per denotar la seva longitud, amb el conveni que $|u| = \infty$ si $u \in R_\infty(A)$.

Si u és una paraula reduïda finita o infinita i $0 \leq i \leq |u|$, escriurem $\text{ini}(u, i)$ per denotar el prefix de i lletres de u . En particular, si $u = u_1 u_2 u_3 \dots$, aleshores

$$\text{ini}(u, i) = u_1 u_2 \dots u_i.$$

També escriurem $\text{ini}(u, 0)$ per denotar la paraula buida.

Donades dues paraules reduïdes finites o infinites $u, v \in R(A) \cup R_\infty(A)$, escriurem $u \wedge v$ per denotar el prefix comú més llarg de u i v . Observem que $|u \wedge v| = (u.v)_1$. Usarem ambdues notacions.

Finalment, si v és prefix de u , és a dir, si $u \wedge v = v$, escriurem $v \leq u$.

Proposició 3.3.24. *Sigui F un grup lliure finitament generat amb base A . Aleshores hi ha una bijecció natural*

$$\partial F \longleftrightarrow R_\infty(A).$$

Demostració. Treballarem respecte del punt base $1 \in F$. Definim primer una aplicació

$$\Psi: R_\infty(A) \longrightarrow \partial F.$$

Sigui $w = w_1 w_2 w_3 \dots \in R_\infty(A)$. Per a cada $i \geq 1$, considerem el prefix finit

$$\text{ini}(w, i) = w_1 w_2 \dots w_i \in F.$$

Com que w és una paraula reduïda infinita, cada $\text{ini}(w, i)$ és una paraula reduïda finita. A més, si $i, j \geq 1$, aleshores

$$(\text{ini}(w, i) \cdot \text{ini}(w, j))_1 = \min\{i, j\}.$$

D'aquí es dedueix que

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} (\text{ini}(w, i) \cdot \text{ini}(w, j))_1 = \infty.$$

Així, la successió $(\text{ini}(w, i))$ convergeix a l'infinit i defineix un punt de la frontera. Posem

$$\Psi(w) := [(\text{ini}(w, i))].$$

Definim ara una aplicació en sentit contrari

$$\Phi: \partial F \longrightarrow R_\infty(A).$$

Sigui $x \in \partial F$ i sigui $(u_i) \in x$ una successió representant. Com que (u_i) convergeix a l'infinit, per a cada $N \geq 1$ existeix $i_N \in \mathbb{N}$ tal que, si $i, j \geq i_N$, aleshores

$$(u_i \cdot u_j)_1 \geq N.$$

Com que $(u_i \cdot u_j)_1$ mesura la longitud del prefix comú més llarg de u_i i u_j , això implica que, per a $i, j \geq i_N$, les paraules u_i i u_j tenen el mateix prefix de longitud N .

Per tant, per a cada $N \geq 1$, podem definir una paraula reduïda finita de longitud N de la manera següent: triem qualsevol $i \geq i_N$ i posem

$$\text{ini}(w, N) := \text{ini}(u_i, N).$$

Aquesta definició no depèn de la tria de $i \geq i_N$, perquè totes les paraules u_i amb $i \geq i_N$ tenen el mateix prefix de longitud N .

A més, aquests prefixes són compatibles quan N varia. En efecte, si $M \leq N$, prenent i prou gran, el prefix de longitud M de $\text{ini}(u_i, N)$ coincideix amb $\text{ini}(u_i, M)$. Per tant, el prefix de longitud M de $\text{ini}(w, N)$ és $\text{ini}(w, M)$. Així obtenim una única paraula reduïda infinita

$$w = w_1 w_2 w_3 \cdots \in R_\infty(A).$$

Definim

$$\Phi(x) := w.$$

Cal veure que Φ està ben definida, és a dir, que no depèn de la successió representant escollida. Siguin (u_i) i (v_i) dues successions representants del mateix punt $x \in \partial F$. Siguin $w, w' \in R_\infty(A)$ les paraules infinites obtingudes a partir de (u_i) i (v_i) , respectivament. Com que $(u_i) \sim (v_i)$, tenim

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i \cdot v_i)_1 = \infty.$$

Fixem $N \geq 1$. Per a i prou gran, tenim

$$(u_i \cdot v_i)_1 \geq N.$$

Això vol dir que u_i i v_i tenen el mateix prefix de longitud N . A més, per la construcció de w i w' , per a i prou gran tenim

$$\text{ini}(w, N) = \text{ini}(u_i, N) \quad \text{i} \quad \text{ini}(w', N) = \text{ini}(v_i, N).$$

Per tant,

$$\text{ini}(w, N) = \text{ini}(w', N).$$

Com que això és cert per a tot $N \geq 1$, deduïm que $w = w'$. Així, Φ està ben definida. Vegem ara que Φ i Ψ són inverses una de l'altra. Sigui $w = w_1 w_2 w_3 \cdots \in R_\infty(A)$. Per definició,

$$\Psi(w) = [(\text{ini}(w, i))].$$

Si apliquem Φ a aquesta classe, per a cada $N \geq 1$ obtenim com a prefix de longitud N precisament

$$\text{ini}(w, N) = w_1 w_2 \cdots w_N.$$

Per tant,

$$\Phi(\Psi(w)) = w.$$

Així,

$$\Phi \circ \Psi = \text{id}_{R_\infty(A)}.$$

Recíprocament, sigui $x \in \partial F$ i sigui $(u_i) \in x$ una successió representant. Suposem que

$$\Phi(x) = w = w_1 w_2 w_3 \cdots.$$

Per definició de Ψ , tenim

$$\Psi(\Phi(x)) = [(\text{ini}(w, i))].$$

Hem de veure que aquesta classe coincideix amb x . Per fer-ho, n'hi ha prou de veure que les successions (u_i) i $(\text{ini}(w, i))$ són equivalents.

Fixem $N \geq 1$. Per la construcció de $w = \Phi(x)$, per a i prou gran tenim

$$\text{ini}(u_i, N) = \text{ini}(w, N).$$

D'altra banda, si $i \geq N$, aleshores

$$\text{ini}(\text{ini}(w, i), N) = \text{ini}(w, N).$$

Per tant, per a i prou gran,

$$(u_i \cdot \text{ini}(w, i))_1 \geq N.$$

Com que N era arbitrari, obtenim

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_i \cdot \text{ini}(w, i))_1 = \infty.$$

Així,

$$(u_i) \sim (\text{ini}(w, i)),$$

i per tant

$$\Psi(\Phi(x)) = x.$$

Hem provat que

$$\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\partial F}.$$

Així doncs, arribem a la conclusió que Φ i Ψ són aplicacions inverses. Per tant, hi ha una bijecció entre ∂F i $R_\infty(A)$. $\square$

A partir d'ara identificarem ∂F amb $R_\infty(A)$ mitjançant la bijecció anterior. Per tant, pensarem els punts de la frontera com a paraules reduïdes infinites.

