TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

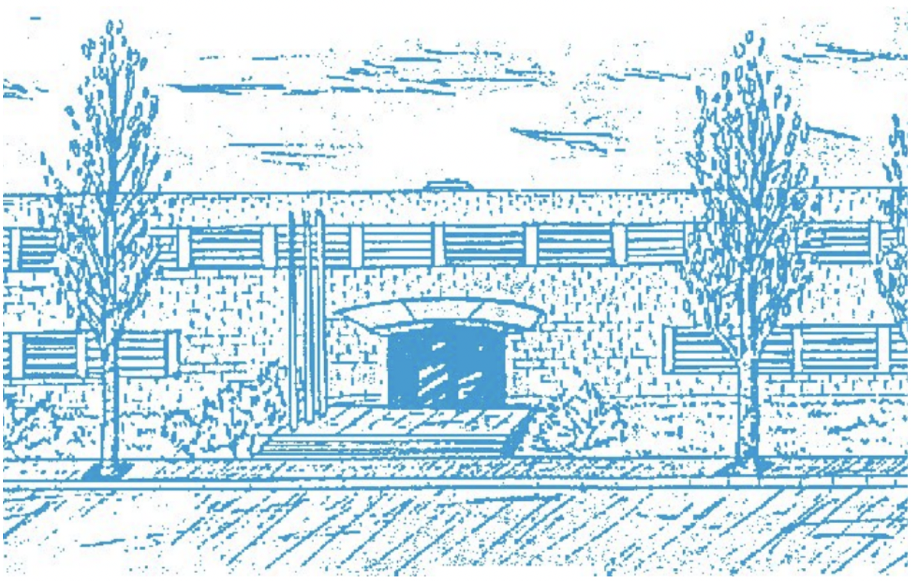
Títol: L'invariant BNS

Autor: Enaitz Quilez Mendez

Director: Enric Ventura Capell

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2022-2023 (Q1)



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball de Final de Grau

L'invariant BNS

Enaitz Quilez Mendez

Dirigit per

Enric Ventura Capell

Gener 2023

Agraïments

Primer, volia donar les gràcies al meu tutor, Enric Ventura, per ajudar-me durant tota la durada del treball i resoldre els dubtes que tenia.

Gràcies en especial al Javier per tenir sempre paciència aconsellant-me i per donar-me un cop de mà sempre que li demanava, i en general gràcies a tots els meus amics per deixar-me tants bons records del meu pas per la facultat.

Vull agrair, finalment, a la meva família el suport incondicional que m'han donat sempre.

Resum

El tema central d'aquest treball és l'invariant Bieri-Neuman-Streble (BNS) per grups finitament generats. Es tracta d'un concepte que relaciona l'àlgebra abstracta amb la geometria, ja que és un subconjunt obert de l'esfera unitària de $\mathbb{R}^n$, per una certa n relacionada amb el grup. El definirem en termes de la connectivitat de certs subgrafs de Cayley i estudiarem algunes de les seves propietats algebraiques.

També el relacionarem amb conceptes i resultats moderns d'indecidibilitat per a grups, concloent que no és possible decidir la pertinença o no d'un punt donat a l'invariant.

Paraules clau: teoria de grups, invariant BNS, graf de Cayley, caràcters, indecidibilitat.

Índex

Introducció

L'invariant Bieri-Neuman-Streble (BNS) d'un grup G finitament generat, presentat per primer cop l'any 1987 a [1], és un cert subconjunt obert de l'esfera de caràcters $S(G)$, l'esfera unitària de l'espai vectorial $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. En general, es tracta d'un invariant difícil de calcular. Un dels interessos darrere de l'estudi d'aquesta estructura és degut al fet que pot detectar si certs subgrups normals del grup inicial són també finitament generats, facilitant així el seu estudi.

L'objectiu d'aquest treball és entendre i estudiar l'invariant BNS i algunes de les seves propietats algebraiques, així com veure la seva relació amb diversos resultats sobre indecidibilitat de grups.

Hem fet servir principalment [7] pels dos primers capítols i [2] pel darrer capítol. Les referències [3], [4], [5] i [6] han servit per acabar de tenir tota la informació necessària per a les explicacions que volíem donar.

Aquest document està dividit en tres capítols.

En el primer capítol, fem un breu recull d'alguns resultats que hem vist al llarg de la carrera i continuem definint dos conceptes claus per la subseqüent definició de l'invariant BNS.

El segon capítol és on definim per primer cop l'invariant i el calculem per casos senzills. Un cop fet això, podem enunciar i demostrar dos dels resultats més importants del treball: la invariància respecte del sistema de generadors i una caracterització local de l'invariant. Aquests dos teoremes són la base per diversos resultats que també presentem, que desembocaran als continguts del següent capítol.

En el tercer i últim capítol fem un estudi de resultats sobre indecidibilitat i acabem presentant el teorema final del document. Aquest teorema confirma la nostra intuïció inicial sobre la difícil computació de l'invariant: no hi ha cap algoritme que decideixi si un punt racional pertany a l'invariant d'un grup finitament presentat.

Capítol 1

Preliminars

En aquesta secció fem un breu recull de tot el necessari per acabar definint el tema principal d'aquest document, l'invariant BNS.

Les referències que hem fet servir són l'article [7] i els llibres [3] i [5], part de la bibliografia recomanada de les assignatures de Matemàtica Discreta i Estructures Algebraiques, respectivament.

1.1 Propietats elementals de grups

Comencem donant resultats necessaris sobre grups i altres conceptes relacionats.

Definició 1.1.1. Un grup G és **finitament generat** (fg) si té algun subconjunt **finit** $S \subseteq G$ tal que tot $g \in G$ pot ser escrit com un producte finit d'elements de S i inversos d'aquests.

Notació. Si un subgrup H de G és normal, direm que $H \lhd G$.

Definició 1.1.2. Un grup G és **simple** si els seus únics subgrups normals són el subgrup trivial i ell mateix.

Definició 1.1.3. La **torsió d'un grup** G és el conjunt d'elements amb ordre finit, $T(G) = \{g \in G \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } g^n = 1\}$.

Proposició 1.1.4. *$T(G) \lhd G$ si el grup és abelià.*

Demostració. Siguin $g, h \in T(G)$, amb r_1 l'ordre de g i r_2 l'ordre d'h. Com que G és abelià, $(gh^{-1})^{r_1 r_2} = g^{r_1 r_2} h^{-r_1 r_2} = (g^{r_1})^{r_2} (h^{r_2})^{-r_1} = e^{r_2} e^{-r_1} = e \implies gh^{-1} \in T(G) \implies T(G)$ és subgrup.

El fet que sigui un subgrup normal és implicació directa de què G sigui abelià, ja que llavors $g^{-1}hg = h \; \forall \, g, h \in G$. Donat $u \in T(G)$, l'element $g^{-1}ug = u$ i, per tant, té ordre finit. □

Definició 1.1.5. El **centre d'un grup** G és el conjunt d'elements que commuten amb tots els altres, $\zeta(G) = \{z \in G \mid \forall \, g \in G \; zg = gz\}$. És fàcil veure que $\zeta(G) \lhd G$.

Definició 1.1.6. El **commutador d'un grup** G és el subgrup generat pels commutadors $[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$ d'elements del grup, $[G, G] = \langle [g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \mid g_1, g_2 \in G \rangle$.

Proposició 1.1.7. *$[G, G] \lhd G$.*

Demostració. Sigui $g \in G$ i $u \in [G, G]$, $g^{-1}ug = uu^{-1}(g^{-1}ug) = u(u^{-1}g^{-1}ug) = u[u, g] \in [G, G]$. □

Definició 1.1.8. L'abelianització de G és $G_{ab} = G/[G, G]$.

Proposició 1.1.9. *G_{ab} és un grup abelià i $N = [G, G]$ és el subgrup normal més petit tal que G/N és abelià.*

Demostració. Dos elements $\overline{g}, \overline{h} \in G_{ab}$ commuten $\iff$ $[\overline{g}, \overline{h}] = \overline{1}$ mòdul $[G, G]$. Però $[\overline{g}, \overline{h}] = \overline{g^{-1}} \cdot \overline{h^{-1}} \cdot \overline{g} \cdot \overline{h} = \overline{g^{-1}h^{-1}gh} = \overline{[g, h]} = \overline{1}$, doncs $[g, h] \in [G, G]$. És a dir, que $\forall \, \overline{g}, \overline{h} \in G_{ab}$, $[\overline{g}, \overline{h}] = \overline{1} \implies G_{ab}$ és abelià.

Per veure la segona part de la proposició, suposem N' un subgrup de G tal que $N' \lhd G$ i G/N' és abelià. Això últim implica que $abN' = baN' \iff a^{-1}b^{-1}abN' = N'$, que es pot traduir en el fet que $[G, G] \subseteq N'$, ja que N' conté tots els commutadors. Concloem que sempre que N' sigui normal i G/N' abelià, $[G, G] \subseteq N'$ i G/N' és un quocient de G abelianitzat, $G_{ab} \twoheadrightarrow G/N'$. □

Definició 1.1.10. Un grup G és **perfecte** si G_{ab} és trivial.

Òbviament, un grup trivial té abelianització trivial, però hi ha diversos grups perfectes no trivials. El més petit és el grup alternant A_5, que conté les permutacions senars de $\mathfrak{S}_5$.

De fet, qualsevol grup G simple no abelià és perfecte: G simple no abelià $\implies$ $[G, G] = 1$ ó G, però $G/[G, G] = G_{ab}$ és abelià i pot ser 1 ó G si el commutador val G ó 1 respectivament. Ara bé, G no és abelià, així que $G_{ab} = 1 \implies G$ perfecte.

Notació. Per un enter positiu n, $\mathbb{Z}_n$ és el grup cíclic d'ordre n: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Teorema 1.1.11 (**Teorema fonamental dels grups abelians finitament generats**). *Tot G abelià i fg és isomorf de manera única a $r \geq 0$ còpies del grup lliure infinit $\mathbb{Z}$, prenent $\mathbb{Z}^0 = 1$ com el grup trivial, i la suma directa de s grups de la forma $\mathbb{Z}_n$:*

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s},$$

de manera que:

- $n_i \geq 2 \; \forall \, i$,
- $n_i \mid n_{i+1}$ *per* $1 \leq i \leq s-1$.

*Direm que r és el **rang lliure** de G i $n_1, \ldots, n_s$ els **factors invariants** de G.*

En aquest document no presentarem la demostració d'aquest teorema, però es pot trobar en tot detall a la segona secció del segon capítol de [4].

1.2 El graf de Cayley

El **graf de Cayley** de G és imprescindible per la definició de l'invariant BNS. Per aquesta raó, n'exposem la definició i els resultats que necessitarem al llarg del treball.

Definició 1.2.1. Donat G un grup i S un subconjunt d'aquest, podem definir $\Gamma(G, S)$, el **graf de Cayley de G respecte** S. És un graf orientat i regular, definit per:

- els vèrtexs V són els elements de G,
- les arestes E corresponen a $G \times S$, per cada $g \in G$ i $s \in S$ tenim l'aresta (g, s) que connecta g amb gs,
- les funcions $\iota \colon E \to V$ i $\tau \colon E \to V$ són: $\iota\big((g,s)\big) = g$ i $\tau\big((g,s)\big) = gs$, donada una aresta ens diuen d'on surt i on arriba, respectivament.

Observació. Un graf dirigit *regular* és aquell on tots els vèrtexs tenen el mateix nombre d'arestes que hi arriben i arestes que en surten.

Aquesta definició implica que el graf de Cayley canvia en funció de S. D'aquest normalment es demana que sigui generador de G, tot i que Γ es pot construir igualment si no ho és. Tot i això, demostrarem que variar el conjunt de generadors respecte el que construim el graf de Cayley no modificarà l'invariant BNS que deduirem a partir del graf.

Ens centrarem en subconjunts generadors i finits, que existiran sempre perquè només tractarem amb grups finitament generats. També suposarem que S conté les inverses dels seus propis elements i, per tant, per cada $g \in G$ i $s \in S$ hi ha una aresta (g, s^{-1}), des de g a gs^{-1}. Encara que existeixin, farem l'abús de llenguatge de no esmentar-les ni dibuixar-les a les figures dels grafs de Cayley que exposarem més endavant.

Definició 1.2.2. Un **camí** p en un graf és una successió finita de n arestes $e_1 \cdots e_n$ tal que $\iota(e_{i+1}) = \tau(e_i)\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Notació. Per referir-nos a un *camí* p que connecti g i h mitjançant les arestes $e_1, \ldots, e_n$, farem servir $p = e_1 \cdots e_n$ o un parell (g, w), on w és una paraula en S tal que $w_i = s_i \iff e_i$ és l'aresta amb s_i a la segona coordenada.

Proposició 1.2.3. *Sigui S un subconjunt finit d'un grup G, $\Gamma(G, S)$ és connex $\iff$ S és generador de G.*

Demostració. Suposem que S genera G. Donats g_1 i g_2 dos elements de G, com que $g_1^{-1}g_2 \in G$, podem expressar-ho com a producte d'elements de S, $g_1^{-1}g_2 = s_1 s_2 \cdots s_n$. Així $g_1(s_1 s_2 \cdots s_n) = g_1(g_1^{-1}g_2) = g_2$ i tenim un camí entre els dos elements, que denotarem $(g_1, s_1 s_2 \cdots s_n)$ i podem observar a la Figura 1.1 $\implies \Gamma$ connex.

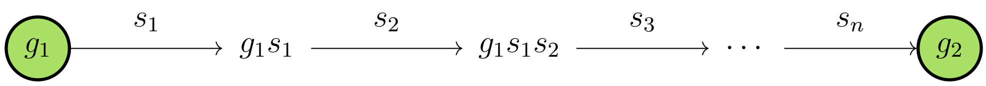


Figura 1.1: El camí $(g_1, s_1 s_2 \cdots s_n)$.

Per l'altra direcció, si Γ és connex, el camí que prenem des d'1 fins a qualsevol element de G, que podem escriure com $1 s_1 s_2 \cdots s_n = g$, ens proporciona una manera de representar g com un producte finit d'elements de S. $\square$

Exemples 1.2.4. Il·lustrem la definició del graf de Cayley amb un recull d'exemples:

a) Prenem $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ i el subconjunt $S = \{a = (1, 0),\ b = (0, 1)\}$, que òbviament genera el grup. A la Figura 1.2 veiem que el graf de Cayley $\Gamma(\mathbb{Z}^2, S)$ es pot visualitzar com una quadrícula euclidiana. Els vèrtexs són els punts (x, y) on x i y són enters. Operar amb el primer element de la base ens porta de (x, y) a $(x, y)a = (x, y) + (1, 0) = (x + 1, y)$, i són les arestes de color vermell. En canvi, les arestes ressaltades de color verd van de (x, y) a $(x, y)b = (x, y) + (0, 1) = (x, y+1)$ i corresponen a operar amb b. La commutativitat de $\mathbb{Z}^2$ ($ba = ab$) queda reflectida geomètricament en el fet que cada punt (x, y) és vèrtex d'un quadrat amb vèrtexs $(x, y), (x, y)a, (x, y)b$ i $(x, y)ab$.

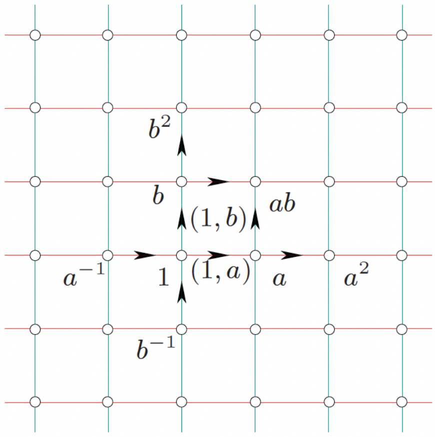


Figura 1.2: El graf de Cayley de $\mathbb{Z}^2$ respecte S, tret de [7].

b) $C_\infty = \langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ és el grup cíclic infinit, amb l'operació definida per $s^n \cdot s^m = s^{n+m}$. És la manera de representar $\mathbb{Z}$ amb notació multiplicativa, mitjançant la bijecció $s^n \longleftrightarrow n$.

Prenem dos subconjunts generadors diferents per estudiar els seus respectius grafs de Cayley: $S = \{s^1\}$ i $S' = \{s^2, s^3\}$. Els dos grafs són connexos, clarament $\langle S \rangle = G$ i, com que $s^3 \cdot s^{-2} = s^1 \in S$, $\langle S' \rangle = G$ també. En canvi, si per exemple prenem $S'' = \{s^2, s^4\}$, $\Gamma(C_\infty,\ S'')$ no és connex ja que $\langle S'' \rangle \neq G$ i tenim dues components connexes, s^n on n és parell i on n és senar.

Tornant ara a $\Gamma(C_\infty, S)$ i $\Gamma(C_\infty, S')$, observem que tots dos tenen els mateixos vèrtexs, s^n per cada $n \in \mathbb{Z}$, però no tenen les mateixes arestes. Ens fixem primer en $\Gamma(C_\infty, S)$: només té arestes de tipus s^1, que connecten s^n amb $s^n \cdot s^1 = s^{n+1}$.

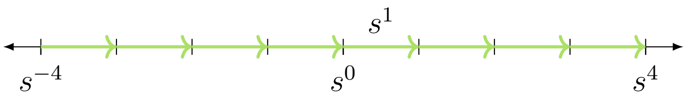


Figura 1.3: $\Gamma(C_\infty, S)$, el graf de Cayley de C_∞ respecte $S = \{s^1\}$.

Per altra banda, el graf corresponent a S' compta amb arestes de tipus s^2 i s^3, verdes i vermelles respectivament. Les primeres enllacen s^n amb $s^n \cdot s^2 = s^{n+2}$ i les segones s^n amb $s^n \cdot s^3 = s^{n+3}$.

