Autòmats de Stallings: un camí d'anada i tornada

Enric Ventura

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

Col·loqui de Matemàtiques de la UAB

13 de març de 2024.

Outline

Outline

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació

(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G$;

(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in G$;

(iii) amb inversos: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G,\cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G\times G\to G$ és una operació

(i) associativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c, \forall\, a,b,c\in G$;

(ii) amb element neutre: $\exists 1\in G$ tal que $1\cdot a=a\cdot 1=a, \forall\, a\in G$;

(iii) amb inversos: $\forall\, a\in G, \exists\, a^{-1}\in G$ tal que $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.

Si, a més, $a\cdot b=b\cdot a, \forall\, a,b\in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$; el grup simètric, $(S_n,\circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}),\cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*,\cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot\colon G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G$, $\exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G$, $\exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G$, $\exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot \colon G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ *tal que* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$ *direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).*

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, *i multiplicatius* $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; *el grup dels enters mòdul n,* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; *el grup simètric,* $(S_n, \circ)$; *el grup lineal* $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; *el grup de les funcions racionals* $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; *etc, etc...*

Definició de grup

Definició

Un grup és un parell $(G, \cdot)$ on G és un conjunt, i $\cdot : G \times G \to G$ és una operació
(i) associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a, b, c \in G$;
(ii) amb element neutre: $\exists 1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall\, a \in G$;
(iii) amb inversos: $\forall\, a \in G, \exists\, a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Si, a més, $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in G$ direm que G és un grup Abelià (o commutatiu).

Exemples

Els grups de nombres, additius $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, i multiplicatius $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; el grup dels enters mòdul n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; el grup simètric, $(S_n, \circ)$; el grup lineal $(GL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$; el grup de les funcions racionals $(\mathbb{R}(X)^*, \cdot)$; etc, etc...

Els grups formen un univers inabastable...

Teorema

Tot $\mathbb{R}$-espai vectorial finitament generat és isomorf a un, i només un, d'aquests: $\{0\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$

Estem a anys llum de poder imaginar un teorema de classificació total per a grups ...
Sí que hi ha teoremes de classificació sota hipòtesis extres ...

Teorema

Tot grup Abelià finitament generat és isomorf a

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z},$$

per uns únics naturals $n, m \geqslant 0$, i $d_i > 0$ tals que $d_1 | d_2 | \cdots | d_m$.

Els grups formen un univers inabastable...

Teorema

Tot $\mathbb{R}$-espai vectorial finitament generat és isomorf a un, i només un, d'aquests: $\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...

Estem a anys llum de poder imaginar un teorema de classificació total per a grups ...

Sí que hi ha teoremes de classificació sota hipòtesis extres ...

Teorema

Tot grup Abelià finitament generat és isomorf a

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z},$$

per uns únics naturals $n, m \geqslant 0$, i $d_i > 0$ tals que $d_1 | d_2 | \cdots | d_m$.

Els grups formen un univers inabastable...

Teorema

Tot $\mathbb{R}$-espai vectorial finitament generat és isomorf a un, i només un, d'aquests: $\{0\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$

Estem a anys llum de poder imaginar un teorema de classificació total per a grups ...
Sí que hi ha teoremes de classificació sota hipòtesis extres ...

Teorema

Tot grup Abelià finitament generat és isomorf a

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z},$$

per uns únics naturals $n, m \geqslant 0$, i $d_i > 0$ tals que $d_1 | d_2 | \cdots | d_m$.

Els grups formen un univers inabastable...

Teorema

Tot $\mathbb{R}$-espai vectorial finitament generat és isomorf a un, i només un, d'aquests: $\{0\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$

Estem a anys llum de poder imaginar un teorema de classificació total per a grups ...
Sí que hi ha teoremes de classificació sota hipòtesis extres ...

Teorema

Tot grup Abelià finitament generat és isomorf a

$$\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z},$$

per uns únics naturals $n, m \geqslant 0$*, i* $d_i > 0$ *tals que* $d_1|d_2|\cdots|d_m$.

Els grups formen un univers inabastable...

Però per no abelians, la complexitat és inconmensurablement major...

El famós teorema de classificació de grups finits simples NOMÉS abasta una ínfima part de l'univers dels grups i és complicadíssim ...

Els grups formen un univers inabastable...

Però per no abelians, la complexitat és inconmensurablement major...

El famós teorema de classificació de grups finits simples NOMÉS abasta una ínfima part de l'univers dels grups i és complicadíssim ...

ca.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_classificació_de_grups_simples_finits

VIQUIPÈDIA
L'enciclopèdia lliure

Cerca a Viquipèdia | Cerca | Crea un compte | Inicia la sessió

Teorema de classificació de grups simples finits

25 llengües

Pàgina | Discussió | Mostra | Modifica | Mostra l'historial | Eines

Contingut amaga

- Inici
- El teorema de classificació
- Resum de la demostració del teorema de classificació
  - Grups de rang 2 petits
  - Grups de tipus de component
  - Grups de tipus de característica 2
  - Existència i singularitat dels grups simples

En el camp matemàtic de la teoria de grups, el **teorema de classificació de grups simples finits** es va dissenyar per classificar tots els grups simples finits. Aquests grups es poden veure com els blocs que construeixen tots els grups finits, de la mateixa manera que els nombres primers construeixen els nombres naturals. El teorema de Jordan-Hölder és la manera més precisa d'establir aquest fet sobre els grups finits.