Com que som en el cas 0-hiperbòlic, en el Corol·lari 3.3.22 podem prendre $\delta = 0$. La condició $a^{3\delta} \leq 2$ esdevé aleshores $1 \leq 2$, de manera que és certa per a tot $a > 1$. Fixarem $a = 2$ i considerarem l'aplicació

$$\begin{aligned} \rho: R_\infty(A) \times R_\infty(A) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (w, w') &\longmapsto 2^{-(w.w')_1}, \end{aligned}$$

on fem servir el conveni $2^{-\infty} = 0$.

A continuació veurem que, en aquest cas, ρ ja és una mètrica sobre $R_\infty(A) \cong \partial F$. Per tant, per l'Observació 3.3.20, la construcció en cadena no la modificarà.

Proposició 3.3.25. *Considerem l'aplicació*

$$\begin{aligned} \hat{\rho}: \hat{F} \times \hat{F} &\longrightarrow [0, \infty) \\ (u, v) &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u = v, \\ 2^{-|u \wedge v|} & \text{si } u \neq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Aleshores $\hat{\rho}$ és una mètrica en $\hat{F}$, i la seva restricció a ∂F coincideix amb ρ . En particular, ρ és una mètrica en ∂F i $d_\rho = \rho$.

Demostració. Primer veurem que $\hat{\rho}$ és una mètrica. És clar que $\hat{\rho}(u, v) \geq 0$ per a tot $u, v \in \hat{F}$. Per definició, si $u = v$, aleshores $\hat{\rho}(u, v) = 0$. Recíprocament, si $\hat{\rho}(u, v) = 0$, no podem tenir $u \neq v$, ja que en aquest cas $\hat{\rho}(u, v) = 2^{-|u \wedge v|} > 0$. Per tant, cal que $u = v$.

La simetria també és immediata, perquè $u \wedge v = v \wedge u$ per a tot $u, v \in \hat{F}$. Així,

$$\hat{\rho}(u, v) = \hat{\rho}(v, u).$$

Només queda provar la desigualtat triangular. De fet, provarem una desigualtat més forta: la desigualtat ultramètrica. Siguin $u, v, z \in \hat{F}$. Volem veure que

$$\hat{\rho}(u, v) \leq \max\{\hat{\rho}(u, z), \hat{\rho}(z, v)\}.$$

Si $u = v$, la desigualtat és immediata. Suposem, doncs, que $u \neq v$.

Sigui $m := \min\{|u \wedge z|, |z \wedge v|\}$. Aleshores u i z tenen el mateix prefix de longitud m , i z i v també tenen el mateix prefix de longitud m . Per tant, u i v tenen el mateix prefix de longitud m . Això implica que

$$|u \wedge v| \geq m = \min\{|u \wedge z|, |z \wedge v|\}.$$

Com que la funció $t \mapsto 2^{-t}$ és decreixent, obtenim

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(u, v) &= 2^{-|u \wedge v|} \\ &\leq 2^{-\min\{|u \wedge z|, |z \wedge v|\}} \\ &= \max\{2^{-|u \wedge z|}, 2^{-|z \wedge v|}\} \\ &= \max\{\widehat{\rho}(u, z), \widehat{\rho}(z, v)\}. \end{aligned}$$

En particular,

$$\widehat{\rho}(u, v) \leq \widehat{\rho}(u, z) + \widehat{\rho}(z, v).$$

Així, $\widehat{\rho}$ és una mètrica en $\widehat{F}$. De fet, és una ultramètrica.

Vegem ara que la restricció de $\widehat{\rho}$ a $\partial F \times \partial F$ coincideix amb ρ . Siguin $w, w' \in \partial F$, que identifiquem amb paraules reduïdes infinites. Si $w = w'$, aleshores

$$\widehat{\rho}(w, w') = 0 = \rho(w, w').$$

Si $w \neq w'$, aleshores $w \wedge w'$ és el prefix comú més llarg de w i w' , i per tant

$$|w \wedge w'| = (w.w')_1.$$

Així,

$$\widehat{\rho}(w, w') = 2^{-|w \wedge w'|} = 2^{-(w.w')_1} = \rho(w, w').$$

Per tant, $\widehat{\rho}|_{\partial F \times \partial F} = \rho$. En particular, ρ és una mètrica en ∂F i, per l'Observació 3.3.20, $d_\rho = \rho$. $\square$

En alguns punts escriurem $x_i \longrightarrow x$ per indicar que la successió (x_i) convergeix cap a x , és a dir, que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$.

Proposició 3.3.26. *Amb la mètrica $\widehat{\rho}$, el subespai F és dens en $\widehat{F}$ i $\widehat{F}$ és compacte.*

Demostració. Vegem primer que F és dens en $\widehat{F}$. Volem provar que tot element de $\widehat{F}$ és límit d'una successió d'elements de F .

Sigui $\alpha \in \widehat{F}$. Si $\alpha \in F$, aleshores α és límit d'elements de F , ja que la successió constant

$$\alpha, \alpha, \alpha, \dots$$

és una successió d'elements de F que convergeix a α .

Suposem ara que $\alpha \in \partial F$. Mitjançant la identificació de ∂F amb $R_\infty(A)$, podem escriure

$$\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots, \quad a_i \in A^{\pm 1},$$

amb $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ per a tot $i \geq 1$. Per a cada $i \geq 1$, definim

$$\alpha_i := \text{ini}(\alpha, i) = a_1 a_2 \dots a_i.$$

Aleshores α_i és una paraula reduïda finita i, per tant, $\alpha_i \in F$. A més, com que α_i és el prefix de α de longitud i , tenim

$$\alpha_i \wedge \alpha = \alpha_i,$$

i per tant

$$|\alpha_i \wedge \alpha| = i.$$

Com que $\alpha_i \neq \alpha$, per la definició de $\widehat{\rho}$, obtenim

$$\widehat{\rho}(\alpha_i, \alpha) = 2^{-|\alpha_i \wedge \alpha|} = 2^{-i}.$$

Per tant,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{\rho}(\alpha_i, \alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} 2^{-i} = 0.$$

Això demostra que $\widehat{\rho}(\alpha_i, \alpha) \rightarrow 0$. Per tant, $\alpha_i \rightarrow \alpha$ en $\widehat{F}$. Així, F és dens en $\widehat{F}$.

Vegem ara que $\widehat{F}$ és compacte. Com que $\widehat{F}$ és un espai mètric, n'hi ha prou de veure que és seqüencialment compacte, és a dir, que tota successió d'elements de $\widehat{F}$ admet una subsuccessió convergent.

Sigui (w_n) una successió d'elements de $\widehat{F}$. Recordem que, si $w_n \in \partial F$, aleshores $|w_n| = \infty$. Distingirem dos casos.

Suposem primer que existeix $L \geq 1$ tal que, per a tot $n_0 \in \mathbb{N}$, existeix $n \geq n_0$ amb

$$|w_n| < L.$$

Això vol dir que hi ha infinits termes de la successió amb longitud menor que L . Per tant, podem extreure una subsuccessió formada només per paraules de longitud menor que L . Per no carregar la notació, tornem a denotar aquesta subsuccessió per (w_n) .