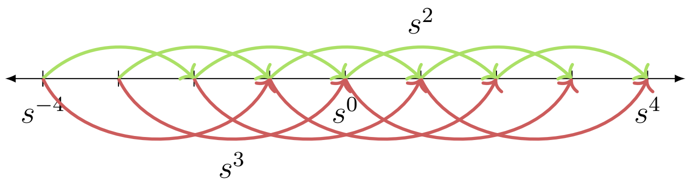


Figura 1.4: $\Gamma(C_\infty, S')$, el graf de Cayley de C_∞ respecte $S' = \{s^2, s^3\}$.

Observem que, tot i prendre el mateix grup, S i S' ens donen dos grafs de Cayley diferents. Els grafs de les Figures 1.3 i 1.4 no són isomorfs, per exemple perquè els nodes tenen graus (nombre d'arestes que en surten) diferents.

c) Considerem ara $F_2 = \langle a, b \mid \rangle$, el grup lliure de rang 2. Els elements de F_2 són totes les paraules reduïdes possibles amb l'alfabet $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. L'operació és la concatenació més reducció de les paraules.

Aquest grup no és abelià i, com només tenim les relacions bàsiques $aa^{-1} = a^{-1}a = b^{-1}b = bb^{-1} = 1$ entre els generadors i els seus inversos, l'expressió de qualsevol element $g \in F_2$ en la base $\{a, b\}$ és única. Si no ho fos, voldria dir que existirien dues paraules diferents que serien iguals, creant una altra relació no donada a la definició. Pel que fa $\Gamma(F_2, \{a, b\})$, això implica que és un arbre, ja que només hi haurà una manera d'arribar a cada element partint d'1.

Trobem la multiplicació per a i per b representada per les arestes horitzontals i verticals respectivament. A la Figura 1.5 es pot observar clarament com el camí per arribar a qualsevol element des d'1 és únic.

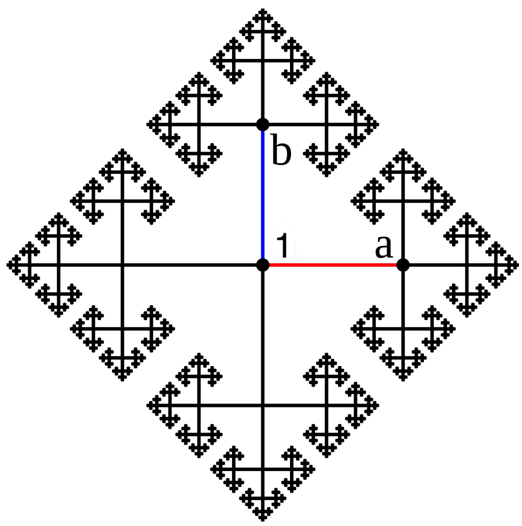


Figura 1.5: Aspecte del graf de Cayley del grup lliure de rang 2 respecte $\{a, b\}$, de [9].

d) Sigui $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{y}{2^r} \mid y \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$ el grup additiu dels racionals diàdics i el grup cíclic infinit $C_\infty = \langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Definim ara G com el producte semi-directe entre aquests dos grups: $G = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rtimes C_\infty$. El producte de dos elements (x, s^m) i (x', s^n) es defineix com

$$(x, s^m) \cdot (x', s^n) = (x + 2^m x', s^{(m+n)}).$$

Aquesta operació compleix:

- associativitat:

$$\begin{aligned}
\big((x, s^m) \cdot (x', s^n)\big) \cdot (x'', s^d) &= (x + 2^m x', s^{(m+n)}) \cdot (x'', s^d) \\
&= (x + 2^m x' + 2^{(m+n)} x'', s^{(m+n+d)}) \\
&= (x + 2^m (x' + 2^n x''), s^m s^{(n+d)}) \\
&= (x, s^m) \cdot (x' + 2^n x'', s^{(n+d)}) \\
&= (x, s^m) \cdot \Big((x', s^n) \cdot (x'', s^d)\Big).
\end{aligned}$$

- existència d'element neutre: $1_G = (0, s^0)$. Podem veure que:

$$\begin{aligned}
(x, s^m) \cdot 1_G &= (x + 2^m 0, s^{m+0}) = (x, s^m), \\
1_G \cdot (x, s^m) &= (0 + 2^0 x, s^{m+0}) = (x, s^m).
\end{aligned}$$

- existència d'invers: donat $y = (x, s^m)$, definim $y^{-1} = (-2^{-m} x, s^{-m})$. Així:

$$\begin{aligned}
y \cdot y^{-1} &= (x - 2^m 2^{-m} x, s^{-m+m}) = (0, s^0) = 1_G, \\
y^{-1} \cdot y &= (-2^{-m} x + 2^{-m} x, s^{-m+m}) = (0, s^0) = 1_G.
\end{aligned}$$

Concloem que G amb l'operació definida és un grup, que rep sovint el nom de **grup Baumslag-Solitar(1,2)** o $BS(1,2)$.

El conjunt $\{a, u\}$ on $a = (1, s^0)$ i $u = (0, s^1)$ genera tot el grup. Per veure-ho, expressem tot element de G com un producte del tipus $u^i a^j u^k$ per $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Primer mostrem que $u^i = (0, s^1) \cdot \overset{i)}{\ldots} \cdot (0, s^1) = (0, s^i)$ i $a^j = (1, s^0) \cdot \overset{j)}{\ldots} \cdot (1, s^0) = (j, s^0)$. Vegem ara que un element qualsevol $(\frac{n}{2^r}, s^m)$ es pot expressar com $u^{-r} a^n u^{m+r}$:

$$\begin{aligned}
u^{-r} a^n u^{m+r} &= (0, s^{-r}) \cdot (n, s^0) \cdot (0, s^{m+r}) \\
&= (2^{-r} n, s^{-r}) \cdot (0, s^{m+r}) \\
&= (2^{-r} n, s^m) = (\frac{n}{2^r}, s^m).
\end{aligned}$$

En particular, si $r = 0$, l'expressió queda $a^n u^m$ i obtenim tots els elements amb primera coordenada entera.

Un cop hem definit degudament el grup G, comencem a parlar de $\Gamma(G, \{a, u\})$ i la seva estructura. Els vèrtexs d'aquest són tots els punts del tipus (x, s^m) on $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ i $m \in \mathbb{Z}$. Això implica que, per cada enter, tenim tants nodes com elements hi ha a $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, els representarem pels punts diàdics de la recta $y = m$ a $\mathbb{R}^2$. De cada un d'aquests vèrtexs en surten i n'hi arriben 2 arestes, corresponents a cada un dels dos generadors, a i u. Una aresta $(g = (x, s^m), a)$ connecta els elements g i $g \cdot a = (x + 2^m, s^m)$, observem que la "llargada" d'aquestes arestes no és fixa, depèn de m. En canvi, les arestes $(g = (x, s^m), u)$ van des de g fins a $g \cdot u = (x, s^{m+1})$. A la Figura 1.6 es veu com queda una petita porció del graf, on es comprova clarament com varien segons m les arestes de tipus a, pintades de color vermell.

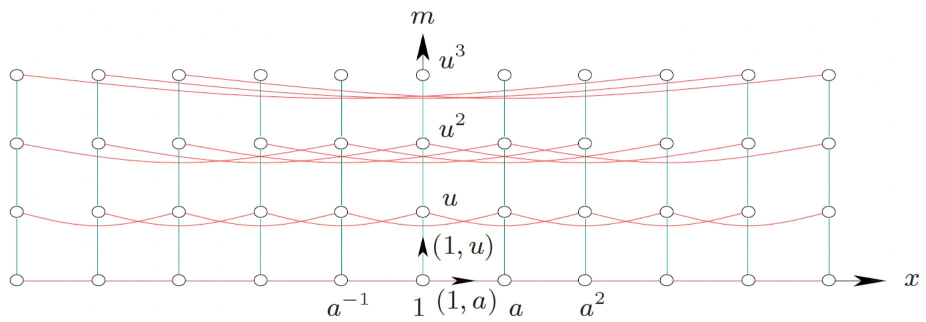


Figura 1.6: Porció del graf de Cayley de $BS(1, 2)$ respecte el conjunt de generadors $\{a, u\}$, disponible a [7].

El graf de Cayley de G té una peculiaritat, com operar per u varia la segona coordenada dels nodes de s^m a s^{m+1}, l'única manera de moure'ns entre vèrtexs amb el mateix valor de m és fent servir arestes de tipus a. Això implica que dos nodes (x, s^m) i (y, s^m) estaran connectats dins del "nivell" $m \iff x - y = c2^m$, on $c \in \mathbb{Z}$. Per exemple, per $m = 0$, els únics vèrtexs connectats dins del nivell són aquells on $x - y \in \mathbb{Z}$. Fixant-nos només en el subgraf induït pels vèrtexs amb un valor fixat de m, veiem que té infinites components connexes: tantes com elements de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ trobem a l'interval $[0, 2^m)$. La representació d'un fragment d'aquesta partició la podem veure representada a la Figura 1.7.

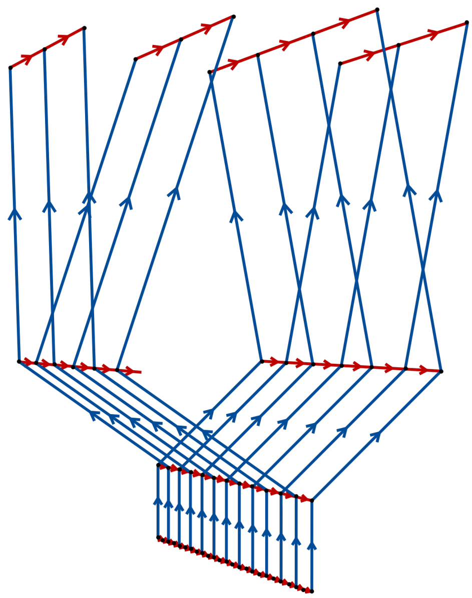


Figura 1.7: Fragment de $\Gamma(G, \{a, u\})$ representat en forma d'arbre binari, on es poden apreciar les particions per cada valor de m.
Imatge treta de [8].

1.3 Caràcters

Acabem aquest capítol presentant la informació necessària sobre els **caràcters** d'un grup, l'últim concepte que forma part de la definició del tema central d'aquest document.

Remarca. D'ara endavant i si no s'indica el contrari, G es referirà a un grup fg i S a un subconjunt finit generador de G tancat per inversos, $S^{-1} = S$.

Definició 1.3.1. Un homomorfisme $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ al grup additiu dels reals s'anomena un **caràcter**. El conjunt de tots els caràcters es denota $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$.

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ té estructura d'espai vectorial, ja que podem definir una suma i un producte vectorials a partir de l'operació suma i producte definida als reals: donats dos caràcters χ, χ' i $a, b \in \mathbb{R}$, $(a\chi + b\chi')(g) = a\chi(g) + b\chi'(g)\ \forall\, g \in G$. Més endavant veurem que té dimensió finita.

Proposició 1.3.2. *Els elements de* $[G, G]$ *i* $T(G)$ *pertanyen a* $\ker(\chi)$ *per qualsevol caràcter.*

Demostració. Al llarg d'aquesta demostració aplicarem que χ és un morfisme i que el grup additiu $\mathbb{R}$ és abelià i sense torsió.

- Sigui $y \in [G,G]$, es pot expressar com un producte d'elements del commutador, $y = \left(\prod_{i=1}^{n}[g_i, g_i']\right)$, on g_i i $g_i' \in G\ \forall 1 \leq i \leq n$. Llavors

$$\begin{aligned}
\chi(y) &= \chi\left(\prod_{i=1}^{n}[g_i, g_i']\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\chi\left([g_i, g_i']\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\chi(g_i^{-1}) + \chi\left((g_i')^{-1}\right) + \chi(g_i) + \chi(g_i')\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-\chi(g_i) - \chi(g_i') + \chi(g_i) + \chi(g_i')\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.
\end{aligned}$$

- Donat $g \in T(G)$ amb ordre r, $0 = \chi(1) = \chi(g^r) = r\chi(g) \implies \chi(g) = 0.$ $\square$

Lema 1.3.3. *Si G és finit l'únic caràcter de G és el trivial, $Hom(G,\mathbb{R}) = \{0\}$.*

Demostració. En un grup finit G, tot element és de torsió. Fent servir la Proposició 1.3.2, tota imatge $\chi(g)$ de $g \in G$ serà igual a 0. $\square$

Teorema 1.3.4. *La dimensió d'Hom$(G, \mathbb{R})$ és igual al rang lliure de l'abelianització de G, $G_{ab} = G/[G,G]$.*

Demostració. Com que el grup additiu $\mathbb{R}$ és un grup abelià sense torsió, tot caràcter χ factoritza com $\chi = \overline{\chi} \circ \pi = \overline{\chi} \circ \pi_2 \circ \pi_1$, tal com mostra el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & G_{ab} \arrow[d, two heads, "\pi_2"] \\
\mathbb{R} & \overline{G} \arrow[l, "\overline{\chi}"]
\end{tikzcd}$$

on $\overline{G} = G_{ab}/T(G_{ab})$ i $T(G_{ab})$ és la torsió de G_{ab}, que és un subgrup normal ja que G_{ab} és abelià, com hem vist a la Proposició 1.1.4.

$\overline{\chi}$ queda ben definit gràcies a la Proposició 1.3.2: per començar, $\overline{\chi} \in \mathrm{Hom}(\overline{G}, \mathbb{R})$. Sigui $g \in G$, $\pi(g) \in \overline{G}$ i $\overline{\chi}(\overline{g}) = \chi(g) \in \mathbb{R}$. A més, la imatge no depèn del representant.

- Sigui $g, h \in G$, si $gh^{-1} = t \in [G, G]$ són de la mateixa classe d'equivalència al fer el mòdul, $\overline{\chi}(gh^{-1}) = \overline{\chi}(t) \implies \overline{\chi}(g) - \overline{\chi}(h) = \overline{\chi}(t) \underset{1.3.2}{\implies} \overline{\chi}(g) - \overline{\chi}(h) = 0 \implies \overline{\chi}(g) = \overline{\chi}(h)$.
- Similarment, sigui $g', h' \in G$ si $g'h'^{-1} = t' \in T(G_{ab})$, $\overline{\chi}(g'h'^{-1}) = \overline{\chi}(t') \implies \overline{\chi}(g') - \overline{\chi}(h') = \overline{\chi}(t') \underset{1.3.2}{\implies} \overline{\chi}(g') - \overline{\chi}(h') = 0 \implies \overline{\chi}(g') = \overline{\chi}(h')$.

Aquesta factorització ens dona un isomorfisme entre espais vectorials:

$$\begin{aligned} f\colon Hom(G, \mathbb{R}) &\xrightarrow{\sim} Hom(\overline{G}, \mathbb{R}) \\ \chi &\longmapsto \overline{\chi} \end{aligned}$$

que compleix que $\chi = \overline{\chi} \circ \pi = \overline{\chi} \circ \pi_2 \circ \pi_1$.

Vegem que f és realment un isomorfisme.

- Per la injectivitat, prenem χ i $\chi' \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ i suposem que $f(\chi) = f(\chi')$. Això implica que $\overline{\chi} = \overline{\chi'}$ on $\overline{\chi} = f(\chi)$ i $\overline{\chi'} = f(\chi')$, però llavors $\chi(g) = \overline{\chi}\left(\pi(g)\right) = \overline{\chi'}\left(\pi(g)\right) = \chi'(g)$, $\forall\, g \in G$.
- Per tal de demostrar l'exhaustivitat, comprovem que l'antiimatge de $\overline{\chi}$ és $\chi = \overline{\chi} \circ \pi$: $f(\chi) = \overline{\chi}$ és tal que $\chi = \overline{\chi} \circ \pi$, que és cert per com hem escollit χ.
- Per $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a\chi + b\chi') = \overline{a\chi + b\chi'}$, $f(a\chi) = \overline{a\chi}$ i $f(b\chi') = \overline{b\chi'}$ són tal que $a\chi + b\chi' = (\overline{a\chi + b\chi'}) \circ \pi$, $a\chi = \overline{a\chi} \circ \pi$ i $b\chi' = \overline{b\chi'} \circ \pi$. Veiem que, per $\overline{g} \in \overline{G}$ i $g \in G$ tal que $\pi(g) = \overline{g}$:

$$\begin{aligned} f(a\chi + b\chi')(\overline{g}) &= (\overline{a\chi + b\chi'})\left(\pi(g)\right) \\ &= (a\chi + b\chi')(g) \\ &= a\chi(g) + b\chi'(g) \\ &= a\overline{\chi}\left(\pi(g)\right) + b\overline{\chi'}\left(\pi(g)\right) \\ &= a\overline{\chi}(\overline{g}) + b\overline{\chi'}(\overline{g}) \\ &= af(\chi)(\overline{g}) + bf(\chi')(\overline{g}) \implies f \text{ és lineal.} \end{aligned}$$

Tornant al resultat sobre la dimensió d'$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$, com que $\overline{G}$ és un grup fg, abelià i lliure, aplicant el Teorema de classificació 1.1.11, sabem que tindrà un cert rang lliure, que denotarem per n. De fet, $\overline{G} \simeq \mathbb{Z}^n$, ja que ens hem desfet de la torsió.

Ara bé, $\overline{\chi}\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ queda unívocament determinat amb les imatges d'una base de $\overline{G}$. Com aquestes imatges es poden donar arbitràriament (no tenim cap altra restricció), la dimensió d'$\mathrm{Hom}(\overline{G}, \mathbb{R})$ és igual a n, el rang de $\overline{G}$. En particular, per l'isomorfisme

f, la dimensió d'Hom$(G, \mathbb{R})$ és també n.