El teorema és principalment una manera convenient de descriure gran quantitat d'escrits matemàtics, fets en desenes de milers de pàgines de més de 500 articles escrits per més de cent autors en revistes matemàtiques, la majoria dels quals van ser publicades entre 1955 i 1983, donant cabuda a dubtar de la validesa de la seva demostració i la seva completesa, per la seva longitud i complexitat.

El teorema de classificació [modifica]

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Tot i així ...

Tot i així ..., és sorprenent que siguem capaços de formular i (demostrar amb relativa facilitat) teoremes de l'estil ...

Teorema

Sigui G un grup. Llavors, G és isomorf a $\mathbb{F}_A/N$, per cert grup lliure $\mathbb{F}_A$ i cert subgrup normal $N \trianglelefteq \mathbb{F}_A$.

Aquest teorema dóna molta rellevància als grups lliures:

- *Visió optimista: contenen TOTA la infomació algebraica sobre ... TOTS els grups de l'univers ...*
- *Visió pessimista: el seu reticle de subgrups (normals) ha de ser ... forçosament complicadíssim ...*

Outline

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, és un monoide amb l'operació de concatenació: $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada 1.*
- *Definim longitud com $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.*
- *Com que $|u \cdot v| = |u| + |v|$, ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, i treballarem al monoide $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra, $w = ua^{\epsilon}a^{-\epsilon}v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, *és un monoide amb l'operació de concatenació:* $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada* 1.
- *Definim longitud com* $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.
- *Com que* $|u \cdot v| = |u| + |v|$, *ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, *i treballarem al monoide* $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ *és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra,* $w = ua^{\epsilon}a^{-\epsilon}v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. *Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.*

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, és un monoide amb l'operació de concatenació: $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada 1.*
- *Definim longitud com $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.*
- *Com que $|u \cdot v| = |u| + |v|$, ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, i treballarem al monoide $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra, $w = ua^{\epsilon}a^{-\epsilon}v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, és un monoide amb l'operació de concatenació: $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada 1.*
- *Definim longitud com $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.*
- *Com que $|u \cdot v| = |u| + |v|$, ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, i treballarem al monoide $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra, $w = ua^{\epsilon}a^{-\epsilon}v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, és un monoide amb l'operació de concatenació: $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada 1.*
- *Definim longitud com $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.*
- *Com que $|u \cdot v| = |u| + |v|$, ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, i treballarem al monoide $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra, $w = u a^{\epsilon} a^{-\epsilon} v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, *és un monoide amb l'operació de concatenació:* $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada* 1.
- *Definim longitud com* $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.
- *Com que* $|u \cdot v| = |u| + |v|$, *ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, *i treballarem al monoide* $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ *és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra,* $w = ua^{\epsilon}a^{-\epsilon}v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. *Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.*

Els grups lliures

Definició

Sigui A un conjunt (dit alfabet). El conjunt de paraules (formals), $A^* = \{a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in A,\ n \geqslant 0\}$, és un monoide amb l'operació de concatenació: $(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) \cdot (a_{j_1} \cdots a_{j_m}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_{j_1} \cdots a_{j_m}$.

- *El neutre és la (l'única) paraula buida, denotada 1.*
- *Definim longitud com $|a_{i_1} \cdots a_{i_n}| = n$; $|1| = 0$.*
- *Com que $|u \cdot v| = |u| + |v|$, ningú té invers (excepte l'1).*

Per construir un grup, duplicarem l'alfabet amb inverses (formals) de lletres, $A^{\pm} = A \sqcup A^{-1}$, i treballarem al monoide $(A^{\pm})^*$.

Definició

Una cancel·lació en una paraula $w \in (A^{\pm})^*$ és un parell de lletres consecutives una inversa de l'altra, $w = ua^{\epsilon}a^{-\epsilon}v$, $u, v \in (A^{\pm})^*$, $\epsilon = \pm 1$. Diem que w és reduïda si no conté cap cancel·lació.

Els grups lliures

Definició

Al monoide $(A^{\pm})^*$ hi posem la relació d'equivalència:

$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad$ *es pot passar de u a v amb una seqüència finita de cancel·lacions/insercions elementals.*

Observació

El conjunt $\mathbb{F}_A = (A^{\pm})^* / \sim$ amb la concatenació, $[u] \cdot [v] = [uv]$, té estructura de grup:

- $\cdot$ *és associatiu;*
- *l'element neutre és $[1]$;*
- *l'invers de $[a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}]$ és $[a_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots a_{i_1}^{-\epsilon_1}]$.*

Lema

Tota classe d'equivalència $[w] \in \mathbb{F}_A$ conté una i només una paraula reduïda, denotada $\overline{w}$.