Com que $A^\pm$ és finit, només hi ha un nombre finit de paraules reduïdes de longitud menor que L . Però la successió (w_n) té infinits termes. Per tant, alguna paraula reduïda finita apareix infinites vegades. Diguem-ne w . Així, podem extreure una subsuccessió constant

$$w_{n_k} = w \quad \text{per a tot } k.$$

Aquesta subsuccessió convergeix clarament a w .

Suposem ara que no passa el cas anterior. Aleshores, per a tot $L \geq 1$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, aleshores

$$|w_n| \geq L.$$

És a dir, les longituds dels termes de la successió tendeixen a infinit. Distingirem dos subcasos.

Suposem primer que hi ha infinits termes de la successió que tenen longitud infinita, és a dir, que pertanyen a ∂F . Aleshores podem extreure una subsuccessió formada només per paraules reduïdes infinites. De nou, per simplicitat, la denotem per (w_n) .

Com que $A^{\pm 1}$ és finit, existeix una lletra $a_1 \in A^{\pm 1}$ tal que infinits termes de (w_n) comencen per a_1 . En prenem una subsuccessió. Dins d'aquesta subsuccessió, torna a haver-hi un nombre finit de possibilitats per a la segona lletra; per tant, podem extreure una nova subsuccessió tots els termes de la qual comencen pel mateix prefix reduït de longitud 2, $a_1 a_2$. Repetint aquest procés, per a cada $m \geq 1$ obtenim una subsuccessió $(w_n^{(m)})$ tal que tots els seus termes comencen pel mateix prefix reduït de longitud m , $a_1 a_2 \cdots a_m$, i de manera que $(w_n^{(m+1)})$ és una subsuccessió de $(w_n^{(m)})$.

Cada prefix prolonga l'anterior. A més, com que cada prefix apareix com a prefix d'una paraula reduïda, tenim

$$a_{j+1} \neq a_j^{-1} \quad \text{per a tot } j \geq 1.$$

Per tant, determinen una paraula reduïda infinita

$$w = a_1 a_2 a_3 \cdots \in R_\infty(A) \subseteq \widehat{F}.$$

Prenem ara la subsuccessió diagonal

$$\Omega_k := w_k^{(k)}.$$

Aquesta és una subsuccessió de la successió original. A més, si fixem $m \geq 1$ i prenem $k \geq m$, aleshores Ω_k pertany a la subsuccessió $(w_n^{(m)})$. Per tant, Ω_k i w tenen el mateix prefix de longitud m , i així

$$|\Omega_k \wedge w| \geq m.$$

D'aquí obtenim

$$\hat{\rho}(\Omega_k, w) \leq 2^{-m} \quad \text{per a tot } k \geq m.$$

Com que m és arbitrari, deduïm que $\hat{\rho}(\Omega_k, w) \rightarrow 0$. Així, $\Omega_k \rightarrow w$ en $\hat{F}$.

Ens queda el cas en què només hi ha un nombre finit de termes de longitud infinita. Eliminant aquests termes, podem suposar que tots els w_n són paraules reduïdes finites, és a dir, que $w_n \in F$ per a tot n . Com que les longituds tendeixen a infinit, podem extreure una subsuccessió, que tornem a denotar per (w_n) , tal que

$$|w_n| < |w_{n+1}| \quad \text{per a tot } n.$$

Ara repetim el mateix argument diagonal. Com que $|w_n| \rightarrow \infty$, a partir d'un cert índex totes les paraules tenen almenys una lletra. Com que $A^{\pm 1}$ és finit, existeix una lletra $a_1 \in A^{\pm 1}$ tal que infinits termes de la successió comencen per a_1 . En prenem una subsuccessió. Dins d'aquesta subsuccessió, a partir d'un cert índex totes les paraules tenen longitud almenys 2, i torna a haver-hi un nombre finit de possibilitats per a la segona lletra. Per tant, podem extreure una nova subsuccessió tots els termes de la qual comencen pel mateix prefix reduït de longitud 2, $a_1 a_2$. Continuant inductivament, per a cada $m \geq 1$ obtenim una subsuccessió $(w_n^{(m)})$ tal que tots els seus termes comencen pel mateix prefix reduït de longitud m , $a_1 a_2 \cdots a_m$, i tal que $(w_n^{(m+1)})$ és una subsuccessió de $(w_n^{(m)})$. A partir d'aquí, l'argument segueix com en el subcas anterior.

En tots els casos hem trobat una subsuccessió convergent. Així, tota successió d'elements de $\hat{F}$ admet una subsuccessió convergent. Per tant, $\hat{F}$ és compacte. $\square$

Un cop descrita la compactificació $\hat{F} = F \cup \partial F$, transitarem cap a una aplicació algebraica: veurem que la frontera d'un grup lliure serveix com a eina per demostrar que el subgrup de punts fixos d'un automorfisme d'un grup lliure finitament generat és finitament generat. A partir d'ara fixem un automorfisme f del grup lliure finitament generat F .

Definició 3.3.27. Definim la *mida* de f respecte de A com

$$S_A(f) := \max_{a \in A} \{|f(a)|, |f^{-1}(a)|\}.$$

Observació 3.3.28. Sigui $S := S_A(f)$. Llavors per a tot $\gamma \in F$ es compleix

$$|f(\gamma)| \geq \frac{|\gamma|}{S}.$$

Demostració. En efecte, si escrivim la paraula reduïda $f(\gamma)$ com $f(\gamma) = b_1 \cdots b_k$, amb $b_i \in A^{\pm 1}$, aleshores

$$\gamma = f^{-1}(b_1) \cdots f^{-1}(b_k).$$

Com que, per definició de S , tenim $|f^{-1}(b_i)| \leq S$ per a tot i , deduïm que

$$|\gamma| = |f^{-1}(f(\gamma))| \leq \sum_{i=1}^k |f^{-1}(b_i)| \leq Sk = S|f(\gamma)|.$$

Per tant, $|f(\gamma)| \geq \frac{|\gamma|}{S}$. $\square$

Proposició 3.3.29. *Sigui F un grup lliure finitament generat amb base A , i sigui f un automorfisme de F . Aleshores existeix un únic homeomorfisme*

$$\widehat{f}: \widehat{F} \longrightarrow \widehat{F}$$

tal que $\widehat{f}|_F = f$.

Demostració. Escriurem $S := S_A(f)$. A continuació definirem l'extensió de f a $\widehat{F}$. Si $\alpha \in F$, posem simplement $\widehat{f}(\alpha) := f(\alpha)$. Suposem ara que $\alpha \in \partial F$. Identificant ∂F amb el conjunt de paraules reduïdes infinites, escrivim $\alpha = a_1 a_2 a_3 \cdots$.

Per a cada $p \geq 1$, posem

$$\alpha_p := \text{ini}(\alpha, p) = a_1 \cdots a_p.$$

Volem veure que la successió $(f(\alpha_p))$ convergeix en $\widehat{F}$.