Un exemple d'una base d'Hom$(\overline{G}, \mathbb{R})$ la formen la col·lecció de n caràcters $\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_n}$ definits per

$$\begin{aligned} \overline{\chi_i} \colon \overline{G} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \overline{s_j} &\longmapsto \delta_{ij} \end{aligned}$$

on $\overline{s_1}, \dots, \overline{s_n}$ són uns generadors de $\overline{G}$. Amb això, qualsevol altre $\overline{\chi}$ es pot expressar de manera única com

$$\overline{\chi} = \overline{\chi}(s_1)\overline{\chi_1} + \cdots + \overline{\chi}(s_n)\overline{\chi_n}.$$

Per acabar, és fàcil veure que G_{ab} té el mateix rang lliure que $\overline{G}$, perquè fent el quocient per la torsió no el modifiquem. □

Definició 1.3.5. Dos caràcters χ_1, χ_2 són **equivalents** si existeix $r \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\chi_1 \sim \chi_2 \iff \chi_1 = r\chi_2$$

Amb aquesta definició podem parlar de la classe d'equivalència d'un caràcter no nul, $[\chi] = \{r\chi \mid r \in \mathbb{R}^+\}$, que resulta ser la semi-recta positiva que surt de 0 i passa per χ.

Definició 1.3.6. El conjunt de les classes d'equivalència *no nul·les* és **l'esfera de caràcters del grup** G.

$$S(G) = \{[\chi] \mid \chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}\} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})/\sim$$

Cada $[\chi]$ correspon a un punt de l'esfera de caràcters.

Com que Hom$(G, \mathbb{R})$ és un espai vectorial de dimensió finita, totes les normes $\|\bullet\|$ hi indueixen la mateixa topologia. L'esfera de caràcters, sent un espai quocient de l'obert Hom$(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, hereta la topologia quocient, amb la qual és **homeomorfa a l'esfera unitària**: $S(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})/\sim \; \simeq \mathbb{R}^n/\sim \; = \mathbb{S}^{n-1}$, on $n = \dim\big(\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})\big)$.

Observació. A conseqüència del Lema 1.3.3, si G_{ab} és finit (i, en particular, si el nostre grup inicial era un grup finit) l'espai vectorial Hom$(G, \mathbb{R})$ només conté l'homomorfisme trivial i l'esfera de caràcters és buida.

Definició 1.3.7. La **subesfera d'un subgrup** H **de** G consisteix en els caràcters que s'anul·len totalment a $H \leqslant G$, ho denotarem per $S(G, H)$.

$$S(G, H) = \{[\chi] \mid \chi(H) = 0\}.$$

Definició 1.3.8. El **rang d'un caràcter** és el rang lliure del grup additiu $\chi(G) \leqslant \mathbb{R}$. Com que caràcters equivalents tenen el mateix rang, podem parlar del rang d'un punt de $S(G)$, $rg[\chi]$. Els punts de rang 1 reben el nom de *punts racionals*, i el conjunt de tots els punts racionals forma l'esfera racional, $S_{\mathbb{Q}}(G)$.

El rang lliure de $\chi(G) \leqslant \mathbb{R}$ és el mateix que la dimensió de $\chi(G)$ respecte $\mathbb{Z}$, $rg[\chi] = \dim_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Im}(\chi)\big)$. Si el caràcter és racional, $\mathrm{rg}[\chi] = 1 \iff \dim_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Im}(\chi)\big) = 1 \iff \mathrm{Im}(\chi) \simeq \mathbb{Z} \iff \mathrm{Im}(\chi) = \langle\alpha\rangle_{\mathbb{Z}}$, per un cert $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}^+ \iff \chi(s_i) = \lambda_i\alpha$ per $\lambda_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, i,\ \forall\, s_i \in S$.

Per un caràcter racional podem suposar que $\alpha = 1$, ja que $\chi \sim \frac{1}{\alpha}\chi$ aplicant la relació d'equivalència 1.3.5. Afirmem, doncs, que $\mathrm{Im}(\chi) \simeq \langle 1\rangle_{\mathbb{Z}} \implies \chi(s_i) = \lambda_i$ per $\lambda_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, i,\ \forall\, s_i \in S$. També podem suposar que $\mathrm{mcd}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 1$, ja que si és algun altre valor $M \neq 1$, prenem $\frac{1}{|M|}\chi$ com a representant de $[\chi]$. Com $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ són enters coprimers, $\langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle = \langle\chi(s_1), \dots, \chi(s_n)\rangle = \mathbb{Z}$.

En resum, els caràcters racionals són aquells tal que $\chi(s_i) = \lambda_i$, on $\lambda_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, i$ coprimers entre si, $\forall\, s_i \in S$. Sobre l'esfera de caràcters són els punts $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ normalitzats.

Lema 1.3.9. *Mòdul la relació d'equivalència 1.3.5, tots els caràcters $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ racionals són morfismes exhaustius de G a $\mathbb{Z}$.* □

Proposició 1.3.10. *Un caràcter χ és racional $\iff$ existeix un punt enter a $[\chi]$, la semi-recta positiva que surt de 0 i passa per χ.*

Demostració. $\Rightarrow\!|$ Si χ és racional, $\chi(s_i) = \lambda_i\alpha$ per $\lambda_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, i,\ \forall\, s_i \in S$ per un cert $\alpha \in \mathbb{R}^+$; $\chi' = \frac{1}{\alpha}\chi \in [\chi]$ i és un punt racional, ja que $\chi'(s_i) = \lambda_i$ per $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.
$\Leftarrow\!|$ Si $\exists\, \chi'$ un punt enter a $[\chi]$, $\chi'(s_i) = \lambda_i$ per $\lambda_i \in \mathbb{Z}\ \forall\, i,\ \forall\, s_i \in S$ i podem suposar que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ són coprimers $\implies \langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle = \mathbb{Z}$. □

Lema 1.3.11. *Donat un punt $p \in \mathbb{R}^n$, sempre hi ha un punt $q \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\|p-q\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$.*

Demostració. Donat un punt $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, per cada coordenada p_i, el nombre enter q_i més proper és tal que $\|p_i - q_i\| \leq \frac{1}{2}$. Prenent $q = (q_1, \dots, q_n)$:

$$\|p - q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|p_i - q_i\|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$ □

Acabem la secció amb l'últim resultat sobre caràcters racionals, que guanyaran importància sobretot al darrer capítol del treball. El següent teorema ens assegura que donat un $\chi \in S(G)$ qualsevol, hi ha un χ racional tan a prop com vulguem.

Teorema 1.3.12. *Els caràcters racionals són densos a $S(G)$.*

Demostració. Donat un punt $p = (p_1, \dots, p_n) \in S(G)$ i $\epsilon > 0$, per $k > 0$ prenem el punt $kp = (kp_1, \dots, kp_n)$, que pertany a $[p]$. Aquest punt kp distarà com a molt $\frac{\sqrt{n}}{2}$ d'un punt q enter, $\|kp - q\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$, com assegura el Lema 1.3.11. Per tant, $q = kp + \overrightarrow{v}$ on $\|\overrightarrow{v}\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \implies \|kp\| - \|\overrightarrow{v}\| \leq \|q\| \leq \|kp\| + \|\overrightarrow{v}\| \implies k - \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \|q\| \leq k + \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Un cop trobat aquest q, podem normalitzar-lo i $\frac{q}{\|q\|} \in S(G)$, per la caracterització dels caràcters racionals de la Proposició 1.3.10, $\frac{q}{\|q\|}$ és un caràcter racional. Si fitem $\|p - \frac{q}{\|q\|}\|$, trobem que:

$$\begin{aligned}
\left\| p - \frac{q}{\|q\|} \right\| &= \left\| \frac{kp}{k} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{kp}{k} - \frac{q}{k} \right\| + \left\| \frac{q}{k} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \\
&= \frac{1}{k}\|kp - q\| + \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{\|q\|} \right| \|q\| \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{2k} + \frac{\big|\|q\| - k\big|}{k\|q\|} \left(k + \frac{\sqrt{n}}{2} \right) \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{2k} + \frac{\sqrt{n}}{2k\|q\|} \left(k + \frac{\sqrt{n}}{2} \right) \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{2k} + \frac{\sqrt{n}}{2k} \left(\frac{k + \frac{\sqrt{n}}{2}}{k - \frac{\sqrt{n}}{2}} \right) \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{k + \frac{\sqrt{n}}{2}}{k - \frac{\sqrt{n}}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Com que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{k + \frac{\sqrt{n}}{2}}{k - \frac{\sqrt{n}}{2}} \right) = 0$$

si hem escollit k prou gran en funció d'ϵ, $\|p - \frac{q}{\|q\|}\| \leq \epsilon$ i podem concloure que els caràcters racionals són densos a $S(G)$. □

Capítol 2

Introducció a l'invariant

Per començar, definim l'invariant BNS, que denotarem per Σ^1. El calculem en casos senzills i discutim algunes de les seves propietats, recalcant el resultat sobre la invariància respecte el sistema de generadors. Per últim, presentem un teorema que ens permet donar una caracterització local de l'invariant.

2.1 Definició

Per cada caràcter $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ definim el subconjunt $G_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\}$. Remarquem que $\chi(1_G) = 0\ \forall\, \chi$, així que 1_G sempre pertany a G_χ. Aquesta definició la podem veure com un subconjunt no només de G, sinó també dels vèrtexs de $\Gamma(G, S)$, i parlarem de $\Gamma_\chi = \Gamma_\chi(G, S)$, el **subgraf** generat per G_χ, és a dir, els vèrtexs amb $\chi(g) \geq 0$ i totes les arestes presents entre ells.

Observació. Dos caràcters equivalents, χ_1 i χ_2, indueixen el mateix subconjunt G_χ i, concretament, el mateix subgraf Γ_χ. És a dir, aquest només depèn del punt $[\chi] \in S(G)$.

Com ja s'ha vist, S generador equival a que Γ és connex, però no podem aplicar el mateix a Γ_χ. Aquest fet motiva la definició que ve a continuació, al voltant de la qual gira tot el treball.

Definició 2.1.1. Per un grup G fg i S un subconjunt generador, l'**invariant Bieri-Neumann-Strebel (BNS)** o **invariant geomètric del grup** G és:

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \mid \Gamma_\chi(G, S) \text{ és connex}\} \subseteq S(G).$$

Més endavant veurem que, tot i involucrar l'elecció d'un subconjunt generador,

$\Sigma^1(G)$ **no** varia si canviem S, d'aquí el títol d'invariant.

Exemples 2.1.2. Fent servir les propietats del graf de Cayley resultant dels grups següents, podem determinar el seu invariant BNS.

Notació. Donat un graf Γ, $P(\Gamma)$ es referirà al conjunt de tots els seus camins i donats $p, q \in P(\Gamma)$ tals que $\tau(p) = \iota(q)$, denotarem el camí concatenat de p i q com pq.

a) Sigui $G = \mathbb{Z}^2$ i $S = \{(1,0),(0,1)\}$ un conjunt generador. Per construir un caràcter, només necessitem les imatges de S:

$$\begin{aligned} \chi\colon \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (1,0) &\longmapsto \alpha \\ (0,1) &\longmapsto \beta. \end{aligned}$$

Demanem també que $\chi \neq 0$, és a dir, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Amb això, $\chi\big((x,y)\big) = \chi\big(x(1,0)+y(0,1)\big) = x\chi\big((0,1)\big) + y\chi\big((0,1)\big) = x\alpha + y\beta$ i podem definir el conjunt que ens interessa:

$$G_\chi = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x\alpha + y\beta \geq 0\}.$$

El subconjunt anterior indueix el subgraf $\Gamma_\chi(\mathbb{Z}^2, S)$, la recta $x\alpha + y\beta = 0$ simplement talla el pla $\mathbb{Z}^2$ en dos, deixant en un costat la part positiva del caràcter i en l'altre la part negativa, com podem observar a la Figura 2.1. Podem concloure que $\forall\, \chi$, $\Gamma_\chi(\mathbb{Z}^2, S)$ és connex, és a dir, $\Sigma^1(\mathbb{Z}^2) = S(\mathbb{Z}^2) \simeq S^1$.

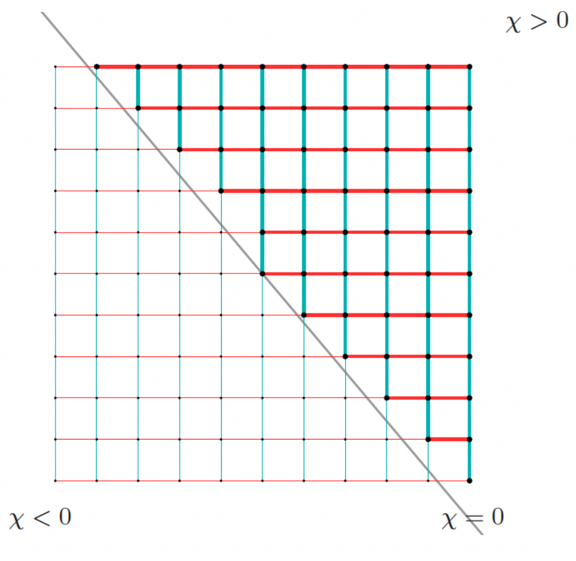


Figura 2.1: Tall en dos del graf de Cayley de $\mathbb{Z}^2$ respecte S, disponible a [7].

El mateix passa si contemplem $\mathbb{Z}^n$. Sigui ara $S' = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ la base canònica de $\mathbb{Z}^n$, definim un caràcter qualsevol:

$$\begin{aligned} \chi\colon \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s_1 &\longmapsto \alpha_1 \\ &\vdots \\ s_n &\longmapsto \alpha_n. \end{aligned}$$

Com abans, demanem $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$. Amb això, el subconjunt corresponent seria:

$$G_\chi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \geq 0\},$$

que indueix $\Gamma_\chi(\mathbb{Z}^n, S')$, un hiperplà arbitrari que passa per l'origen i talla $\mathbb{Z}^n$ en dos. Com en el cas de $\mathbb{Z}^2$, Γ_χ és connex $\forall\, \chi$. És a dir, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\Sigma^1(\mathbb{Z}^n) = S(\mathbb{Z}^n) \simeq S^{n-1}.$$

b) Calculem ara $\Sigma^1(F_2)$. Prenem χ un caràcter qualsevol i $S = \{a, b\}$, podem suposar que $\chi(a)$ i $\chi(b)$ són positius (si no, escollim els seus inversos) i demanem que $\big(\chi(a), \chi(b)\big) \neq (0, 0)$.

Si $\chi(a)$ i $\chi(b)$ són els dos > 0, χ no pertany a l'invariant. Podem definir un element h tal que $h = a^i b^j a^k$, $\chi(h) \geq 0$ i el camí que l'uneix amb 1 no pertany a $P(\Gamma_\chi)$. Primer escollim i positiu de manera arbitrària i després triem j negatiu tal que $\chi(a^i b^j) = i\chi(a) + j\chi(b) < 0$, amb això ens sortim del subgraf positiu. Finalment trobem k positiu tal que tornem a tenir caràcter positiu, $\chi(a^i b^j a^k) = (i + k)\chi(a) + j\chi(b) \geq 0$. Com que $\Gamma(F_2, S)$ és un arbre (vist al capítol anterior als Exemples 1.2.4), per tal de connectar 1 i h hem de passar forçosament per $a^i b^j$ i, per tant, sortir de Γ_χ.

Si $\chi(a)$ ó $\chi(b)$ són exactament 0, el caràcter tampoc pertany a $\Sigma^1(F_2)$. Suposem $\chi(b) = 0$, l'altre cas és anàleg. Fem servir el mateix argument i la mateixa construcció d'h, però aquest cop prenem i negatiu qualsevol per tal de sortir-nos de Γ_χ, $j \neq 0$ lliure (doncs $\chi(b) = 0$) i $k \geq i$. Com abans, ja que Γ és un arbre, l'únic camí per connectar 1 i h no està contingut en el subgraf positiu.

En conclusió, l'invariant de F_2 no conté cap caràcter, $\Sigma^1(F_2) = \emptyset$.

c) Calculem ara l'invariant per un grup estretament relacionat amb els dos exemples anteriors: $G = C_\infty \times F_2$, on $C_\infty = \langle s \rangle$ és el grup cíclic infinit i $F_2 = \langle a, b \mid \ \rangle$ el grup lliure de grau 2. Clarament, G està generat per $S = \{(s,1),(1,a),(1,b)\}$, l'equivalent dels generadors de C^∞ i F_2 a G. Com que $G_{ab} = C_{\infty_{ab}} \times F_{2_{ab}} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^3$, afirmem que $S(G) \simeq S_2 \subset \mathbb{R}^3$.

El graf de Cayley tindrà, per cada $s^n \in C^\infty$, una còpia de $\Gamma(F_2, \{a,b\})$ (Figura 1.5) i, a més, arestes de tipus s connectant (s^n, w) amb (s^{n+1}, w).

Un caràcter χ de G el podem definir donant lliurement les imatges dels elements que el generen:

$$\begin{aligned} \chi \colon G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (1,a) &\longmapsto \alpha \\ (1,b) &\longmapsto \beta \\ (s,1) &\longmapsto \gamma. \end{aligned}$$

Observem que el cas més senzill per veure si χ pertany o no a l'invariant és quan $\gamma = 0$. Per aquests caràcters, podem afirmar que no n'hi ha cap que pertanyi a l'invariant: hem demostrat que $\Sigma^1(F_2) = \emptyset$ i, si $\gamma = 0$, per molt que variem el valor de s i visitem les diferents còpies del graf de Cayley de F_2, estarem en la mateixa situació $\implies [\chi] \notin \Sigma^1(G)$.

El següent tipus de caràcters que considerem són aquells que s'anul·len a $\{a,b\}$ però no a s. Per la relació d'equivalència 1.3.5, només hi ha dos caràcters, χ tal que $\chi(s) = 1$ i el seu antípoda. Com que en el valor del caràcter només participa la primera coordenada, per χ el subgraf Γ_χ està format pels vèrtexs (s^n, x) tal que $n \geq 0$ i, per $-\chi$, el mateix però tal que $n \leq 0$. Aquests dos subgrafs són clarament connexos, ja que són la meitat superior i inferior de Γ, respectivament $\implies [\chi]$ i $[-\chi] \in \Sigma^1(G)$.

L'últim conjunt de caràcters χ és el que no s'anul·la totalment a cap dels dos grups que formen G. Aquests pertanyen sempre a l'invariant BNS de G. Donats $g = (s^n, x)$ i $h = (s^m, x') \in G_\chi$, hi ha un camí $p = (g, w)$ que els connecta dins de Γ. Si prenem $s \in C^\infty \times \{1\}$ i $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\chi(s^\lambda)$ sigui major o igual (en valor absolut) que el valor mínim de χ en els nodes del camí p, podem definir el camí $p_\lambda = (g, s^\lambda w s^{-\lambda})$. Observem que aquest camí connecta g amb h perquè els elements de F_2 i C_∞ commutem entre ells dins de G, i tenim que $s^\lambda w s^{-\lambda} = w$. Intuïtivament, p_λ connecta g amb $(s^{n+\lambda}, x)$, mitjançant w connecta aquest i $(s^{m+\lambda}, x')$ i, finalment, torna a h. A part, per com hem escollit λ, el camí només passa per vèrtexs amb caràcter ≥ 0, $p_\lambda \in P(\Gamma_\chi) \implies [\chi] \in \Sigma^1(G)$.

Amb aquests tres tipus hem considerat tots els possibles caràcters de G, així que podem afirmar que no n'hi ha cap més que pertanyi a $\Sigma^1(G)$.

Aquest exemple serveix com a introducció a la demostració que farem més endavant del càlcul de l'invariant per grups definits com $G = G_1 \times G_2$, on G_1 i G_2 són fg. Veurem que, si coneixem $\Sigma^1(G_1)$ i $\Sigma^1(G_2)$, podrem donar $\Sigma^1(G)$ explícitament.

d) Per calcular l'invariant de $G = BS(1,2)$, definit prèviament als Exemples 1.2.4, observem que els generadors $a = (1, s^0)$ i $u = (0, s^1)$ satisfan

$$\begin{aligned} uau^{-1} &= (0, s^1) \cdot (1, s^0) \cdot (0, s^{-1}) \\ &= (2, s^1) \cdot (0, s^{-1}) \\ &= (2, s^0) = (1, s^0) \cdot (1, s^0) = a^2. \end{aligned}$$

Com que $uau^{-1} = a^2 \iff a^{-1}uau^{-1} = a$, tot caràcter s'anul·la forçadament en a perquè $\chi(a) = -\chi(a) + \chi(u) + \chi(a) - \chi(u) = 0$, reduint $S(G)$ a una sola dimensió. Tenim, per tant, només dos punts antípodes, $[\chi]$ i $[-\chi]$. Abans de definir aquests dos caràcters, veiem que no hi ha cap altra restricció per la imatge de u per χ. Prenem χ el següent caràcter:

$$\begin{aligned} \chi \colon G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto 0 \\ u &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

i assegurem-nos que és realment un morfisme de grups; si ho és, no hi hauran més restriccions per la definició del grup. Hem de veure que, donats $g = (\frac{n}{2^r}, s^m), h = (\frac{t}{2^p}, s^k) \in G$, $\chi(gh) = \chi(g) + \chi(h)$. Observem que gh el podem expressar com $(\frac{2^p n + 2^{r+m} t}{2^{r+p}}, s^{m+k})$, fent servir l'operació definida al grup. Expressem els tres elements com una paraula en $\{a, u\}$ mitjançant la paraula que hem vist als Exemples 1.2.4:

$$\begin{aligned} g &= u^{-r} a^n u^{m+r}, \\ h &= u^{-p} a^t u^{k+p}, \\ gh &= u^{-r-p} a^{2^p n + 2^{r+m} t} u^{m+k+r+p}. \end{aligned}$$

Com que $\chi(a) = 0$ i $\chi(u) = 1$:

$$\begin{aligned}
\chi(g) &= \chi(u^{-r}a^n u^{m+r}) = -r + m + r = m, \\
\chi(h) &= \chi(u^{-p}a^t u^{k+p}) = -p + k + p = k, \\
\chi(gh) &= \chi(u^{-r-p}a^{2^p n + 2^{r+m} t}u^{m+k+r+p}) = -r - p + m + k + r + p = m + k.
\end{aligned}$$

Per tant, χ és un morfisme. Concloem que, per la relació d'equivalència 1.3.5, tan sols cal que considerem el punt $[\chi]$ amb χ donat per $\chi(u) = 1$ i el seu antípoda $[-\chi]$.

Tenim, per tant, només dos subgrafs induïts. Anem a estudiar la seva connectivitat:

- Γ_χ: com $\chi(a) = 0$, el subgraf és tots els vèrtexs (x, s^m) amb $m \geq 0$ i les arestes entre ells. Si fos connex, hauria d'haver-hi un camí per qualsevol parell de vèrtexs de Γ_χ. Donat un vèrtex (x, s^m) amb $x \in \mathbb{Z}$, per molt que canviem de nivell mitjançant arestes de tipus u i operem uns quants cops per a en aquell nivell, mai podrem connectar dins de Γ_χ (x, s^m) amb un vèrtex del subgraf on la primera coordenada no sigui entera. Això és perquè, per $n, b \in \mathbb{Z}$ tal que $m + n \in \mathbb{N}$, $(x, s^m)u^n a^b = (x + b2^{m+n}, s^{m+n})$ i $x + b2^{m+n} \in \mathbb{Z}$ sempre $\implies \Gamma_\chi$ **no** és connex.

- $\Gamma_{-\chi}$: com $\chi(a) = 0$, el subgraf és tots els vèrtexs (x, s^m) amb $m \leq 0$ i les arestes entre ells. Per tot $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x = k2^{-n}$ per $k \in \mathbb{Z}$. Observem que el mateix però per potències positives de 2 (que, per tant, demostraria que Γ_χ és connex) no és cert: si prenem $x = \frac{1}{2}$, $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x = k2^n$ per $k \in \mathbb{Z}$. Fent servir aquesta propietat, si $x = k2^{-n}$, el punt (x, s^{-n}) es pot connectar amb l'origen mitjançant el camí $p_2 = \big((x, s^{-n}), a^{-k}u^n\big)$, sense sortir-nos de $\Gamma_{-\chi}$: $(x, s^{-n})a^{-k}u^n = (x - k2^{-n}, s^{-n})u^n = (0, s^{-n})u^n = (0, s^0)$. A part, tot vèrtex de la forma (x, s^m) amb $m < 0$ el podem connectar amb el vèrtex (x, s^{-n}) mitjançant el camí $p_1 = \big((x, s^m), u^{n-m}\big)$, que és un seguit d'arestes verticals. Com que $\iota(p_2) = \tau(p_1) = (x, s^{-n})$, els podem concatenar i concloure que el camí $p_x = p_1 p_2$ connecta (x, s^m) amb l'origen.
  Per connectar dos punts (x, s^m) i $(y, s^n) \in \Gamma_{-\chi}$ qualsevol, podem fer el camí $p = p_x(p_y)^{-1}$, ben definit perquè $\iota\left((p_y)^{-1}\right) = \tau(p_x) = (0, s^0) \implies \Gamma_{-\chi}$ **sí** és connex.

En resum:

$$S(G) = \{[\chi], [-\chi]\} \text{ i } \Sigma^1(G) = \{[-\chi]\}.$$

2.2 Invariància respecte al sistema de generadors

Comencem definint una extensió de χ, des de G fins a $P(\Gamma)$, el conjunt de tots els camins de $\Gamma(G,S)$. Donat $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ i un camí $p = e_1e_2e_3\cdots e_n = (g, s_1s_2\cdots s_n)$ que connecta g amb $gs_1s_2\cdots s_n$, definim $v_\chi(p)$, el mínim valor de χ entre els nodes del camí p. Podem expressar-ho d'aquesta manera:

$$\begin{aligned}
v_\chi(p) &= \min\{\chi\left(\iota(e_1)\right), \chi\left(\tau(e_1)\right), \dots, \chi\left(\tau(e_n)\right)\} \\
&= \min\{\chi(g), \chi(gs_1), \chi(gs_1s_2), \dots, \chi(gs_1\cdots s_n)\} \\
&= \chi(g) + \min\{0, \chi(s_1), \chi(s_1s_2), \dots, \chi(s_1\cdots s_n)\}.
\end{aligned}$$

Definició 2.2.1. Donat $p \in P(\Gamma)$ i $g \in G$, definim $g \cdot p \in P(\Gamma)$ com el camí que resulta de multiplicar per l'esquerra per g tots els vèrtexs de p.

Per com hem definit el graf de Cayley, si en el camí p teníem els nodes g_1 i g_1s_1 connectats per l'aresta (g_1, s_1), a $g \cdot p$ els nodes gg_1 i gg_1s_1 ara estaran connectats per l'aresta (gg_1, s_1), que està ben definida doncs $gg_1 \in G$.

Es pot verificar ràpidament que $v_\chi(p)$ satisfà les propietats següents:

$$\begin{cases}
v_\chi(p^{-1}) = v_\chi(p) & \text{per } p \in P(\Gamma), \\
v_\chi(g \cdot p) = \chi(g) + v_\chi(p) & \text{per } g \in G \text{ i } p \in P(\Gamma), \\
v_\chi(pq) = \min\{v_\chi(p), v_\chi(q)\} & \text{per } p, q \in P(\Gamma) \text{ amb } \tau(p) = \iota(q).
\end{cases}$$

Clarament, $v_\chi(p^{-1})$ és el mateix que $v_\chi(p)$, ja que p i p^{-1} passen pels mateixos vèrtexs però en ordre contrari. També veiem que, donat un element $g \in G$ i un camí $p = (h, s_1\cdots s_n)$,

$$\begin{aligned}
v_\chi(g \cdot p) &= \min\{\chi(gh), \chi(ghs_1), \chi(ghs_1s_2), \dots, \chi(ghs_1\cdots s_n)\} \\
&= \chi(g) + \min\{\chi(h), \chi(hs_1), \chi(hs_1s_2), \dots, \chi(hs_1\cdots s_n)\} \\
&= \chi(g) + v_\chi(p).
\end{aligned}$$

En últim lloc, si concatenem dos camins p i q (tal que $\tau(p) = \iota(q)$), $v_\chi(pq)$ serà el mínim entre el mínim de la primera part, $v_\chi(p)$, i el de la segona, $v_\chi(q)$.

Un cop definit $v_\chi(p)$ i discutides algunes de les seves propietats, enunciem i demostrem el resultat principal de la secció i un dels teoremes més importants del treball, que ens assegura que $\Sigma^1(G)$ no depèn del sistema de generadors que escollim per construir el graf de Cayley.

Teorema 2.2.2. *Sigui G un grup fg, $\Sigma^1(G) \subseteq S(G)$ no depèn de S, el sistema de generadors finit que emprem fer construir el graf de Cayley $\Gamma(G,S)$.*

Demostració. La idea principal darrere d'aquest resultat recau en el fet que passar d'un sistema finit de generadors a un altre es pot fer en un nombre finit de passes, cadascuna de les quals consistirà a eliminar o afegir un generador redundant a S. Ens serà suficient comparar $\Gamma(G,S)$ i $\Gamma' = \Gamma(G, S \cup \{z\})$, si estem comparant dos grafs amb sistemes de generadors que varien en més d'un element, simplement podem aplicar aquest raonament tants cops com calgui.

Per tot $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ diferent de zero, els subgrafs Γ_χ i Γ'_χ tenen els mateixos vèrtexs. A part, com z és un generador redundant i es pot expressar en funció dels elements ja presents a S, $z = s_1 s_2 \cdots s_n$ per un cert $n \in \mathbb{N}$ i $s_1 \cdots s_n \in S$, els camins de Γ' que ara involucren arestes del tipus z els podíem fer igualment a Γ simplement passant per $s_1 s_2 \cdots s_n$. Observem doncs que $V_{\Gamma_\chi} = V_{\Gamma'_\chi}$ i $E_{\Gamma_\chi} \subset E_{\Gamma'_\chi} \implies \Gamma_\chi$ és un subgraf de Γ'_χ. Amb això concloem que Γ'_χ és connex si Γ_χ ho és.

Suposem ara que Γ'_χ és connex. Com que l'única diferència entre Γ_χ i Γ'_χ és la presència d'arestes de tipus z, si $v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) \geq 0$ tot camí de Γ'_χ estarà també a Γ_χ. Sigui g_z l'element del qual surt una aresta del tipus z a Γ_χ, si ara substituïm z per $s_1 \cdots s_n$, tenim un camí $p = (g_z, s_1 \cdots s_n)$ que, si $v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) \geq 0$, mai passarà per un vèrtex amb caràcter negatiu (donat també que $\chi(g_z) \geq 0$). En aquest cas, doncs, no cal fer res més.

En canvi, si $v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) < 0$, no podem afirmar el mateix. Escollim un element $t \in S$ amb $\chi(t) > 0$ (si resulta que $\chi(t) < 0$, fem servir t^{-1}) i $k \in \mathbb{N}$ satisfent que $\chi(t^k) = k\chi(t) \geq -v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n)$.

Donats g i h vèrtexs de Γ_χ, volem trobar un camí que els connecti a dins de Γ_χ. Fixem $g' = t^{-k} g t^k$ i $h' = t^{-k} h t^k$, que són tals que $\chi(g') = \chi(g)$ i $\chi(h') = \chi(h) \implies g', h' \in \Gamma_\chi$. Com estem partint del fet que Γ'_χ és connex, existeix un camí $p' = (g', w') \in P(\Gamma'_\chi)$ de g' fins a h', que pot passar o no per arestes de tipus z.

Si p' no passa per arestes de tipus z ó z^{-1}, també és un camí de Γ_χ i no cal que fem res més.

Si no, substituint-les per la seva corresponent expressió en S, obtenim una nova paraula $w = w_1 \cdots w_m$ que dona lloc a un camí $p = (g', w)$, de g' fins a h', però aquest cop a Γ. No podem assegurar que p estigui contingut dintre de Γ_χ, ja que $v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) < 0$, però podem fitar l'"error" comès:

$$v_\chi(p) \geq v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) \geq -\chi(t^k).$$

Aquesta fita bé donada pel fet que estem suposant que p' contenia còpies de z o

z^{-1}, així que p conté la seqüència $s_1 s_2 \cdots s_n$. Podem denotar p_z com els trossos de camí dintre de p de la forma $(g, s_1 \cdots s_n)$, que trobarem per tots els g dels quals abans sortia una aresta del tipus z: per cada un podem afirmar que $v_\chi(p_z) = \chi(g) + v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) \geq v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n)$. Com que la resta de trossos de p són exactament iguals que a p', passen per vèrtexs amb χ positiu i el valor més baix que $v_\chi(p)$ pot assolir és $v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n)$ si aquest és negatiu; $v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n) < 0 \implies v_\chi(p) \geq v_\chi(s_1 s_2 \cdots s_n)$.

Considerem ara el camí $t^k \cdot p$, connecta $t^k g' = t^k t^{-k} g t^k = g t^k$ i $t^k h' = t^k t^{-k} h t^k = h t^k$ i compleix que:

$$v_\chi(t^k \cdot p) = \chi(t^k) + v_\chi(p) \geq \chi(t^k) - \chi(t^k) = 0.$$

Podem concloure que el camí $t^k \cdot p$ va des de gt^k fins a ht^k sense sortir de Γ_χ. Per acabar de connectar els g i h originals, fem el següent:

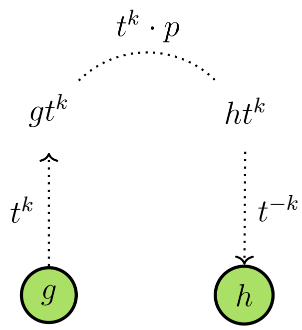


Figura 2.2: Visualització del camí entre g i h.

Clarament, els vèrtexs visitats en la part del camí que connecta g i gt^k i la part entre ht^k i h tenen caràcter positiu perquè $\chi(t) > 0$ i $k \in \mathbb{N}$. Podem concloure que el camí $(g, t^k(t^k \cdot p)t^{-k})$ connecta g i h dins de $\Gamma_\chi \implies \Gamma_\chi$ és connex. $\square$

2.2.1 Conseqüències del teorema d'invariància

A causa del teorema que acabem de discutir, per trobar l'invariant BNS d'un grup G només ens cal saber-lo calcular per un sistema de generadors concret, que escollirem segons el que es vulgui estudiar. Això dona pas a diversos altres resultats que exposem seguidament.

Notació. Donat un conjunt A, A^c representa el seu complementari.

Proposició 2.2.3. *Sigui G un grup fg amb centre $\zeta(G)$. Llavors*

$$S\left(G,\zeta(G)\right)^c \subseteq \Sigma^1(G).$$

És a dir, $\Sigma^1(G)$ conté tots els caràcters tal que $\chi\left(\zeta(G)\right) \neq \{0\}$.

Demostració. Sigui χ un caràcter tal que $\chi\left(\zeta(G)\right) \neq \{0\}$, $z \in \zeta(G) \setminus \ker(\chi)$ i S un sistema de generadors que inclou z. Podem suposar que $\chi(z) \geq 0$, ja que si no ho és triem z^{-1}.

Donats g i $h \in G_\chi$, existeix un camí $p = (g, w)$ a $\Gamma(G, S)$ connectant-los. Si $v_\chi(p) \geq 0$, p pertany al subgraf positiu Γ_χ. Si no, podem trobar $k \in \mathbb{N}$ que $\chi(z^k) \geq -v_\chi(p)$. Així, fent servir el mateix raonament que hem utilitzat a la demostració del Teorema 2.2.2, el camí $(g, z^k w z^{-k})$ es queda dintre de Γ_χ. A més, gràcies al fet que $z \in \zeta(G)$, p connecta g amb $gz^k w z^{-k} = gw = h \implies \Gamma_\chi$ és connex.