Per a cada $p \geq 1$, sigui

$$m_p := \left\lfloor \frac{p}{S} \right\rfloor.$$

Com que $|\alpha_p| = p$, per l'Observació 3.3.28 tenim

$$|f(\alpha_p)| \geq \frac{p}{S} \geq m_p.$$

D'altra banda,

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p a_{p+1},$$

i per tant

$$f(\alpha_{p+1}) = f(\alpha_p) f(a_{p+1}),$$

entenent que després cal reduir la paraula. Ara bé, com que $|f(a_{p+1})| \leq S$, en passar de $f(\alpha_p)$ a $f(\alpha_{p+1})$ només es poden cancel·lar, com a màxim, les darreres S lletres de $f(\alpha_p)$. Així, si

$$\ell_p := m_p - S,$$

aleshores, sempre que $\ell_p \geq 0$, el prefix de longitud ℓ_p de $f(\alpha_{p+1})$ coincideix amb el prefix de longitud ℓ_p de $f(\alpha_p)$:

$$\text{ini}(f(\alpha_{p+1}), \ell_p) = \text{ini}(f(\alpha_p), \ell_p).$$

El mateix argument, aplicat successivament, mostra que per a tot $t \geq 0$ es té

$$\text{ini}(f(\alpha_{p+t}), \ell_p) = \text{ini}(f(\alpha_p), \ell_p),$$

sempre que $\ell_p \geq 0$. En altres paraules, un cop fixat p , el prefix de longitud ℓ_p de les paraules $f(\alpha_q)$ ja no canvia per a $q \geq p$.

Com que

$$\ell_p = \left\lfloor \frac{p}{S} \right\rfloor - S \longrightarrow \infty$$

quan $p \rightarrow \infty$, això implica que, per a cada $N \geq 1$, existeix p_0 tal que, si $q, q' \geq p_0$, aleshores les paraules $f(\alpha_q)$ i $f(\alpha_{q'})$ tenen el mateix prefix de longitud N . Per tant, la successió $(f(\alpha_p))$ convergeix a una paraula reduïda infinita. Definim

$$\widehat{f}(\alpha) := \lim_{p \rightarrow \infty} f(\alpha_p).$$

Així hem definit una aplicació

$$\widehat{f}: \widehat{F} \longrightarrow \widehat{F}$$

que coincideix amb f sobre F .

Vegem ara que $\widehat{f}$ és contínua. Sigui $N \geq 1$. Triem p prou gran perquè

$$\left\lfloor \frac{p}{S} \right\rfloor - S \geq N.$$

Si $\alpha, \beta \in \widehat{F}$ tenen un prefix comú de longitud p , aleshores l'argument anterior mostra que $\widehat{f}(\alpha)$ i $\widehat{f}(\beta)$ tenen un prefix comú de longitud almenys N . Per tant,

$$|\widehat{f}(\alpha) \wedge \widehat{f}(\beta)| \geq N,$$

i, en conseqüència,

$$\widehat{\rho}(\widehat{f}(\alpha), \widehat{f}(\beta)) \leq 2^{-N}.$$

Com que podem fer N tan gran com vulguem prenent p prou gran, deduïm que $\widehat{f}$ és contínua.

Apliquem ara la mateixa construcció a l'automorfisme invers f^{-1} . Obtenim una aplicació contínua

$$\widehat{f^{-1}}: \widehat{F} \longrightarrow \widehat{F}$$

que estén f^{-1} . Volem veure que aquesta aplicació és la inversa de $\widehat{f}$.

Considerem, per exemple, la composició

$$\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f}.$$

Aquesta aplicació és contínua i coincideix amb la identitat sobre F . Com que F és dens en $\widehat{F}$, si $\alpha \in \widehat{F}$ podem prendre una successió (α_i) d'elements de F tal que

$$\alpha_i \longrightarrow \alpha.$$

Aleshores, per continuïtat,

$$(\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f})(\alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f})(\alpha_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \alpha.$$

Per tant,

$$\widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f} = \text{id}_{\widehat{F}}.$$

De la mateixa manera,

$$\widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}} = \text{id}_{\widehat{F}}.$$

Així, $\widehat{f}$ és bijectiva, contínua i amb inversa contínua. Per tant, $\widehat{f}$ és un homeomorfisme. Finalment, vegem que l'extensió és única. Sigui $\widehat{g}: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ un altre homeomorfisme tal que $\widehat{g}|_F = f$. Si $\alpha \in \widehat{F}$, prenem una successió (α_i) d'elements de F tal que $\alpha_i \rightarrow \alpha$. Aleshores

$$\widehat{g}(\alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{g}(\alpha_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(\alpha_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{f}(\alpha_i) = \widehat{f}(\alpha).$$

Per tant, $\widehat{g} = \widehat{f}$. Així, l'extensió és única. □

Lema 3.3.30 (Bounded Cancellation Lemma). *Sigui F un grup lliure finitament generat. Donat un automorfisme $f: F \rightarrow F$, existeix $C(f) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ i $|\alpha_1 \alpha_2| = |\alpha_1| + |\alpha_2|$, llavors*

$$|f(\alpha_1 \alpha_2)| \geq |f(\alpha_1)| + |f(\alpha_2)| - 2C(f).$$

Demostració. Escriurem $\bar{\alpha}$ per denotar la paraula reduïda que representa α^{-1} . Recordem primer que, si $\beta, \gamma \in F$, la quantitat de cancel·lació que apareix en el producte $\beta\gamma$ és exactament la longitud del prefix comú més llarg de $\bar{\beta}$ i γ . Per tant,

$$|\beta| + |\gamma| - |\beta\gamma| = 2|\bar{\beta} \wedge \gamma|.$$

Aplicant això a

$$\beta = f(\alpha_1), \quad \gamma = f(\alpha_2),$$

i usant que

$$\overline{f(\alpha_1)} = f(\bar{\alpha}_1),$$

obtenim

$$\begin{aligned} |f(\alpha_1)| + |f(\alpha_2)| - |f(\alpha_1\alpha_2)| &= 2|\overline{f(\alpha_1)} \wedge f(\alpha_2)| \\ &= 2|f(\bar{\alpha}_1) \wedge f(\alpha_2)|. \end{aligned}$$

Per tant, n'hi ha prou de veure que la quantitat

$$|f(\bar{\alpha}_1) \wedge f(\alpha_2)|$$

està uniformement acotada quan el producte $\alpha_1\alpha_2$ no té cancel·lació.