Pel Teorema 2.2.2, $[\chi] \in \Sigma^1(G)$. $\square$

Lema 2.2.4. *Si G és un grup fg i abelià, $\Sigma^1(G) = S(G)$.*

Demostració. Sigui G fg i abelià $\implies \zeta(G) = G \implies S\left(G,\zeta(G)\right) = \emptyset \implies S\left(G,\zeta(G)\right)^c = S(G) \underset{2.2.3}{\implies} \Sigma^1(G) = S(G)$. $\square$

Abans d'exposar i demostrar la conseqüència següent, necessitem un resultat previ.

Lema 2.2.5. *Sigui G un grup (no necessàriament fg) i S un subconjunt generador, donat $g = s_1 \cdots s_n \in G$ i $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, definim $g_\sigma = s_{\sigma(1)} \cdots s_{\sigma(n)}$. Llavors $g_\sigma^{-1} g \in [G, G]$.*

Demostració. Recordem que el grup simètric $\mathfrak{S}_n$ es pot generar per les seves transposicions, així que només cal que demostrem el resultat per aquest cas.

Si $\sigma = t_1 \cdots t_n$ és la descomposició de σ en transposicions, apliquem el Lema a $g_{t_n}^{-1} g$ i seguidament a $g_{t_{n-1}t_n}^{-1} g_{t_n}$, arribant a què tots dos estan a $[G, G]$. Com $[G, G]$ és un subgrup, el producte també hi pertany: $g_{t_{n-1}t_n}^{-1} g_{t_n} g_{t_n}^{-1} g = g_{t_{n-1}t_n}^{-1} g \in [G, G]$. Si fem això per la resta de transposicions, concloem que $g_\sigma^{-1} g \in [G, G]$.

Prenem doncs $\sigma = (i, j)$ la transposició dels índexs i i j, $g = s_1 \cdots s_i \cdots s_j \cdots s_n$ i $g_\sigma = s_1 \cdots s_j \cdots s_i \cdots s_n$. Les parts que coincideixen les podem referenciar de la següent manera: $u = s_1 \cdots s_{i-1}, v = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ i $w = s_{j+1} \cdots s_n$, amb aquesta notació queda $g = us_ivs_jw$ i $g_\sigma = us_jvs_iw$. Vegem ara que $g_\sigma^{-1}g \in [G,G]$:

$$\begin{aligned} g_\sigma^{-1}g = w^{-1}s_i^{-1}v^{-1}s_j^{-1}u^{-1}us_ivs_jw = w^{-1}s_i^{-1}v^{-1}s_j^{-1}s_ivs_jw \in [G,G] &\underset{1.1.7}{\iff} \\ s_i^{-1}v^{-1}s_j^{-1}s_ivs_j \in [G,G] &\iff \\ s_i^{-1}v^{-1}(s_ivv^{-1}s_i^{-1})s_j^{-1}s_i(s_jvv^{-1}s_j^{-1})vs_j \in [G,G] &\iff \\ (s_i^{-1}v^{-1}s_iv)(v^{-1}s_i^{-1}s_j^{-1}s_is_jv)(v^{-1}s_j^{-1}vs_j) \in [G,G]. \end{aligned}$$

Això últim és cert perquè els tres elements entre parèntesis pertanyen clarament a $[G,G]$, per ser commutadors o conjugats de commutadors.

Amb tot això podem concloure que $g_\sigma^{-1}g \in [G,G]$, com volíem veure. □

Proposició 2.2.6. *Si el commutador de G és fg, $\Sigma^1(G) = S(G)$.*

Demostració. Escollim S un sistema de generadors que contingui S', un sistema de generadors de $[G,G]$, i fixem χ un caràcter de G qualsevol. Per veure que $\Gamma_\chi(G,S)$ és connex, connectarem $g \in G_\chi$ amb 1.

Comencem representant g per $w = w_1 \cdots w_n$ mitjançant S i reordenem la paraula tal que les lletres amb valors positius de χ quedin davant de la resta, obtenint una nova paraula $w' = w_{i_1} \cdots w_{i_m} w_{j_1} \cdots w_{j_{m'}}$ on $\chi(w_{i_k}) \geq 0$ $\forall\, k \in \{1,\dots,m\}$ i $\chi(w_{j_{k'}}) < 0$ $\forall\, k' \in \{1,\dots,m'\}$. Aquesta nova paraula connectarà ara 1 amb g'.
Com que w i w' són la mateixa paraula però en diferent ordre, $\chi(g) = \chi(w) = \chi(w') = \chi(g') \implies g'$ també pertany a G_χ. Si el valor final $\chi(g')$ ha de ser major o igual a 0, vol dir que

$$\sum_{k=1}^{m} \chi(w_{i_k}) \geq \left| \sum_{k'=1}^{m'} \chi(w_{j_{k'}}) \right|. \tag{2.1}$$

En el cas de w', com primer tenim totes les lletres amb caràcter positiu i després totes les negatives $\underset{2.1}{\implies}$ mai passarem per un vèrtex amb caràcter menor a 0 enlloc del camí $\implies (1,w') \in P(\Gamma_\chi)$.

Per últim, connectem g' i g. Pel lema anterior $g'^{-1}g \in [G,G]$, i sigui u la paraula en $S' \subset S$ que el representa, el camí $(1, w'u)$ connecta 1 amb g i es queda dintre de Γ_χ, ja que $u \in [G,G] \underset{1.3.2}{\implies} \chi(u) = 0$.

Pel Teorema 2.2.2, $[\chi] \in \Sigma^1(G) \implies \Sigma^1(G) = S(G)$. □

El resultat d'invariància també ens permet calcular $\Sigma^1(G = G_1 \times G_2)$, on G_1 i G_2 són fg, en funció del dels seus factors. Sigui π_i la projecció canònica de G sobre G_i, si tenim un caràcter diferent de zero $\chi\colon G_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, la composició $\chi \circ \pi_1$ és un caràcter sobre G que també és diferent de zero. Així tenim una inclusió entre espais vectorials $\mathrm{Hom}(\pi_1, \mathbb{1})\colon \mathrm{Hom}(G_1, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ que indueix una altra entre les esferes de caràcters, $\pi_1^*\colon S(G_1) \hookrightarrow S(G)$. Similarment, definim $\mathrm{Hom}(\pi_2, \mathbb{1})\colon \mathrm{Hom}(G_2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ i $\pi_2^*\colon S(G_2) \hookrightarrow S(G)$. Amb això podem donar ja el resultat que ens interessa.

Proposició 2.2.7. *L'invariant de $G = G_1 \times G_2$, on G_1 i G_2 són grups fg, conté només els caràcters $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ que compleixen alguna de les condicions següents:*

- *χ s'anul·la a $G_1 \times \{1\}$ i la restricció de χ sobre G_2 pertany a $\Sigma^1(G_2)$,*
- *χ s'anul·la $\{1\} \times G_2$ i la restricció de χ sobre G_1 pertany a $\Sigma^1(G_1)$,*
- *no s'anul·len ni a $G_1 \times \{1\}$ ni a $\{1\} \times G_2$.*

Demostració. Sigui S_1 i S_2 conjunts finits de generadors de G_1 i G_2 respectivament. Llavors el conjunt

$$S = (S_1 \times \{1_{G_1}\}) \cup (\{1_{G_2}\} \times S_2)$$

és finit i genera el producte directe $G = G_1 \times G_2$. Pel Teorema 2.2.2, podem fer servir S per calcular $\Sigma^1(G)$.

Per cada vèrtex $g = (g_1, g_2)$ de $\Gamma(G, S)$, existeix una paraula en S_1 $x_1 x_2 \cdots x_h$ (és a dir, $x_i \in S_1$ $\forall\, 1 \leq i \leq h$) que representa l'element g_1 i una paraula en S_2 $y_1 y_2 \cdots y_k$ que representa g_2. Observem que, sota l'operació de G, els elements de $G_1 \times \{1\}$ i $\{1\} \times G_2$ commuten entre ells, encara que no és necessari que cap dels dos grups sigui abelià, $(x, 1)(1, y) = (x, y) = (1, y)(x, 1)$. Amb això podem definir els següents camins que connecten l'origen amb el vèrtex g:

$$p_{12} = \big(1_G, (x_1, 1)(x_2, 1) \cdots (x_h, 1) \cdot (1, y_1)(1, y_2) \cdots (1, y_k)\big)\,, \tag{2.2}$$

$$p_{21} = \big(1_G, (1, y_1)(1, y_2) \cdots (1, y_k) \cdot (x_1, 1)(x_2, 1) \cdots (x_h, 1)\big)\,. \tag{2.3}$$

Considerem ara un caràcter diferent de zero $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ i un element g tal que $\chi(g) \geq 0$, és a dir, $g \in G_\chi$.

Suposem que χ s'anul·la a $\{1\} \times G_2$ i anomenem χ_1 a la restricció de χ sobre G_1, que serà $\neq 0$. Llavors un camí de tipus 2.2 es troba dintre de $\Gamma_\chi(G, S) \iff$ el camí $p_1 = (1, y_{11} y_{12} \cdots y_{1h})$ no surt de $\Gamma_{\chi_1}(G_1, S_1)$. Això implica que π_1^* és una bijecció entre $\Sigma^1(G_1)$ i $\Sigma^1(G) \cap S(G, G_2)$. Similarment, π_2^* envia bijectivament $\Sigma^1(G_2)$ a $\Sigma^1(G) \cap S(G, G_1)$. Amb això demostrem la pertinença a l'invariant de les dues primeres categories de caràcters de l'enunciat i la no pertinença dels caràcters que no compleixen cap de les dues condicions.

Suposem ara que χ no anul·la totalment ni $G_1 \times \{1\}$ ni $\{1\} \times G_2$. Si $\chi\big((g_1, g_2)\big) = \chi\big((g_1, 1) \cdot (1, g_2)\big) = \chi\big((g_1, 1)\big) + \chi\big((1, g_2)\big) \geq 0$, llavors $\chi\big((g_1, 1)\big) \geq 0$ ó $\chi\big((1, g_2)\big) \geq 0$. En el cas que $\chi\big((g_1, 1)\big)$ sigui ≥ 0, escollim un camí p_{12} del tipus 2.2, des de 1_G fins a g. Aquest camí no té per què quedar-se dintre de Γ_χ, però el seu origen 1_G, el seu punt mig $(g_1, 1)$ i el seu final g estan a Γ_χ. La idea és que modifiquem la primera meitat del camí (i més tard la segona) per tal de no sortir-nos de Γ_χ.

Si el camí ja és a Γ_χ, no cal que fem res. Si no, prenem u un element de $\{1\} \times G_2$ amb $\chi(u) > 0$, i escollim $\ell \in \mathbb{N}$ prou gran tal que $\chi(u^\ell) \geq \Big| v_\chi\big((x_1, 1)(x_2, 1) \cdots (x_h, 1)\big) \Big|$. Observem que $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$ el camí

$$q_\ell = (1_G, u^\ell \cdot (x_1, 1)(x_2, 1) \cdots (x_h, 1) \cdot u^{-\ell})$$

té la forma següent:

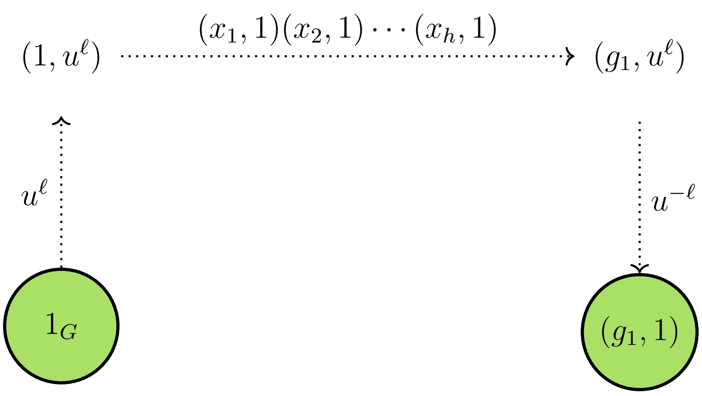


Figura 2.3: El camí q_ℓ.

Connecta l'origen amb $(g_1, 1)$, ja que u^ℓ només actua a la segona coordenada en pertànyer a $\{1\} \times G_2$.

A part, el caràcter de tots els vèrtexs del camí q_ℓ són ara positius per com hem escollit ℓ. Podem fer una modificació similar a la segona meitat per acabar tenint un camí a Γ_χ que va de 1_G fins a $g = (g_1, g_2) \implies \chi \in \Sigma^1(G)$.

L'altre cas que podem tenir, $\chi\big((1, g_2)\big) \geq 0$, és anàleg. Escollim p_{21} un camí de tipus 2.3 i el modifiquem fent servir $u' \in G_1 \times \{1\}$.

Així, demostrem que qualsevol caràcter que no s'anul·li totalment ni a $G_1 \times \{1\}$ ni a $\{1\} \times G_2$ pertany a l'invariant de G. □

Ara que hem vist aquest resultat, el càlcul d'invariants per grups com els que referencia la proposició és molt més fàcil. Recordem els Exemples 2.1.2, on havíem calculat $\Sigma^1(C_\infty \times F_2)$ amb un raonament purament basat en el seu graf de Cayley. Calculem-lo ara fent servir la Proposició 2.2.7.

Exemple 2.2.8. $G = C_\infty \times F_2$, on $C_\infty = \langle s \rangle$ és el grup cíclic infinit i $F_2 = \langle a, b \mid \, \rangle$ el grup lliure de grau 2; $G_{ab} = C_{\infty_{ab}} \times F_{2_{ab}} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^3$, implica que $S(G) \simeq S_2 \subset \mathbb{R}^3$. Un caràcter χ de G el podem definir amb les imatges dels elements que el generen, sense cap restricció:

$$\begin{aligned} \chi \colon G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (1, a) &\longmapsto \alpha \\ (1, b) &\longmapsto \beta \\ (s, 1) &\longmapsto \gamma. \end{aligned}$$

Prèviament, als Exemples 2.1.2, hem trobat que $\Sigma^1(C_\infty) = S(C_\infty)$ (perquè és isomorf a $\mathbb{Z}$) i $\Sigma^1(F_2) = \emptyset$. Per trobar l'invariant de G apliquem la Proposició 2.2.7.

- Els caràcters que s'anul·lin a $C_\infty \times \{1\}$ ($\gamma = 0$) són els de l'equador de $S(G)$. No n'hi ha cap tal que la restricció sobre F_2 pertanyi a $\Sigma^1(F_2)$, ja que aquest invariant és buit. Representen l'equador de l'esfera de caràcters, marcat en vermell a la Figura 2.4.
- Com $\Sigma^1(C_\infty) = S(C_\infty)$, tots els caràcters que s'anul·len a $\{1\} \times F_2$ pertanyen a $\Sigma^1(G)$. Són els caràcters tal que $\alpha = \beta = 0$ i $\gamma \neq 0$, aplicant la relació d'equivalència usual tenim només dos caràcters d'aquest tipus: un quan $\gamma = 1$ i l'altre per $\gamma = -1$. Són exactament els pols nord i sud de $S(G)$, en blau a la Figura 2.4.
- La resta de caràcters són els que no s'anul·len ni a $C_\infty \times \{1\}$ ni a $\{1\} \times F_2$, i tots formen part de $\Sigma^1(G)$. Representen tota l'esfera excepte l'equador i els pols, veiem aquests punts destacats en verd a la Figura 2.4.

Concloem que els únics caràcters que no pertanyen a l'invariant de G són els que s'anul·len només a $C_\infty \times \{1\}$, $S(G, C_\infty) \implies \Sigma^1(G)^c = S(G, C_\infty)$. Com hem dit, $S(G, C_\infty)$ és l'equador de $S(G) \implies$ l'invariant de G és tota l'esfera de caràcters excepte l'equador, $\Sigma^1(G) = S(G, C_\infty)^c$.

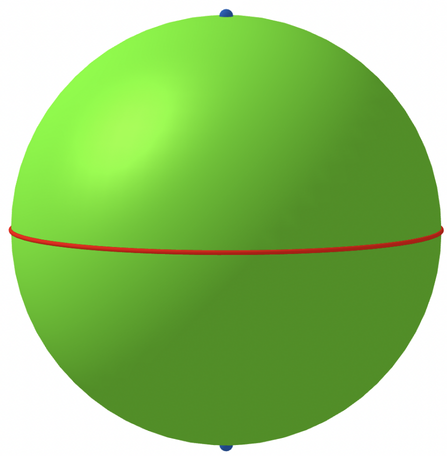


Figura 2.4: Visualització de $\Sigma^1(C^\infty \times F_2)$. Trobem ressaltats en blau i verd els punts que pertanyen a l'invariant.

2.3 Els subespais $\Gamma(G,S)^I_\chi$

En el context de la definició de l'invariant BNS, cada caràcter $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ i cada interval no buit $I \subseteq \mathbb{R}$, dona lloc a $I \longrightarrow G^I_\chi$, i acabem tenint una col·lecció de subconjunts de G. Els definim de la següent manera:

$$G^I_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \in I\}.$$

Amb això podem definir Γ^I_χ, el subgraf de $\Gamma(G,S)$ generat per G^I_χ. Un cas particular seria $\Gamma_\chi = \Gamma^{[0,\infty)}_\chi$, el subgraf amb el que definim $\Sigma^1(G)$.

Per cada $g \in G$ el graf traslladat $g \cdot \Gamma^I_\chi$ coincideix amb $\Gamma^{\chi(g)+I}_\chi$, així que els grafs Γ^I_χ i Γ^{r+I}_χ són isomorfs si $r \in \operatorname{Im}(\chi)$.

Amb aquests conceptes, podem donar un resultat que tindrà diverses aplicacions.

Lema 2.3.1. *Si $\Gamma_{a_*} = \Gamma^{[a_*,\infty)}_\chi$ és connex per alguna $a_* \in \mathbb{R}$, llavors $\Gamma_a = \Gamma^{[a,\infty)}_\chi$ és connex $\forall\, a \in \mathbb{R}$.*

Demostració. Mirem primer el cas $a < a_* \implies \Gamma_{a_*} \subseteq \Gamma_a$. Sigui $t \in S$ un element amb $\chi(t) > 0$ i escollim ℓ prou gran tal que $a + \chi(t^\ell) \geq a_*$. Per tots els vèrtexs $g \in \Gamma_a$ el camí $p_g = (g, t^\ell)$ es queda dins de Γ_a i connecta g amb gt^ℓ, que pertany a Γ_{a_*}. Amb això ja podem concloure que Γ_a és connex. Efectivament, donats g_1 i g_2 de Γ_a tenim el camí següent:

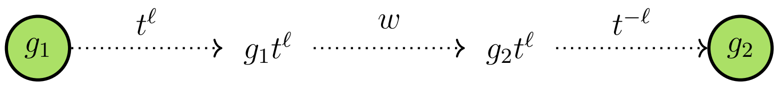


Figura 2.5: Exemple de camí entre dos elements qualsevol de Γ_a.

on w és la paraula que connecta $g_1 t^\ell$ amb $g_2 t^\ell$ dintre de Γ_{a_*}, que existeix segur, ja que el graf Γ_{a_*} és connex.

Per l'altre cas, si $a > a_*$, escollim $h \in G$ tal que $a + \chi(h) < a_*$. Llavors el subgraf $h{\cdot}\Gamma_a$ és connex per l'argument anterior; com $h{\cdot}\Gamma_a \simeq \Gamma_a$, aquest també és connex. □

Corol·lari 2.3.2. *Si $\Gamma_\chi(G,S)$ no és connex, té infinites components connexes.*

Demostració. Si Γ_χ té un nombre finit de components connexes, $\exists\, a < 0$ tal que podem connectar totes aquestes components dins de $\Gamma_\chi^{[a,\infty)}$. Aquest valor de a es pot trobar simplement buscant, de tots els camins p a Γ que connectin entre elles les diferents components connexes, el mínim entre $v_\chi(p)$ i escollint $a \leq v_\chi(p)$.

Això implica que $\Gamma_\chi^{[a,\infty)}$ és connex. Pel Lema 2.3.1 també ho és Γ_χ, que és una contradicció. Concloem que Γ_χ té infinites components connexes. □

2.4 El criteri Σ^1

El fet que un caràcter χ pertanyi o no a l'invariant de G és una propietat global, ja que equival a què el graf Γ_χ sigui connex. En aquesta secció presentem un resultat que ens permet caracteritzar la pertinença a $\Sigma^1(G)$ amb informació local del graf.

Teorema 2.4.1. *Per tot caràcter χ diferent de zero i per tot $t \in S$ amb $\chi(t) > 0$, les condicions següents són equivalents:*

(*i*) *el subgraf Γ_χ és connex,*

(*ii*) *$\forall\, s \in S$, $\exists\, p_s = (t, w_s)$ un camí a Γ des de t fins a st que satisfà $v_\chi(p_s) > v_\chi\big((1,s)\big) = \min\{0, \chi(s)\}$.*

Intuïtivament, la segona condició del teorema ens indica que per cada generador t amb caràcter positiu i cada generador s, existeix un camí p_s de t a st que sempre queda estrictament per sobre (respecte al valor de χ dels vèrtexs) del camí "natural" $(1,s)$. A la Figura 2.6 veiem com queda aquest nou camí en relació amb l'original, en funció de si $\chi(s)$ és positiu, zero o negatiu.

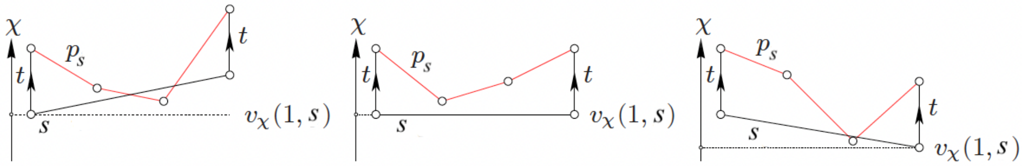


Figura 2.6: Els tres casos per la condició $v_\chi(p_s) > v_\chi\left((1,s)\right)$, tret de [7].

Demostració. Estudiem les dues implicacions.

$(i) \implies (ii)$: Donat $s \in S$, definim $r_s = \min\{\chi(t), \chi(st)\}$. Com que Γ_χ és connex, $\Gamma_\chi^{[r_s,\infty)}$ també ho és pel Lema 2.3.1. Tenim, doncs, un camí $p_s = (t, w_s)$ des de t fins a st dintre de $\Gamma_\chi^{[r_s,\infty)}$ tal que:

$$v_\chi(p_s) \geq r_s = \min\{\chi(t), \chi(st)\} = v_\chi\left((1,s)\right) + \chi(t) > v_\chi\left((1,s)\right).$$

Aquesta construcció la podem replicar $\forall\, s$, així que (ii) és cert.

$(ii) \implies (i)$: Definim $d = \{\min\{v_\chi(p_s) - v_\chi\left((1,s)\right)\} \mid s \in S\}$ i observem que $d > 0$. Volem trobar un camí entre 1 i g $\forall\, g \in G_\chi$ que quedi dintre de Γ_χ. Considerem un camí p des d'1 fins a g a Γ, que és connex. Si p només passa per vèrtexs de Γ_χ, no cal que fem res. Si en algun moment passa per un node amb caràcter negatiu, el manipulem adequadament per tal de visitar només vèrtexs del subgraf positiu. Definim la transformació $T\colon P(\Gamma) \longrightarrow P(\Gamma)$, que donat un camí p substitueix cada aresta (h,s) de p pel camí (h, tw_st^{-1}) i després elimina els subcamins de tipus $(h', t^{-1}t)$. Ho podem visualitzar mitjançant la següent il·lustració del camí $T\left((1, s_1s_2)\right)$, marcat en blau:

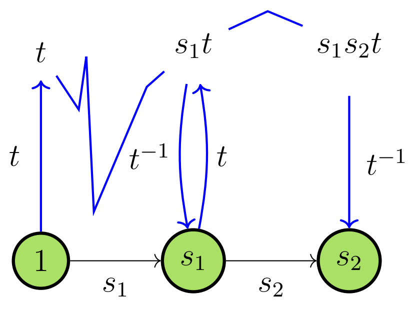


Figura 2.7: Primer pas de la transformació T.

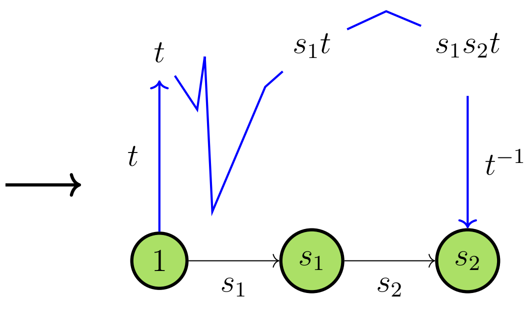


Figura 2.8: Segon pas de la transformació T.

Això implica que per cada canvi de $(1, s)$ a p_s, aquell tros del camí passa de tenir un mínim (respecte al valor del caràcter) a $v_\chi\big((1,s)\big)$ a tenir-lo a $v_\chi(p_s)$ (augmentant en $v_\chi(p_s) - v_\chi\big((1,s)\big) \geq d > 0$) ó a $\chi(1) = 0$ si després de fer aquest intercanvi de camins ja no tenim cap vèrtex amb caràcter negatiu. Com que $d = \{\min\{v_\chi(p_s) - v_\chi\big((1,s)\big)\} \mid s \in S\} > 0$, $T(p)$ satisfà la inequació

$$v_\chi\big(T(p)\big) \geq \min\{v_\chi(p) + d, 0\}$$

i continua connectant 1 amb g. Si iterem T diverses vegades, obtenim una seqüència de camins p, $T(p)$, $T^2(p)$, $\ldots$ entre 1 i g; aquests camins estan cada cop més a prop de quedar-se dins de Γ_χ. Efectivament, com cada cop augmentem $v_\chi\big(T(p)\big)$ en com a mínim d unitats, si $\ell \geq \big|v_\chi(p)\big|/d$, $T^\ell(p)$ passa només per nodes amb caràcter major o igual a 0 $\implies$ Γ_χ és connex. $\square$

Remarca. La condició (ii) del teorema anterior rep el nom de versió geomètrica del criteri Σ^1.

Exposem ara un corol·lari del Teorema 2.4.1, tot i que a causa de la seva importància li donem el títol de teorema.

Teorema 2.4.2. *L'invariant $\Sigma^1(G)$ és un obert de $S(G)$.*

Demostració. Suposem χ un caràcter diferent de 0 de $\Sigma^1(G)$. Escollim t un element de S tal que $\chi(t) > 0$, per la implicació $(i) \implies (ii)$ del Teorema 2.4.1 tenim que, $\forall\, s \in S$, existeix un camí $p_s \in \Gamma(G,S)$ des de t fins a st que satisfà $v_\chi(p_s) > v_\chi\big((1,s)\big)$.

Com que tenim un nombre finit d'inequacions **estrictes**, encara són certes si substituïm χ per un caràcter ψ suficientment a prop de χ. Amb això, podem aplicar la implicació $(ii) \implies (i)$ a ψ i concloure que aquest també pertany a $\Sigma^1(G)$. Per tant, el conjunt obert de $S(G)$

$$\mathcal{O}([\chi]) = \{[\psi] \mid \psi(t) > 0 \text{ i } v_\psi(p_s) > v_\psi\big((1,s)\big) \text{ per } s \in S\}$$

està contingut en $\Sigma^1(G)$. Això és cert $\forall\,[\chi] \in \Sigma^1(G)$, fet que implica que $\Sigma^1(G)$ és un obert de $S(G)$. $\square$

Per poder enunciar la proposició següent, recordem el Lema 1.3.9, que ens garanteix que donat un caràcter χ racional, $\exists\, t \in G$ tal que $\chi(t) = 1$.

Proposició 2.4.3. *Sigui $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ un punt racional de $S(G)$ i $t \in G$ un element amb $\chi(t) = 1$, les següents condicions són equivalents:*

(*i*) $[\chi] \in \Sigma^1(G)$,

(*ii*) $N = \ker(\chi)$ *conté un subgrup fg* $H \leqslant N$ *tal que*

$$t^{-1}Ht \subseteq H \quad i \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^{\ell} H t^{-\ell} = N. \tag{2.4}$$

Demostració. Considerem totes dues implicacions.

(*i*) $\implies$ (*ii*): Prenem $B = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $m \in \mathbb{N}$ un sistema de generadors de G, clarament $B \cup \{t\}$ també genera G. Definim ara $r_i = \chi(s_i) \in \mathbb{Z}$ i $a_i = t^{-r_i} s_i \in N$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$; $\chi(a_i) = 0 \ \forall i$. Podem, per tant, afirmar que $S = \{t\} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$ és un subconjunt generador finit de G, pel Teorema 2.2.2, podem calcular $\Sigma^1(G)$ fent servir S.

Com que estem suposant que $\Gamma(G, S)_\chi$ és connex, la segona implicació del Teorema 2.4.1 ens assegura que, per $i \in \{1, \ldots, m\}$, existeix un camí p_i que connecta t amb $a_i t$ i satisfà $v_\chi(p_i) > v_\chi\big((1, a_i)\big) = 0$, on l'última igualtat és certa ja que $a_i \in \ker(\chi)$; com χ pren valors a $\mathbb{Z}$ podem dir que $v_\chi(p_i) \geq 1$. De fet, com que p_i comença a t i $\chi(t) = 1$, $v_\chi(p_i) = 1$.

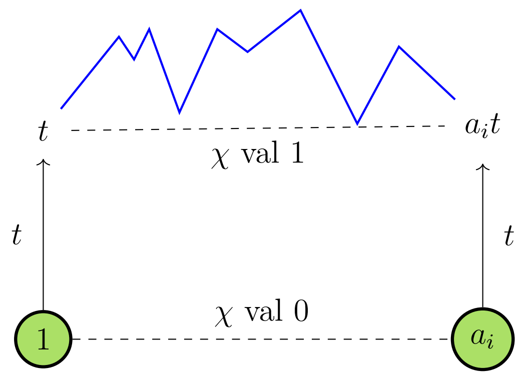


Figura 2.9: En blau, la paraula w_i, que connecta t amb $a_i t$. Es pot apreciar que $v_\chi(p_i) = 1$ i $v_\chi(w_i) \geq 0$.

Sigui w_i una paraula en S tal que $p_i = (t, w_i) \implies a_i t = t w_i \implies t^{-1} a_i t = w_i$. Si volem ara calcular $v_\chi(w_i)$, ens fixem que $v_\chi(p_i) = 1 \implies v_\chi(w_i) \geq 0$, com veiem a la Figura 2.9. Això vol dir que, si estem en la posició j de la paraula w_i i hem passat per n t's, en el que queda de paraula no podran haver-hi més de n t inverses, ja que $\chi(a_i) = 0 \ \forall i$ i s'ha de mantenir $v_\chi(w_i) \geq 0$. Aquesta propietat implica que la primera t tindrà sempre exponent ≥ 1. A més a més, l'última t present a w_i tindrà exponent ≤ -1, ja que si tingués exponent positiu voldria dir que en algun moment hauríem trencat la restricció $v_\chi(w_i) \geq 0$.

Aquest fet es pot reescriure com que w_i és igual a un producte de conjugats de a_i, $a_{i,\ell} = t^{\ell} a_i t^{-\ell}$ amb $\ell \geq 0$. Per veure-ho, expressem w_i mitjançant $u_1t^{k_1}u_2\cdots t^{k_{n-1}}u_nt^{k_n}$, on k_i són enters i $u_i = a_{i_1}\cdots a_{i_{n_i}}$ són paraules en $\{a_1,\dots,a_m\}$ tal que $\{i_1,\dots,i_{n_i}\}$ és un subconjunt d'índexs de $\{1,\dots,m\}$. Amb aquesta notació, duem a terme el següent procés iteratiu:

- **Iteració** $i=1$**:** definim $\ell_1 = k_1$, que és sempre ≥ 0, i substituïm $u_2 = a_{2_1}\cdots a_{2_{n_2}}$ per

$$u_2' = \left(a_{2_1}t^{-\ell_1}\right)\left(t^{\ell_1}a_{2_2}t^{-\ell_1}\right)\cdots\left(t^{\ell_1}a_{2_{n_2}}t^{-\ell_1}\right).$$

  Un cop fet això, definim $\ell_2 = k_1+k_2$. Com que $v_\chi(w_i)\geq 0$ ens assegurem que $\ell_2\geq 0$.

- **Iteració** $i=2$ **a** $n-1$**:** sigui $j=i+1$, fent servir la ℓ_{j-1} definida al pas anterior, substituïm $u_j = a_{j_1}\cdots a_{j_{n_j}}$ per

$$u_j' = \left(a_{j_1}t^{-\ell_{j-1}}\right)\left(t^{\ell_{j-1}}a_{j_2}t^{-\ell_{j-1}}\right)\cdots\left(t^{\ell_{j-1}}a_{j_{n_j}}t^{-\ell_{j-1}}\right).$$

  Un cop fet això, definim $\ell_j = \ell_{j-1}+k_j\geq 0$.

- **Iteració** $i=n$**:** com que k_n sempre és ≤ 0 i $-\ell_{n-1} = k_n$, eliminem l'última t^{k_n} que ja l'haurem posat a la iteració anterior.

Un cop hem fet tots els passos necessaris, arribem a w_i reescrita com un producte de conjugats $a_{i,\ell} = t^\ell a_i t^{-\ell}$ amb $\ell\geq 0$, tal com volíem.

Sigui μ l'índex ℓ més gran pel qual algun conjugat $a_{i,\ell}$ es troba a una de les paraules w_i, definim

$$\mathcal{H} = \{a_{i,\ell}\mid 1\leq i\leq m \text{ i } 0\leq\ell\leq\mu\}.$$

Observem que $\mathcal{H}$ genera un subgrup $H\leqslant N$ ja que $\chi(a_{i,\ell}) = 0\ \forall\, i,\ell$; com que $\mathcal{H}$ és finit, H és fg. Vegem que H satisfà $t^{-1}Ht\subseteq H$:

- si $l>0$ i $a_{i,\ell}\in\mathcal{H}$, llavors $t^{-1}a_{i,\ell}t = t^{-1}t^\ell a_i t^{-\ell}t = t^{\ell-1}a_i t^{-(\ell-1)}\in\mathcal{H}$,
- si $l=0$, llavors $t^{-1}a_{i,0}t = t^{-1}a_i t = w_i\in\mathcal{H}$, perquè w_i és producte d'elements de $\mathcal{H}$ i, com hem escollit μ el màxim índex de ℓ present a una de les paraules, ens assegurem que totes hi pertanyen.

Abans de demostrar la següent condició, demostrem que $\{a_1,\dots,a_m\}$ genera N com a subgrup normal, és a dir, N està generat pels conjugats de $\{a_1,\dots,a_m\}$ per qualsevol element de G. Com que G està generat per S, els conjugats són $\{a_{i,\ell},\ \forall\, 1\leq i\leq m \text{ i } \ell\in\mathbb{Z}\}$. Sigui $n\in N$, expressem-la com una paraula $w\in S$. Com que $\chi(n)=0$, w té el mateix nombre de t que de t inverses. Reescrivim w com $u_1t^{k_1}u_2\cdots t^{k_{n-1}}u_nt^{k_n}$, on k_i són enters i $u_i = a_{i_1}\cdots a_{i_{n_i}}$

són paraules en $\{a_1, \ldots, a_m\}$ tal que $\{i_1, \ldots, i_{n_i}\}$ és un subconjunt d'índexs de $\{1, \ldots, m\}$. Ara podem aplicar a w el procés iteratiu que hem fet anteriorment en aquesta demostració, amb la diferència que no tenim que $v_\chi(w) \geq 0$, així que la positivitat de ℓ_i no es mantindrà necessàriament durant tot el procés. Però l'expressió resultant serà un producte de conjugats $a_{i,\ell}$, ja que $\chi(a) = 0$.