Com que per la Proposició 3.3.29 f s'estén a un homeomorfisme de $\widehat{F}$, també f^{-1} és contínua en $\widehat{F}$. A més, com que $\widehat{F}$ és compacte, f^{-1} és uniformement contínua. Així, aplicant la continuïtat uniforme amb $\varepsilon = 1$, existeix $\eta > 0$ tal que si $u, v \in \widehat{F}$ satisfan

$$\widehat{\rho}(u, v) < \eta,$$

aleshores

$$\widehat{\rho}(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) < 1.$$

Triem $N \in \mathbb{N}$ prou gran perquè

$$2^{-N} < \eta.$$

Afirmem que aquest N acota la cancel·lació anterior. Suposem, per contradicció, que

$$|f(\bar{\alpha}_1) \wedge f(\alpha_2)| > N.$$

Aleshores

$$\widehat{\rho}(f(\bar{\alpha}_1), f(\alpha_2)) = 2^{-|f(\bar{\alpha}_1) \wedge f(\alpha_2)|} < 2^{-N} < \eta.$$

Per la tria de η , obtenim

$$\widehat{\rho}(\bar{\alpha}_1, \alpha_2) = \widehat{\rho}(f^{-1}(f(\bar{\alpha}_1)), f^{-1}(f(\alpha_2))) < 1.$$

Això implica que $\bar{\alpha}_1$ i α_2 tenen un prefix comú no trivial, és a dir,

$$|\bar{\alpha}_1 \wedge \alpha_2| \geq 1.$$

Però això vol dir precisament que en el producte $\alpha_1\alpha_2$ hi ha cancel·lació, contradient la hipòtesi

$$|\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

Per tant,

$$|f(\bar{\alpha}_1) \wedge f(\alpha_2)| \leq N.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} |f(\alpha_1\alpha_2)| &= |f(\alpha_1)| + |f(\alpha_2)| - 2|f(\bar{\alpha}_1) \wedge f(\alpha_2)| \\ &\geq |f(\alpha_1)| + |f(\alpha_2)| - 2N. \end{aligned}$$

Així, prenent $C(f) := N$, obtenim la desigualtat desitjada. $\square$

Definició 3.3.31. En les condicions del Lema 3.3.30, $C(f)$ s'anomena *fitxa de cancel·lació* de f .

Corol·lari 3.3.32. Donats $\alpha \in \widehat{F}$ i $\alpha' \in F$ amb $\alpha' \leq \alpha$, existeix $\beta \in F$ tal que

$$|\beta| \leq C(f) \quad i \quad f(\alpha')\beta \leq f(\alpha).$$

Demostració. Com que $\alpha' \leq \alpha$, podem escriure $\alpha = \alpha'\gamma$, on γ és una paraula reduïda finita o infinita, i el producte $\alpha'\gamma$ és reduït. Si γ és la paraula buida, aleshores $\alpha = \alpha'$ i n'hi ha prou de prendre $\beta = 1$. Suposem, doncs, que γ no és buida.

En aplicar f , pot aparèixer cancel·lació entre el final de $f(\alpha')$ i el principi de la imatge dels tros que segueix a α' . L'objectiu és veure que es pot corregir aquesta cancel·lació afegint només una paraula curta al final de $f(\alpha')$.

Primer suposem que $\gamma \in F$. Com que $\alpha'\gamma$ és un producte reduït, tenim

$$|\alpha'\gamma| = |\alpha'| + |\gamma|.$$

Pel Lema 3.3.30,

$$|f(\alpha'\gamma)| \geq |f(\alpha')| + |f(\gamma)| - 2C(f).$$

D'altra banda, si en reduir la concatenació $f(\alpha')f(\gamma)$ es cancel·len exactament r lletres del final de $f(\alpha')$ amb r lletres del principi de $f(\gamma)$, aleshores

$$|f(\alpha'\gamma)| = |f(\alpha')| + |f(\gamma)| - 2r.$$

Comparant les dues desigualtats anteriors, obtenim

$$2r \leq 2C(f),$$

i per tant

$$r \leq C(f).$$

Sigui p la part de $f(\alpha')$ que sobreviu després d'aquesta cancel·lació, i sigui η el tros final de $f(\alpha')$ que es cancel·la. Així podem escriure

$$f(\alpha') = p\eta, \quad |\eta| = r \leq C(f).$$

En reduir $f(\alpha')f(\gamma)$, el tros η desapareix i el resultat comença per p . Per tant,

$$p \leq f(\alpha'\gamma) = f(\alpha).$$

Ara definim $\beta := \eta^{-1}$. Aleshores $|\beta| = |\eta| \leq C(f)$, i, com que $f(\alpha') = p\eta$, tenim

$$f(\alpha')\beta = p\eta\eta^{-1} = p \leq f(\alpha).$$

Si γ és infinita, apliquem el raonament anterior als prefixes finits

$$\gamma_i := \text{ini}(\gamma, i).$$

Per a cada i , el producte $\alpha'\gamma_i$ és reduït. Per tant, en reduir $f(\alpha')f(\gamma_i)$ es cancel·len com a màxim $C(f)$ lletres del final de $f(\alpha')$.

Com que només hi ha un nombre finit de sufixos de $f(\alpha')$ de longitud menor o igual que $C(f)$, podem passar a una subsuccessió i, renomenant-la si cal, suposar que el tros de $f(\alpha')$ que es cancel·la és sempre el mateix, diguem-ne η . Escrivem

$$f(\alpha') = p\eta, \quad |\eta| \leq C(f).$$

Aleshores, per a tots els i de la subsuccessió, el prefix de $f(\alpha'\gamma_i)$ que prové de $f(\alpha')$ és precisament p .

Com que $\alpha'\gamma_i \rightarrow \alpha'\gamma = \alpha$ en $\widehat{F}$, i f és contínua en $\widehat{F}$, tenim

$$f(\alpha'\gamma_i) \rightarrow f(\alpha).$$

Per tant, el prefix finit p també és prefix de $f(\alpha)$, és a dir, $p \leq f(\alpha)$.

Definint de nou $\beta := \eta^{-1}$, obtenim

$$|\beta| = |\eta| \leq C(f) \quad \text{i} \quad f(\alpha')\beta = p\eta\eta^{-1} = p \leq f(\alpha). \quad \square$$

Lema 3.3.33. *Donats $\alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{F}$, suposem que $\alpha_1 \leq f(\alpha_1)$ i $\alpha_2 \leq f(\alpha_2)$. Sigui $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$. Llavors existeix $\beta \in F$ tal que $f(\alpha) = \alpha\beta$, amb $|\beta| \leq (2+S(f)) \max\{C(f), C(f^{-1})\}$.*

Demostració. Posem $M := \max\{C(f), C(f^{-1})\}$.