Per veure que la condició $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^\ell H t^{-\ell} = N$ es compleix, observem primer que el fet que $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^\ell H t^{-\ell} \subseteq N$ és obvi, ja que $H \leqslant N$ i N és normal.

Per veure que $N \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^\ell H t^{-\ell}$, considerem $n \in N$ i l'expressem com una paraula w en $\{a_{i,\ell},\ \forall\, 1 \leq i \leq m \text{ i } \ell \in \mathbb{Z}\}$, que hem vist que genera N: $w = t^{\ell_1} a_{i_1} t^{-\ell_1} \cdots t^{\ell_p} a_{i_p} t^{-\ell_p}$ on $\{i_1, \ldots, i_p\}$ és un subconjunt d'índexs de $\{1, \ldots, m\}$. Definim $J = \max\{\ell_1, \ldots, \ell_p\} \geq 0$, i reescrivim n com $t^J(t^{-J} w t^J) t^{-J}$. Ara volem veure que $t^{-J} w t^J \in H$,

$$
\begin{aligned}
t^{-J} w t^J &= t^{-J}(t^{\ell_1} a_{i_1} t^{-\ell_1} \cdots t^{\ell_p} a_{i_p} t^{-\ell_p}) t^J \\
&= \left(t^{-J}(t^{\ell_1} a_{i_1} t^{-\ell_1}) t^J\right) \left(t^{-J}(t^{\ell_2} a_{i_2} t^{-\ell_2}) t^J\right) \cdots \left(t^{-J}(t^{\ell_p} a_{i_p} t^{-\ell_p}) t^J\right) \\
&= \left(t^{\ell_1 - J} a_{i_1} t^{J-\ell_1}\right) \left(t^{\ell_2 - J} a_{i_2} t^{J-\ell_2}\right) \cdots \left(t^{\ell_p - J} a_{i_p} t^{J-\ell_p}\right)
\end{aligned}
$$

i $t^{\ell_i - J} a_{i_j} t^{J-\ell_i} \in H\ \forall\, j \in \{1, \ldots, p\}$: $a_{i_j} = a_{i_j,0} \in H\ \forall\, i$, $\ell_i - J \leq 0$ i $J - \ell_i \geq 0$ perquè J era el màxim exponent de t present a w, i $t^{-1} H t \subseteq H$. Així, cada element de N el puc expressar com $t^\ell h t^{-\ell}$ per uns certs $\ell \in \mathbb{N}$ i $h \in H \implies N \subseteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^\ell H t^{-\ell} \implies \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^\ell H t^{-\ell} = N$.

$(ii) \implies (i)$: Sigui $H \leqslant N = \ker(\chi)$ que obeeix les propietats 2.4, escollim una base finita de generadors de H, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_f\}$ (amb els inversos inclosos).

Afirmem que $S = \{t\} \cup \mathcal{B}$ genera G. Donat un element $g \in G$ amb $\chi(g) = r \in \mathbb{Z} \implies \chi(gt^{-r}) = 0 \in N \implies$ a causa que $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} t^\ell H t^{-\ell} = N$ puc expressar $gt^{-r} = t^\ell w_g t^{-\ell}$ per una certa $\ell \geq 0$ i $w_g \in H$ una paraula en $\mathcal{B}$. Per tant, $g = t^\ell w_g t^{-\ell} t^r \in \langle S \rangle$. Pel Teorema 2.2.2, podem calcular $\Sigma^1(G)$ fent servir S.

Expressem cada conjugat $t^{-1} b_i t$ com una paraula w_i a $\mathcal{B}$; w_i existeix $\forall\, 1 \leq i \leq f$, ja que $t^{-1} H t \subseteq H$. La relació $t^{-1} b_i t = w_i \implies$ el camí $p_i = (t, w_i)$ connecta t amb $b_i t$. El fet que $\mathcal{B}$ genera $H \leqslant N = \ker(\chi) \implies \chi(\mathcal{B}) = \{0\}$, que ens porta a

$$v_\chi(p_i) = v_\chi(w_i) + \chi(t) = 1 > v_\chi\big((1, b_i)\big) = 0\ \forall\, b_i.$$

Per últim, pel generador t, observem que el camí $p_t = (t, t)$ connecta t amb t^2 i $v_\chi(p_t) = v_\chi(t) + \chi(t) = 2 > v_\chi\big((1, t)\big) = v_\chi(t) + \chi(1) = 1$.

Així, χ compleix la versió geomètrica del criteri $\Sigma^1 \underset{2.4.1}{\implies} [\chi] \in \Sigma^1(G)$. $\square$

Corol·lari 2.4.4. *El nucli d'un caràcter racional* $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ *és* $fg \iff \{[\chi], [-\chi]\} \in \Sigma^1(G)$.

Demostració. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $N = \ker(\chi)$ és fg, $H = N$ obeeix les propietats 2.4 perquè el nucli és un subgrup normal i la Proposició 2.4.3 implica que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$.

Com que $\ker(\chi) = \ker(-\chi)$, això també implica que $[-\chi] \in \Sigma^1(G)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sigui $N = \ker(\chi) = \ker(-\chi)$ i un element $t \in G$ amb $\chi(t) = 1$, per la Proposició 2.4.3 tenim que:

- $[\chi] \in \Sigma^1(G) \implies \exists\, A \leqslant N fg$ tal que $t^{-1}At \subseteq A$ i $\bigcup_{\ell \geq 0} t^{\ell} A t^{-\ell} = N$.
- $[-\chi] \in \Sigma^1(G) \implies \exists\, B \leqslant N fg$ tal que $tBt^{-1} \subseteq B$ i $\bigcup_{\ell \leq 0} t^{\ell} B t^{-\ell} = N$.

Siguin $S_A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $S_B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ subconjunts generadors finits d'A i B, respectivament. El primer que observem és que, per la propietat $\bigcup_{\ell \geq 0} t^{\ell} A t^{-\ell} = N$, $N = \langle a_{i,\ell} = t^{\ell} a_i t^{-\ell},\ \forall\, 1 \leq i \leq n \text{ i } \ell \geq 0 \rangle$. Volem arribar a veure que N és fg, per tant, voldríem trobar un subconjunt generador finit partint del que ja tenim.

Com que cada $a_i \in N$, $\exists\, \ell_i \geq 0$ i $b \in B$ tal que $a_i = t^{-\ell_i} b t^{\ell_i}$ perquè $\bigcup_{\ell \leq 0} t^{\ell} B t^{-\ell} = N$. Això implica que $t^{\ell_i} a_i t^{-\ell_i} = b$ i, si $\ell \geq \ell_i$, $t^{\ell} a_i t^{-\ell} \in B$ perquè $tBt^{-1} \subseteq B$. Amb això tenim que $S_N = S_B \cup \{a_{i,\ell},\ 0 \leq \ell \leq \ell_i \text{ i } \forall\, 1 \leq i \leq n\}$ és finit i $N = \langle S_N \rangle \implies N$ és fg. ∎

Capítol 3

Resultats sobre indecidibilitat

La meta final d'aquest capítol és demostrar la indecidibilitat de l'invariant BNS d'un grup: no hi ha cap algoritme que, donada una presentació finita d'un grup G i donat un caràcter racional $\chi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, pugui determinar si $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ o no.

Per arribar a aquest resultat, primer s'han de demostrar diverses coses, que formaran una cadena de resultats que ens portarà a poder demostrar el que volem.

La referència en què ens hem basat per estructurar aquest capítol és [2].

3.1 Resultats previs

Definició 3.1.1. Una **presentació d'un grup** és una manera de representar un grup K. Donat un conjunt X de generadors i R un llistat complet de relacions entre aquests generadors, $K = \langle X \mid R \rangle$ és una presentació de K. Que el llistat R sigui complet vol dir que qualsevol relació entre els elements de K es pot expressar com un producte de conjugats de relacions presents a R.

És sabut que tot grup admet una (de fet, infinites) presentacions. Si un grup admet una presentació amb X i R finits, direm que és fp, **finitament presentat**. Si només X és finit, G serà fg.

Definició 3.1.2. Donada una presentació $H = \langle X \mid R \rangle$ i qualsevol $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ el producte semidirecte $H \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ admet una presentació de la forma

$$\langle X, t \mid R, txt^{-1} = \alpha(x)\ (x \in X) \rangle. \tag{3.1}$$

Direm que un grup K és H-by-$\mathbb{Z}$ si admet una presentació del tipus 3.1 per algun grup H i $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$. Si no ens cal especificar de quin subgrup estem parlant, podem dir que K és $*$-by-$\mathbb{Z}$.

La família de grups H-by-$\mathbb{Z}$ que compleixen una propietat P és

$$[H\text{-by-}\mathbb{Z}]_P = \{H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(H), H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \text{ compleix } P\}.$$

I si H té la propietat P, ens referirem a

$$P\text{-by-}\mathbb{Z} = \{H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(H), H \text{ compleix } P\},$$

que no és necessàriament el mateix que $[H\text{-by-}\mathbb{Z}]_P$.

Concretament, si P és la propietat de ser fg ó fp,

$$\begin{aligned} fg\text{-by-}\mathbb{Z} &= \{H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \mid H\ fg,\ \alpha \in \mathrm{Aut}(H)\}, \\ fp\text{-by-}\mathbb{Z} &= \{H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \mid H\ fp,\ \alpha \in \mathrm{Aut}(H)\}. \end{aligned}$$

En resum, un grup K serà fg-by-$\mathbb{Z}$ (resp. fp-by-$\mathbb{Z}$) si existeix un grup H fg (resp. fp) i $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ tal que K es pot presentar com 3.1.

Proposició 3.1.3. *Sigui K un grup, K és H-by-$\mathbb{Z}$ per un cert $\alpha \in Aut(H)$ $\iff$ $H = \langle X \mid R \rangle \lhd K$ i $K/H \simeq \mathbb{Z}$.*

Demostració. $\boxed{\Rightarrow}$ $K = \langle X, t \mid R, txt^{-1} = \alpha(x)\ (x \in X) \rangle$ i $H = \langle X \rangle$ és clarament subgrup de K.

Vegem ara que H és normal, siguin h' i $h \in H$:

$$\begin{aligned} &hh'h^{-1} \in H, \text{ ja que } H \text{ és subgrup,} \\ &tht^{-1} = \alpha(h) \text{ i } t^{-1}ht = \alpha^{-1}(h) \in H, \text{ aplicant la relació adient.} \end{aligned}$$

Per aquest últim pas, és vital que α sigui un automorfisme per poder usar el seu invers. Com H és subgrup normal, tenim que

$$K/H = \langle X, t \mid R, txt^{-1} = \alpha(x)\ (x \in X) \rangle / H \simeq \langle t \mid t \cdot 1 \cdot t^{-1} = 1 \rangle = \langle t \rangle = \mathbb{Z}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sigui $\pi \colon K \twoheadrightarrow K/H \simeq \mathbb{Z}$ la projecció canònica. Prenem $k \in K$ tal que $\pi(k) = 1$, que existeix doncs π és exhaustiva, i considerem el morfisme

$$\begin{aligned} \gamma \colon K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto kxk^{-1}. \end{aligned}$$

Ara podem considerar $\alpha = \gamma|_H$, la restricció de γ en H, com que H és normal, $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ i definim $H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} = \big\langle X, t \mid R, txt^{-1} = \alpha(x)\ (x \in X)\big\rangle$.

La nostra meta és veure que K és H-by-$\mathbb{Z}$, és a dir, que admet una presentació com 3.1. Per veure-ho trobarem un isomorfisme entre K i $H \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Primer, construïm el següent morfisme:

$$\begin{aligned} f\colon H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x \text{ si } x \in X, \\ t &\longmapsto k. \end{aligned}$$

Per tal que f estigui ben definit, hem de veure que les relacions de $H \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ són respectades per f. En efecte, les relacions de R es compleixen a K, ja que involucren només elements d'X que per f queden igual i es mantenen. A part, $f(txt^{-1}) = kxk^{-1}$ i $f\left(\alpha(x)\right) = \alpha(x)$ perquè $\alpha(x) \in H$; $f(txt^{-1}) = f\left(\alpha(x)\right)$ és cert per definició d'α i concloem que f està ben definit.

Per veure que f és un isomorfisme, construirem la seva inversa. Definim f' com

$$\begin{aligned} f'\colon K &\longrightarrow H \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto \left(gk^{-\pi(g)}\right) t^{\pi(g)}. \end{aligned}$$

Observem que donat $\pi(g) = n \in \mathbb{Z}$, com que $\pi(k) = 1$, $\pi(gk^n) = 0 \implies gk^{-n} \in \ker(\pi) = H$, així que $\left(gk^{-n}\right) t^n$ és un element d'$H \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Vegem que f' és morfisme, siguin $g_1, g_2 \in K$ i $n = \pi(g_1), m = \pi(g_2) \in \mathbb{Z}$ i prenem $f'(g_1) = \left(g_1k^{-n}\right) t^n$ i $f'(g_2) = \left(g_2k^{-m}\right) t^m$, $f'(g_1g_2) = \left(g_1g_2k^{-n-m}\right) t^{n+m}$; calculant a K tenim

$$\begin{aligned} \left(g_1k^{-n}\right) t^n \left(g_2k^{-m}\right) t^m &= g_1k^{-n}(t^n g_2k^{-m}t^{-n})t^nt^m \\ &= g_1k^{-n}\left(\alpha^n(g_2k^{-m})\right) t^nt^m \\ &= g_1k^{-n}k^ng_2k^{-m}k^{-n}t^nt^m \\ &= \left(g_1g_2k^{-n-m}\right) t^{n+m}. \end{aligned}$$

On hem fet servir que $g_2k^{-m} \in H$ i les relacions $txt^{-1} = \alpha(x)$ per $x \in X$.

L'últim pas que ens queda és veure que f i f' són morfismes mútuament inversos:

$f \circ f'$: Sigui $g \in K$, $f\left(f'(g)\right) = f\left((gk^{-\pi(g)})t^{\pi(g)}\right) = gk^{-\pi(g)}k^{\pi(g)} = g.$

$f' \circ f$: Sigui $x \in X$, $f'\left(f(x)\right) = f'(x) = xk^{-\pi(x)}t^{\pi(x)} = xk^0t^0$, ja que $x \in H =$

$\ker(\pi)$. Si prenem t, $f'\big(f(t)\big) = f'(k) = kk^{-\pi(k)}t^{\pi(k)} = kk^{-1}t^1 = t$, ja que k era tal que $\pi(k) = 1$.

Així que $f = (f')^{-1}$ i tenim un isomorfisme entre K i $H \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. $\square$

Proposició 3.1.4. *K és un grup P-by-$\mathbb{Z}$ per una propietat de grups $P \iff \exists\, H \lhd K$ tal que H compleix la propietat P i $K/H \simeq \mathbb{Z}$.* $\square$

Definició 3.1.5. Siguin $K = \big\langle X_K \mid R_K \big\rangle$ i $H = \big\langle X_H \mid R_H \big\rangle$, definim el **producte lliure** entre K i H com

$$K * H = \big\langle X_K \sqcup X_H \mid R_K \sqcup R_H \big\rangle.$$

Això vol dir que $K * H$ està generat pels generadors de K i els de H i les relacions que el governen consisteixen en les relacions de K i les d'H juntes. Les unions són disjuntes donat que estem suposant que no hi ha confusions amb les notacions dels dos grups.

Lema 3.1.6. *Sigui $K = \big\langle X \mid R \big\rangle$ un grup qualsevol amb generadors $X = \{x_j\}_{j \in J}$ i considerem el producte lliure d'infinites còpies de K*

$$\mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} K = \Big\langle X^{(i)}\ (i \in \mathbb{Z}) \mid R^{(i)}\ (i \in \mathbb{Z}) \Big\rangle,$$

on $\Big\langle X^{(i)} \mid R^{(i)} \Big\rangle$ per $i \in \mathbb{Z}$ són còpies disjuntes de la presentació original de K. Llavors

$$\Big(\mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} K\Big) \rtimes_\tau \mathbb{Z} \simeq K * \mathbb{Z},$$

on τ és l'automorfisme de $\ast_{i\in\mathbb{Z}} K$ definit per

$$\tau\colon x_j^{(i)} \longmapsto x_j^{(i+1)} \ \Big(\forall\, i \in \mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\Big).$$

Demostració. Observem primer que τ és un automorfisme de $\ast_{i\in\mathbb{Z}} K$ ja que el conjunt d'índexs és $\mathbb{Z}$, que és infinit per les dues bandes.