Si α és infinita, aleshores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Com que $\alpha \leq f(\alpha)$ i totes dues són paraules infinites, necessàriament $f(\alpha) = \alpha$, i podem prendre $\beta = 1$. Suposem, doncs, que $\alpha \in F$. Com que $\alpha \leq \alpha_i$ per a $i \in \{1, 2\}$, podem aplicar el Corol·lari 3.3.32. Així, per a cada $i \in \{1, 2\}$ existeix $\gamma_i \in F$ tal que

$$|\gamma_i| \leq C(f) \quad \text{i} \quad f(\alpha)\gamma_i \leq f(\alpha_i).$$

Definim $k := |f(\alpha)| - |\alpha|$. Aquest nombre mesura quant varia la longitud de α en aplicar f . Pot ser negatiu, ja que $f(\alpha)$ pot ser més curta que α després de reduir la paraula. El que veurem és que aquesta disminució de longitud no pot ser arbitràriament gran: més endavant obtindrem una cota inferior uniforme per a k . Fixem $i \in \{1, 2\}$. Com que

$$f(\alpha)\gamma_i \leq f(\alpha_i) \quad \text{i} \quad \alpha_i \leq f(\alpha_i),$$

les paraules $f(\alpha)\gamma_i$ i α_i són prefixos de la mateixa paraula $f(\alpha_i)$. En concatenar $f(\alpha)$ i γ_i , només es poden perdre, per cancel·lació, com a màxim $|\gamma_i|$ lletres del final de $f(\alpha)$. Per tant, $f(\alpha)$ i α_i tenen un prefix comú de longitud almenys $|f(\alpha)| - |\gamma_i|$. És a dir,

$$|f(\alpha) \wedge \alpha_i| \geq |f(\alpha)| - |\gamma_i| \geq |f(\alpha)| - C(f).$$

Ara bé, si una paraula és prefix comú de $f(\alpha)$ amb α_1 i també amb α_2 , aleshores és prefix comú de α_1 i α_2 . Per tant,

$$\min_{i \in \{1, 2\}} |f(\alpha) \wedge \alpha_i| \leq |\alpha_1 \wedge \alpha_2| = |\alpha|.$$

Així,

$$|\alpha| \geq \min_{i \in \{1, 2\}} |f(\alpha) \wedge \alpha_i| \geq |f(\alpha)| - C(f) = |\alpha| + k - C(f).$$

D'aquí obtenim

$$k \leq C(f) \leq M.$$

Ara volem obtenir una cota inferior per a k . Escrivim $\alpha_i = \alpha\delta_i$ per a $i \in \{1, 2\}$.

Com que $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, els sufixos δ_1 i δ_2 no tenen cap prefix comú no trivial, és a dir,

$$\delta_1 \wedge \delta_2 = 1.$$

Com que $\alpha_i \leq f(\alpha_i)$ per a $i \in \{1, 2\}$, les paraules $f(\alpha_1)$ i $f(\alpha_2)$ tenen almenys α com a prefix comú. Per tant,

$$|\alpha| \leq |f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)|.$$

D'altra banda,

$$f(\alpha_i) = f(\alpha)f(\delta_i), \quad i \in \{1, 2\},$$

entenent sempre els productes reduïts. Per tant,

$$|f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2)| \leq |f(\alpha)| + |f(\delta_1) \wedge f(\delta_2)|.$$

Si posem

$$q := f(\delta_1) \wedge f(\delta_2),$$

obtenim

$$|\alpha| \leq |f(\alpha)| + |q|,$$

de manera que

$$|q| \geq |\alpha| - |f(\alpha)| = -k.$$

Ara apliquem el Corol·lari 3.3.32 a l'automorfisme f^{-1} . Com que $q \leq f(\delta_i)$ per a $i \in \{1, 2\}$, existeix $\varepsilon_i \in F$ tal que

$$|\varepsilon_i| \leq C(f^{-1}) \quad \text{i} \quad f^{-1}(q)\varepsilon_i \leq \delta_i.$$

Per tant, per a $i \in \{1, 2\}$, la paraula δ_i té com a prefix la part de $f^{-1}(q)$ que sobreui després de concatenar amb ε_i . Aquesta part té longitud almenys $|f^{-1}(q)| - C(f^{-1})$.

Com que $\delta_1 \wedge \delta_2 = 1$, aquesta longitud no pot ser positiva. Per tant,

$$|f^{-1}(q)| \leq C(f^{-1}).$$

Usant la definició de $S(f)$, tenim

$$|q| = |f(f^{-1}(q))| \leq S(f)|f^{-1}(q)| \leq S(f)C(f^{-1}) \leq S(f)M.$$

Com que $|q| \geq -k$, deduïm que

$$-k \leq S(f)M.$$

Juntament amb $k \leq M$, això dona

$$|k| \leq S(f)M.$$

Finalment construïm β . Per a $i = 1$, tenim

$$f(\alpha)\gamma_1 \leq f(\alpha_1) \quad \text{i} \quad \alpha \leq \alpha_1 \leq f(\alpha_1).$$

Així, $f(\alpha)\gamma_1$ i α són prefixos de la mateixa paraula $f(\alpha_1)$ i, per tant, un és prefix de l'altre. Posem $\omega := f(\alpha)\gamma_1$. Aleshores existeix una paraula $\beta' \in F$ tal que, segons quin dels dos prefixos sigui més llarg,

$$\omega\beta' = \alpha \quad \text{o bé} \quad \alpha\beta' = \omega.$$

A més,

$$|\beta'| = ||\omega| - |\alpha|| \leq ||f(\alpha)| - |\alpha|| + |\gamma_1| = |k| + |\gamma_1| \leq S(f)M + M = (S(f) + 1)M.$$

Si $\omega\beta' = \alpha$, aleshores $f(\alpha)\gamma_1\beta' = \alpha$, i per tant $f(\alpha) = \alpha(\gamma_1\beta')^{-1}$. En aquest cas posem

$$\beta := (\gamma_1\beta')^{-1}.$$

Si, en canvi, $\alpha\beta' = \omega$, aleshores $\alpha\beta' = f(\alpha)\gamma_1$, i per tant $f(\alpha) = \alpha\beta'\gamma_1^{-1}$. En aquest cas posem

$$\beta := \beta'\gamma_1^{-1}.$$

En qualsevol dels dos casos tenim

$$f(\alpha) = \alpha\beta$$

i

$$|\beta| \leq |\gamma_1| + |\beta'| \leq M + (S(f) + 1)M = (S(f) + 2)M.$$

Com que $M = \max\{C(f), C(f^{-1})\}$, això és exactament

$$|\beta| \leq (2 + S(f)) \max\{C(f), C(f^{-1})\}. \quad \square$$

Teorema 3.3.34. *El subgrup de punts fixos d'un automorfisme d'un grup lliure finitament generat és finitament generat.*

Demostració. Sigui F un grup lliure finitament generat i sigui f un automorfisme de F . Denotem per $\text{Fix}(f)$ el subgrup de punts de fixos de f , és a dir:

$$\text{Fix}(f) = \{\alpha \in F \mid f(\alpha) = \alpha\}.$$

Suposem, per contradicció, que $\text{Fix}(f)$ no és finitament generat. Com que tot subgrup d'un grup lliure és lliure (vegeu [5, Teorema 56]), podem triar una base infinita de $\text{Fix}(f)$, $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$. Construïm una nova base $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ de $\text{Fix}(f)$ de la manera següent. Posem $\beta_1 := \alpha_1$. Per a cada $n \geq 2$, triem β_n com un element de longitud mínima dins del conjunt

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle \alpha_n.$$

Aquesta substitució no canvia el subgrup generat, i per tant els elements $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ continuen formant una base de $\text{Fix}(f)$. En particular,

$$f(\beta_n) = \beta_n \quad \text{per a tot } n.$$

Com que $\widehat{F}$ és compacte, la successió (β_n) admet una subsuccessió convergent. Escrivem aquesta subsuccessió com

$$\beta_{n_i} \longrightarrow \gamma \in \widehat{F}.$$

Vegem que, de fet, $\gamma \in \partial F$. Suposem, per contradicció, que $\gamma \in F$. Com que $\beta_{n_i} \rightarrow \gamma$, per a i prou gran tenim $\widehat{\rho}(\beta_{n_i}, \gamma) < 2^{-(|\gamma|+1)}$. Ara bé, si $u \in \widehat{F}$ i $u \neq \gamma$, aleshores $|u \wedge \gamma| \leq |\gamma|$, i per tant $\widehat{\rho}(u, \gamma) \geq 2^{-|\gamma|}$. Així, l'única possibilitat és que $\beta_{n_i} = \gamma$ per a tot i prou gran. Això contradiu que els β_{n_i} són tots diferents. Per tant, $\gamma \notin F$ i deduïm que $\gamma \in \partial F$.

A més, com que f és contínua en $\widehat{F}$ i $f(\beta_{n_i}) = \beta_{n_i}$ per a tot i , tenim $f(\gamma) = \gamma$.

Passant a una subsuccessió si cal, podem suposar que els prefixes comuns amb γ són cada vegada més llargs. Definim

$$\delta_i := \beta_{n_i} \wedge \gamma.$$

Aleshores, si $i < j$, tenim

$$\delta_i \leq \delta_j \quad \text{i} \quad |\delta_i| < |\delta_j|.$$

Ara apliquem el Lema 3.3.33 a les paraules β_{n_i} i γ . En efecte, el podem aplicar: com que totes dues són fixes per f ,

$$\beta_{n_i} \leq f(\beta_{n_i}) \quad \text{i} \quad \gamma \leq f(\gamma).$$

Per tant, existeix una paraula $\varepsilon_i \in F$ tal que

$$f(\delta_i) = \delta_i \varepsilon_i \quad \text{i} \quad |\varepsilon_i| \leq M,$$

on M és una constant que només depèn de f . Però només hi ha un nombre finit de paraules de longitud menor o igual que M . Així doncs, existeixen $i < j$ tals que $\varepsilon_i = \varepsilon_j$. Definim $\eta := \delta_i \delta_j^{-1}$. Aleshores, $\eta \in \text{Fix}(f)$ ja que

$$f(\eta) = f(\delta_i \delta_j^{-1}) = f(\delta_i) f(\delta_j)^{-1} = \delta_i \varepsilon_i (\delta_j \varepsilon_j)^{-1} = \delta_i \varepsilon_i \varepsilon_j^{-1} \delta_j^{-1} = \delta_i \delta_j^{-1} = \eta.$$

Com que els α_i formen una base de $\text{Fix}(f)$, podem escriure η com una paraula reduïda en els α_i :

$$\eta = \alpha_{p_1}^{\pm 1} \alpha_{p_2}^{\pm 1} \cdots \alpha_{p_r}^{\pm 1}.$$

Posem $p := \max\{p_1, \dots, p_r\}$. Triem ara k prou gran perquè

$$n_k > \max\{p, j\}.$$

Aleshores

$$\eta \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n_k-1} \rangle.$$

Com que, per definició,

$$\beta_{n_k} \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n_k-1} \rangle \alpha_{n_k},$$

també tenim

$$\eta \beta_{n_k} \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n_k-1} \rangle \alpha_{n_k}.$$

Però β_{n_k} havia estat triat com un element de longitud mínima dins d'aquest conjunt, de manera que

$$|\beta_{n_k}| \leq |\eta \beta_{n_k}|.$$

D'altra banda, com que $j < k$, tenim

$$\delta_j \leq \delta_k \leq \beta_{n_k}$$

i podem escriure $\beta_{n_k} = \delta_j \sigma$, amb $\sigma \in F$. Així, $|\beta_{n_k}| \leq |\delta_j| + |\sigma|$. En multiplicar obtenim

$$\eta \beta_{n_k} = \delta_i \delta_j^{-1} \beta_{n_k} = \delta_i \delta_j^{-1} \delta_j \sigma = \delta_i \sigma.$$

Per tant,

$$|\eta \beta_{n_k}| \leq |\delta_i| + |\sigma|.$$

Com que $|\delta_i| < |\delta_j|$, obtenim

$$|\eta \beta_{n_k}| < |\beta_{n_k}|.$$

Això contradiu la minimalitat de β_{n_k} dins de

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n_k-1} \rangle \alpha_{n_k}.$$

Hem arribat a una contradicció. Per tant, $\text{Fix}(f)$ ha de ser finitament generat. $\square$

El Teorema 3.3.34 és un resultat clàssic de la teoria de grups lliures i admet diverses demostracions diferents, entre les quals hi ha la que hem presentat. Aquest resultat assegura que, si f és un automorfisme d'un grup lliure finitament generat, aleshores $\text{Fix}(f)$ és finitament generat. Aquest problema de finitud va ser resolt per Gersten (vegeu [7]), i Cooper en va donar posteriorment una demostració alternativa més breu usant arguments en la frontera (vegeu [4]), que és la línia que hem seguit en aquest treball.

Per a més informació sobre el context històric i els principals resultats al voltant dels subgrups fixos d'automorfismes i d'endomorfismes de grups lliures, vegeu [14].

Seguint aquesta direcció, hi ha un resultat significativament més fort i profund, conegut històricament com la conjectura de Scott.

Conjectura 3.3.35 (Scott, 1975). *Sigui $f: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ un automorfisme. Llavors*

$$\text{rang}(\text{Fix}(f)) \leq n.$$

Abans de la demostració completa d'aquesta conjectura, Dyer i Scott en van obtenir un cas particular important per a automorfismes d'ordre finit. En aquest cas, el seu resultat afirma que $\text{Fix}(f)$ no només satisfà la cota anterior, sinó que és un factor lliure de $\mathbb{F}_n$, és a dir, existeix un subgrup $K \leq \mathbb{F}_n$ tal que

$$\mathbb{F}_n \cong \text{Fix}(f) * K.$$

Aquesta condició implica, en particular, que el rang de $\text{Fix}(f)$ és com a màxim n (vegeu [6]).

Teorema 3.3.36 (Dyer–Scott, 1975). *Sigui $f: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ un automorfisme d'ordre finit. Llavors $\text{Fix}(f)$ és un factor lliure de $\mathbb{F}_n$. En particular,*

$$\text{rang}(\text{Fix}(f)) \leq n.$$

La conjectura de Scott va ser finalment demostrada en tota la seva generalitat per Bestvina i Handel (vegeu [2]).