Anomenant t al generador de $\mathbb{Z}$, tenim que

$$\Big(\mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} K\Big) \rtimes_\tau \mathbb{Z} = \left\langle \ X^{(i)}\ (i \in \mathbb{Z}), t \ \middle|\ \begin{array}{l} R^{(i)}\ (i \in \mathbb{Z}), \\ t x_j^{(i)} t^{-1} = x_j^{(i+1)} \Big(\forall\, i \in \mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\Big) \end{array} \right\rangle.$$

Primer de tot, observem que podem eliminar les relacions $R^{(i)}\ \forall\, i \neq 0$ sense afectar al grup. Això és perquè en ser còpies de la mateixa presentació, l'única diferència entre dos grups de relacions $R^{(i)}$ i $R^{(j)}$ és la presència de $x_j^{(i)}$ ó $x_j^{(j)}$, però fent servir $tx_j^{(i)}t^{-1} = x_j^{(i+1)}$ podem passar de $x_j^{(i)}$ a $x_j^{(i+1)}$ conjugant per t; sigui $R_j^{(i)} = x_{j_1}^{(i)} \cdots x_{j_n}^{(i)}$ una relació del nivell i, $R_j^{(i+1)} = x_{j_1}^{(i+1)} \cdots x_{j_n}^{(i+1)} = (tx_{j_1}^{(i)}t^{-1}) \cdots (tx_{j_n}^{(i)}t^{-1}) = t(x_{j_1}^{(i)} \cdots x_{j_n}^{(i)})t^{-1} = tR_j^{(i)}t^{-1}$. Així, podem intercanviar $x_j^{(i)}$ i $x_j^{(j)}$ conjugant $|j-i|$ cops per t. Això vol dir que quedant-nos amb només una còpia de les relacions podem obtenir la resta per conjugació que, per tant, són supèrflues. Ens quedem amb $R^{(0)}$.

$$\begin{aligned}\left(\mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} K\right) \rtimes_\tau \mathbb{Z} &= \left\langle \; X^{(i)} \; (i\in\mathbb{Z}), t \;\middle|\; \begin{array}{l} R^{(i)} \; (i\in\mathbb{Z}), \\ tx_j^{(i)}t^{-1} = x_j^{(i+1)} \left(\forall\, i\in\mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\right) \end{array} \right\rangle \\ &\simeq \left\langle \; X^{(i)} \; (i\in\mathbb{Z}), t \;\middle|\; \begin{array}{l} R^{(0)}, \\ tx_j^{(i)}t^{-1} = x_j^{(i+1)} \left(\forall\, i\in\mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\right) \end{array} \right\rangle\end{aligned}$$

Fent un raonament similar, ens fixem que podem obviar la part de $tx_j^{(i)}t^{-1} = x_j^{(i+1)} \left(\forall\, i\in\mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\right)$. La justificació d'això és causada pel fet que podem expressar $x_j^{(i)}$ $\forall\, i \in \mathbb{Z}$ com $t^i x_j^{(0)} t^{-i}$ i si substituïm totes les instàncies de $x_j^{(i)}$ que apareguin al conjunt de generadors (només estaran a $X^{(i)}$ ja que les còpies $K^{(i)}$ són disjuntes) per $t^i x_j^{(0)} t^{-i}$, no ens cal posar-ho com a restricció. De fet, ara tots els generadors diferents de $X^{(0)}$ i t són conjugats d'aquests, així que els podem eliminar.

$$\begin{aligned}\left(\mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} K\right) \rtimes_\tau \mathbb{Z} &= \left\langle \; X^{(i)} \; (i\in\mathbb{Z}), t \;\middle|\; \begin{array}{l} R^{(i)} \; (i\in\mathbb{Z}), \\ tx_j^{(i)}t^{-1} = x_j^{(i+1)} \left(\forall\, i\in\mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\right) \end{array} \right\rangle \\ &\simeq \left\langle \; X^{(i)} \; (i\in\mathbb{Z}), t \;\middle|\; \begin{array}{l} R^{(0)}, \\ tx_j^{(i)}t^{-1} = x_j^{(i+1)} \left(\forall\, i\in\mathbb{Z}, \forall\, x_j^{(i)} \in X^{(i)}\right) \end{array} \right\rangle \\ &\simeq \left\langle X^{(0)}, t \mid R^{(0)} \right\rangle = K \ast \mathbb{Z}\end{aligned}$$ □

Proposició 3.1.7. *El grup* $\ast_{i\in\mathbb{Z}} K$ *és* $fg \iff K$ *és trivial.*

Demostració. $\Leftarrow\!|$ K trivial $\implies K = 1 \implies \ast_{i\in\mathbb{Z}} K = 1 \implies \ast_{i\in\mathbb{Z}} K$ és fg.

$\Rightarrow\!|$ Per contradicció, si K no és trivial $\implies$ K està generat per $n \geq 1$ generadors $\implies \ast_{i\in\mathbb{Z}} K$ estarà generat per n generadors a cada nivell, dels quals n'hi ha infinits $\implies \ast_{i\in\mathbb{Z}} K$ no és fg, contradicció i K ha de ser trivial. □

Corol·lari 3.1.8. *Sigui* $K = \langle X \mid R \rangle$ *una presentació finita d'un grup amb abelianització trivial,* $K_{ab} = 1$, *tenim que:*

$$K \ast \mathbb{Z} \text{ és } fg\text{-by-}\mathbb{Z} \iff K \text{ és trivial.}$$

Demostració. $\Leftarrow\!|$ Fent servir el lema anterior i la mateixa notació, K trivial $\iff$

$(*_{i\in\mathbb{Z}} K)$ $fg \implies K * \mathbb{Z}$ és fg-by-$\mathbb{Z}$, ja que $K * \mathbb{Z} \simeq (*_{i\in\mathbb{Z}} K) \rtimes_\tau \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow\!|$ Pel lema anterior i reutilitzant la notació, $K * \mathbb{Z} \simeq (*_{i\in\mathbb{Z}} K) \rtimes_\tau \mathbb{Z}$.

Amb això tenim que $K * \mathbb{Z}$ és $(*_{i\in\mathbb{Z}} K)$-by-$\mathbb{Z}$, però si veiem que, assumint $K_{ab} = 1$, aquesta és l'única manera d'expressar $K * \mathbb{Z}$ mitjançant la construcció definida a 3.1.2, $K * \mathbb{Z}$ és fg-by-$\mathbb{Z} \implies (*_{i\in\mathbb{Z}} K)$ és $fg \iff K$ trivial.

Veiem primer el següent:

$$(K * \mathbb{Z}) / [K * \mathbb{Z}, K * \mathbb{Z}] = (K * \mathbb{Z})_{ab} \simeq K_{ab} \times \mathbb{Z}_{ab} = \mathbb{Z}_{ab},$$

ja que com estem abelianitzant, volem que tot commuti amb tot i, per tant, canviem el producte lliure pel directe. Ara bé, K_{ab} és trivial i $\mathbb{Z}_{ab} = \mathbb{Z} \implies K_{ab} \times \mathbb{Z}_{ab} = \mathbb{Z}$. La primera conclusió que traurem és que el commutador és un subgrup normal amb quocient isomorf a $\mathbb{Z}$. Demostrem que és l'únic: sigui N un altre subgrup normal tal que $(K * \mathbb{Z}) / N \simeq \mathbb{Z}$ i π_1, π_2 les projeccions mòdul el commutador i N respectivament:

$$\begin{tikzcd} K * \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_2"'] & \mathbb{Z} \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Com que $\mathrm{Im}(\pi_2) \simeq \mathbb{Z}$ és abeliana $\implies [K * \mathbb{Z}, K * \mathbb{Z}] \subseteq \ker(\pi_2) = N \implies$ existeix $\pi_3 \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\pi_2 = \pi_3 \circ \pi_1$.

Com que són projeccions, tant π_1 com π_2 són exhaustius $\implies \pi_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ també ha de ser exhaustiu. Però un morfisme de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que sigui exhaustiu no pot tenir nucli: si $\exists p \in \mathbb{Z}$ diferent de 0 tal que $p \in \ker(\pi_3)$, llavors $p\pi_3(1) = \pi_3(p) = 0$ i l'enter $\pi_3(1)$ seria de torsió, cosa que és una contradicció $\implies \ker(\pi_3) = \{0\} \implies \pi_3$ és injectiu. El diagrama commutatiu ara pren aquesta forma:

$$\begin{tikzcd} K * \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_2"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, two heads, "\pi_3"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

En ser π_3 injectiva, podem fer el raonament següent partint de $k \in N$:

$$0 = \pi_2(k) = \pi_3(\pi_1(k)) \implies \pi_1(k) \in \ker(\pi_3) = \{0\} \implies k \in \ker(\pi_1) = [K * \mathbb{Z}, K * \mathbb{Z}].$$

Vist això, $N \subseteq [K * \mathbb{Z}, K * \mathbb{Z}] \implies N = [K * \mathbb{Z}, K * \mathbb{Z}]$.

Segons la Proposició 3.1.3, $K * \mathbb{Z}$ és $(*_{i\in\mathbb{Z}} K)$-by-$\mathbb{Z} \implies (*_{i\in\mathbb{Z}} K) \lhd K * \mathbb{Z}$ i

$K * \mathbb{Z}/(*_{i\in\mathbb{Z}} K) \simeq \mathbb{Z}$. Afegint això al que acabem de demostrar, $(*_{i\in\mathbb{Z}} K) = [K * \mathbb{Z}, K * \mathbb{Z}]$ i és l'únic subgrup normal tal que el seu quocient és isomorf a $\mathbb{Z} \implies (*_{i\in\mathbb{Z}} K)$ és l'únic subgrup que podem fer servir per expressar $K * \mathbb{Z}$ mitjançant la construcció definida a 3.1.2, com volíem veure. □

A continuació exposem un recull de resultats d'indecidibilitat. Per poder acabar demostrant el teorema al qual volem arribar, ens ajudarem del teorema **Adian-Rabin** enunciat el 1958, però no el demostrarem, ja que els seus continguts escapen el tema central d'aquest document. A [6] trobem un extens recull d'informació sobre el teorema a què ens referim [6, Pàgina 3], així com altres resultats similars.

Definició 3.1.9. Un **algoritme** $\mathfrak{A}$ és un llistat finit d'instruccions o passos que serveixen per resoldre una tasca o executar un problema.

Teorema 3.1.10 (**Adian-Rabin, 1958**). *No existeix cap algoritme $\mathfrak{A}$ que donada una presentació finita pugui determinar si el grup definit per aquesta és el grup trivial.*

Definició 3.1.11. Siguin $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ dues famílies de grups fp's, el **problema de la pertinença** de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$, denotat $PP_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$, consisteix en: donada una presentació $K = \langle X \mid R \rangle$ d'un grup K de $\mathcal{G}$, decideix si el grup pertany o no a $\mathcal{H}$.

Per exemple, $PP_{fp}(ab)$ és el problema de decidir si un grup fp donat és o no abelià.

És important demanar que les famílies siguin de grups finitament presentats, ja que si no la presentació de K podria ser infinita i seria impossible passar-la com a entrada d'un algoritme implementat a un ordinador.

Teorema 3.1.12. *$PP_{\mathcal{H}}(fg\text{-}by\text{-}\mathbb{Z})$ no és decidible, on $\mathcal{H}$ és la subfamília de grups que abelianitzen a $\mathbb{Z}$ (és a dir, tenen rang lliure igual a 1). És a dir, no existeix cap algoritme que prenent una presentació finita d'un grup que tingui $\mathbb{Z}$ com abelianització, pugui determinar si el grup definit per aquesta és fg-by-$\mathbb{Z}$.*

Demostració. Ho provarem per contradicció. Suposem que existeix un algoritme $\mathfrak{U}$ tal que, donada una presentació finita d'un grup de $\mathcal{H}$, determina si el grup és fg-by-$\mathbb{Z}$ o no.

Considerem ara l'algoritme següent $\mathfrak{B}$ per determinar trivialitat, que pren com a entrada una presentació finita $K = \big\langle X \mid R \big\rangle$:

(*i*) abelianitzem K i, fent servir el Teorema 1.1.11, determinem si K_{ab} és trivial o no; si no ho és, K tampoc és trivial i la resposta de l'algoritme és `NO`. Si l'abelianització és trivial, K és un grup perfecte i $K * \mathbb{Z}$ abelianitza a $\mathbb{Z}$.

(*ii*) apliquem $\mathfrak{U}$ a $K * \mathbb{Z} = \langle X, t \mid R \rangle$ per decidir si $K * \mathbb{Z}$ és fg-by-$\mathbb{Z}$.

Segons el Corol·lari 3.1.8, la resposta al segon pas (i, per tant, a l'algoritme) serà `SÍ` $\iff$ K és trivial, però això voldria dir que $\mathfrak{B}$ és un algoritme capaç de determinar si una presentació finita $\langle X \mid R \rangle$ representa el grup trivial o no. Això contradiu el Teorema 3.1.10 i, per tant, $\mathfrak{U}$ no pot existir. $\square$

De fet, podem obtenir un resultat més potent. Ara hem demostrat que $PP_{\mathcal{H}}(fg\text{-by-}\mathbb{Z})$ no és decidible. Clarament, si el problema de pertinença és indecidible per una subfamília d'una família de grups, ho és per tota la família.

Corol·lari 3.1.13. *$PP_{fp}(fg$-by-$\mathbb{Z})$ és indecidible.* $\square$

3.2 Relació amb l'invariant BNS

Proposició 3.2.1. *Un grup G és fg-by-$\mathbb{Z}$ $\iff$ el seu invariant BNS conté dos punts antípodes, és a dir,*

$$G \text{ és } fg\text{-by-}\mathbb{Z} \iff \exists\, [\chi] \in S(G) \text{ tal que } [\chi], [-\chi] \in \Sigma^1(G).$$

Demostració. $\Rightarrow$| G és fg-by-$\mathbb{Z}$ implica que existeix H un subgrup normal fg de G tal que $(G/H) \simeq \mathbb{Z} \implies \exists\, \chi\colon G \twoheadrightarrow (G/H) \simeq \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ amb $\ker(\chi) = H$ fg. Pel Corol·lari 2.4.4, H és $fg \implies [\chi], [-\chi] \in \Sigma^1(G)$.

$\Leftarrow$| Volem veure primer que sempre podem escollir un caràcter $[\chi]$ que compleixi la hipòtesi i tingui rang 1.

Demostrem primer que la presència de punts antípodes a l'invariant implica la presència d'un altre parell de punts antípodes, aquest cop **racionals**. Prenem $[\chi]$ tal que $[\chi], [-\chi] \in \Sigma^1(G)$, pel Teorema 1.3.12 els punts racionals són densos dintre de $S(G)$, així que podem trobar un punt racional $[\chi']$ tan a prop com vulguem de $[\chi]$. El Teorema 2.4.2 implica que $[\chi'] \in \Sigma^1(G)$. Si fem el mateix per $[-\chi]$, trobem que $[-\chi']$ també pertany a l'invariant.

Un cop vist això, pel Corol·lari 2.4.4, $[\chi], [-\chi] \in \Sigma^1(G) \implies H = \ker(\chi) = \ker(-\chi)$ és fg. Com que χ és un caràcter racional, $\chi\colon G \twoheadrightarrow (G/H) \simeq \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ i tenim $H \lhd G$ fg tal que $G/H \simeq \mathbb{Z}$, aplicant la Proposició 3.1.3 G és fg-by-$\mathbb{Z}$. $\square$

Finalment, tenim totes les eines per enunciar i demostrar el teorema final.

Teorema 3.2.2. *No existeix cap algoritme tal que, donada una presentació finita d'un grup G (que abelianitza a $\mathbb{Z}$) i un caràcter racional $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, decideixi si $[\chi]$ pertany a $\Sigma^1(G)$ o no.*

Demostració. Donada una presentació finita d'un grup G amb $G_{ab} = \mathbb{Z}$ i, per tant, amb $S(G)$ contenint només dos punts, podem abelianitzar i construir els dos únics caràcters $\pm\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Suposem ara que existeix un algoritme $\mathfrak{A}$ com el de l'enunciat, podríem llavors saber si χ i $-\chi$ pertanyen a l'invariant BNS de G, és a dir, segons la Proposició 3.2.1, podríem saber algorísmicament si G és fg-by-$\mathbb{Z}$. Això contradiu el Teorema 3.1.12, així que tal algoritme no podria existir. $\square$

Com hem demostrat que no és possible determinar la pertinença d'un caràcter a l'invariant BNS ni tan sols per grups amb abelianització igual a $\mathbb{Z}$, podem afirmar que tampoc és possible per grups fp arbitraris.

Teorema 3.2.3. *No existeix cap algoritme tal que, donada una presentació finita d'un grup G i un caràcter racional $\chi\colon G \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, decideixi si $[\chi]$ pertany a $\Sigma^1(G)$.* $\square$

Similar a abans, G ha de ser fp per tal de poder-lo expressar com l'entrada d'un algoritme. A part, també és important demanar que χ sigui racional, per poder-lo expressar de manera precisa dins un ordinador, per exemple donant un punt amb coordenades enteres $q = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de la semirecta $[\chi] = \{r\chi \mid r \in \mathbb{R}^+\}$ per representar el punt racional de l'esfera $\frac{q}{\|q\|} \in S(G)$ pròpiament dit.

Bibliografia i referències

[1] R. Bieri, W. D. Neumann i R. Strebel. *A geometric invariant of discrete groups.* Invent. Math. 90 (1987), no. 3, 451–477.

[2] Bren Cavallo, Jordi Delgado, Delaram Kahrobaei i Enric Ventura. *Algorithmic recognition of infinite cyclic extensions.* Journal of Pure and Applied Algebra 221 (2017), 2157–2179.

[3] Francesc de Paula Comellas Padró, José Fàbrega Canudas, Ana M. Lladó Sánchez i Oriol Serra Albó. *Matemática discreta.* Edicions UPC, 2001.

[4] Thomas W. Hungerford. *Algebra.* Springer New York, NY, 1974.

[5] Gregory T. Lee. *Abstract Algebra.* Springer Cham, 2018.

[6] Carl-Fredrik Nyberg-Brodda. *The Adian-Rabin Theorem – An English translation.* arXiv, 2022. URL: https://arxiv.org/pdf/2208.08560.pdf.

[7] Ralph Strebel. *Notes on the Sigma invariants.* arXiv, 2012. URL: https://arxiv.org/pdf/1204.0214.pdf.

[8] Wikipedia. *Baumslag-Solitar group.* 2013. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Baumslag%E2%80%93Solitar_group.

[9] Wikipedia. *Cayley graph.* 2006. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley_graph.