Teorema 3.3.37 (Bestvina–Handel, 1992). *Sigui $f: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ un automorfisme. Llavors*

$$\text{rang}(\text{Fix}(f)) \leq n.$$

La demostració del Teorema 3.3.37, deguda a Bestvina i Handel, és molt més profunda que la que hem presentat aquí. L'article ocupa unes cinquanta pàgines als *Annals of Mathematics* i introdueix la teoria dels *train tracks* per a automorfismes de grups lliures. Aquesta teoria va obrir una via de recerca molt fructífera i ha estat fonamental en l'estudi posterior dels automorfismes de grups lliures.

Conclusions

Al llarg d'aquest treball hem introduït els grups hiperbòlics, una família de grups finitament generats que ocupa un lloc central dins la teoria geomètrica de grups. El seu interès prové, en part, del fet que exemplifiquen molt bé el pont entre l'àlgebra i la geometria: un grup, objecte inicialment algebraic, pot ser estudiat a través de l'espai mètric associat al seu graf de Cayley. En el cas dels grups hiperbòlics, aquesta relació es concreta en el fet que una propietat geomètrica d'aquest espai, la hiperbolicitat, esdevé una propietat intrínseca del grup.

El primer pas ha estat desenvolupar les eines mètriques necessàries per donar sentit a aquesta idea. Hem introduït les nocions de quasi-hiperbolicitat i d'hiperbolicitat, les quals són equivalents en espais mètrics geodèsics, i hem vist que la geometria a gran escala permet comparar espais mitjançant quasi-isometries. Aquest punt és essencial, perquè garanteix que la hiperbolicitat d'un grup no depèn del sistema finit de generadors escollit, sinó que és una propietat inherent al grup.

A continuació, hem estudiat els grups lliures, les presentacions de grups i els grafs de Cayley, que han servit com a model fonamental per entendre la definició de grup hiperbòlic. Els grups lliures apareixen com el cas més bàsic —i alhora més ric— d'aquesta teoria: els seus grafs de Cayley són arbres i, per tant, constitueixen exemples naturals d'espais 0-hiperbòlics. En aquest sentit, els grups hiperbòlics poden entendre's com una generalització geomètrica dels grups lliures.

Un cop definits els grups hiperbòlics, hem vist algunes de les moltes propietats que se'n coneixen. En particular, hem demostrat que els grups hiperbòlics tenen el problema de la paraula resoluble mitjançant l'algorisme de Dehn. Aquest resultat mostra clarament com una condició geomètrica sobre el graf de Cayley pot tenir conseqüències algebraiques concretes.

Finalment, hem introduït la frontera de Gromov, que permet associar a un espai hiperbòlic un objecte topològic que recull la seva geometria a l'infinit. En el cas dels grups lliures, aquesta frontera es pot descriure de manera especialment explícita mitjançant paraules reduïdes infinites. Aquesta construcció ens ha permès veure una aplicació a un resultat de naturalesa algebraica: el subgrup de punts fixos d'un automorfisme d'un grup lliure finitament generat és finitament generat.

Així, el recorregut del treball mostra la força del punt de vista geomètric en teoria de grups. Partint de nocions mètriques com geodèsiques, triangles primis i quasi-isometries, hem arribat a resultats sobre grups, problemes algorísmics i automorfismes. Aquesta interacció entre geometria, topologia i àlgebra és precisament una de les raons per les quals els grups hiperbòlics continuen sent un objecte d'estudi tan ric i rellevant.

Naturalment, el recorregut que hem seguit és només una de les moltes vies possibles d'entrada a la teoria dels grups hiperbòlics. Per raons d'abast i de temps, hem hagut de deixar de banda altres direccions igualment interessants, i hem prioritzat aquelles que permetien construir un fil conductor coherent: passar de la geometria dels espais mètrics a conseqüències algebraiques sobre els grups. Així, més que tancar el tema, aquest treball vol servir com a punt de partida per continuar explorant una teoria molt més àmplia.

Bibliografia

- [1] J. M. Alonso et al., “Notes on word hyperbolic groups,” a *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, É. Ghys, A. Haefliger i A. Verjovsky, ed., River Edge, NJ: World Scientific, 1991, pàg. 3-63.
- [2] M. Bestvina i M. Handel, “Train tracks and automorphisms of free groups,” *Annals of Mathematics*, vol. 135, núm. 1, pàg. 1-51, 1992. DOI: 10.2307/2946562.
- [3] A. Carvalho i P. V. Silva, *On fixed points and equalizers of injective endomorphisms of the free group at infinity*, 2026. DOI: 10.48550/arXiv.2604.01107. arXiv: 2604.01107 [math.GR].
- [4] D. Cooper, “Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets,” *Journal of Algebra*, vol. 111, núm. 2, pàg. 453-456, 1987. DOI: 10.1016/0021-8693(87)90229-8.
- [5] J. Delgado i E. Ventura, “Autòmats de Stallings, un camí d’anada i tornada,” *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 37, núm. 1, pàg. 5-59, 2022. DOI: 10.2436/20.2002.01.102.
- [6] J. L. Dyer i G. P. Scott, “Periodic automorphisms of free groups,” *Communications in Algebra*, vol. 3, núm. 3, pàg. 195-201, 1975. DOI: 10.1080/00927877508822042.
- [7] S. M. Gersten, “Fixed points of automorphisms of free groups,” *Advances in Mathematics*, vol. 64, núm. 1, pàg. 51-85, 1987. DOI: 10.1016/0001-8708(87)90004-1.
- [8] É. Ghys i P. de la Harpe, ed., *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, vol. 83, Progress in Mathematics, Boston, MA: Birkhäuser, 1990, ISBN: 978-0-8176-3508-4. DOI: 10.1007/978-1-4684-9167-8.
- [9] M. Gromov, “Hyperbolic groups,” a *Essays in Group Theory*, sèr. Mathematical Sciences Research Institute Publications, S. M. Gersten, ed., vol. 8, New York: Springer, 1987, pàg. 75-263. DOI: 10.1007/978-1-4613-9586-7_3.
- [10] G. Hyun, *Hyperbolicity and the word problem*, University of Chicago REU paper, 2013.
- [11] I. Kapovich i N. Benakli, “Boundaries of hyperbolic groups,” a *Combinatorial and Geometric Group Theory*, sèr. Contemporary Mathematics, vol. 296, Providence, RI: American Mathematical Society, 2002, pàg. 39-93. DOI: 10.1090/conm/296/05068.
- [12] C. Löh, *Geometric Group Theory: An Introduction* (Universitext). Cham: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-72254-2.
- [13] E. Stark, *Visual metrics on boundaries of hyperbolic spaces*, 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2506.10108. arXiv: 2506.10108 [math.GT].
- [14] E. Ventura, “Fixed subgroups in free groups: A survey,” a *Combinatorial and Geometric Group Theory*, sèr. Contemporary Mathematics, vol. 296, Providence, RI: American Mathematical Society, 2002, pàg. 231-255. DOI: 10.1090/conm/296/05077. adr.: <https://enric-ventura.staff.upc.edu/ventura/files/08t.pdf>.