Els grups lliures

Definició

Al monoide $(A^{\pm})^*$ hi posem la relació d'equivalència:

$u \sim v \quad \Leftrightarrow$ *es pot passar de u a v amb una seqüència finita de cancel·lacions/insercions elementals.*

Observació

El conjunt $\mathbb{F}_A = (A^{\pm})^* / \sim$ amb la concatenació, $[u] \cdot [v] = [uv]$, té estructura de grup:

- $\cdot$ *és associatiu;*
- *l'element neutre és $[1]$;*
- *l'invers de $[a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}]$ és $[a_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots a_{i_1}^{-\epsilon_1}]$.*

Lema

Tota classe d'equivalència $[w] \in \mathbb{F}_A$ conté una i només una paraula reduïda, denotada $\overline{w}$.

Els grups lliures

Definició

Al monoide $(A^{\pm})^*$ hi posem la relació d'equivalència:

$u \sim v \quad \Leftrightarrow$ *es pot passar de u a v amb una seqüència finita de cancel·lacions/insercions elementals.*

Observació

El conjunt $\mathbb{F}_A = (A^{\pm})^* / \sim$ amb la concatenació, $[u] \cdot [v] = [uv]$, té estructura de grup:

- $\cdot$ *és associatiu;*
- *l'element neutre és $[1]$;*
- *l'invers de $[a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}]$ és $[a_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots a_{i_1}^{-\epsilon_1}]$.*

Lema

Tota classe d'equivalència $[w] \in \mathbb{F}_A$ conté una i només una paraula reduïda, denotada $\overline{w}$.

Els grups lliures

Definició

Al monoide $(A^{\pm})^*$ hi posem la relació d'equivalència:

$u \sim v \quad \Leftrightarrow$ *es pot passar de u a v amb una seqüència finita de cancel·lacions/insercions elementals.*

Observació

El conjunt $\mathbb{F}_A = (A^{\pm})^* / \sim$ amb la concatenació, $[u] \cdot [v] = [uv]$, té estructura de grup:

- *$\cdot$ és associatiu;*
- *l'element neutre és $[1]$;*
- *l'invers de $[a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}]$ és $[a_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots a_{i_1}^{-\epsilon_1}]$.*

Lema

Tota classe d'equivalència $[w] \in \mathbb{F}_A$ conté una i només una paraula reduïda, denotada $\overline{w}$.

Els grups lliures

Definició

Al monoide $(A^{\pm})^*$ hi posem la relació d'equivalència:

$u \sim v \quad \Leftrightarrow$ *es pot passar de u a v amb una seqüència finita de cancel·lacions/insercions elementals.*

Observació

El conjunt $\mathbb{F}_A = (A^{\pm})^* / \sim$ amb la concatenació, $[u] \cdot [v] = [uv]$, té estructura de grup:

- *$\cdot$ és associatiu;*
- *l'element neutre és $[1]$;*
- *l'invers de $[a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}]$ és $[a_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots a_{i_1}^{-\epsilon_1}]$.*

Lema

Tota classe d'equivalència $[w] \in \mathbb{F}_A$ conté una i només una paraula reduïda, denotada $\overline{w}$.

Els grups lliures

Definició

Al monoide $(A^{\pm})^*$ hi posem la relació d'equivalència:

$u \sim v \quad \Leftrightarrow$ *es pot passar de u a v amb una seqüència finita de cancel·lacions/insercions elementals.*

Observació

El conjunt $\mathbb{F}_A = (A^{\pm})^* / \sim$ amb la concatenació, $[u] \cdot [v] = [uv]$, té estructura de grup:

- $\cdot$ *és associatiu;*
- *l'element neutre és $[1]$;*
- *l'invers de $[a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}]$ és $[a_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots a_{i_1}^{-\epsilon_1}]$.*

Lema

Tota classe d'equivalència $[w] \in \mathbb{F}_A$ conté una i només una paraula reduïda, denotada $\overline{w}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ es pot pensar com $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \text{ reduïda}\}$ amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim rang com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. El grup lliure F_1 és $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ amb l'operació $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Això és ... $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. El grup lliure $\mathbb{F}_2$ és

$$R_2 = \{1, \; a, a^{-1}, b, b^{-1}, \; a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2}, \; a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ *es pot pensar com* $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \textit{ reduïda}\}$ *amb l'operació* $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim rang com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. *El grup lliure* F_1 *és* $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ *amb l'operació* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. *Això és ...* $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. *El grup lliure* $\mathbb{F}_2$ *és*

$$R_2 = \{1, \\ a, a^{-1}, b, b^{-1}, \\ a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2}, \\ a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ *es pot pensar com* $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \text{ reduïda}\}$ *amb l'operació* $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim rang com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. *El grup lliure* F_1 *és* $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ *amb l'operació* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. *Això és ...* $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. *El grup lliure* $\mathbb{F}_2$ *és*

$$R_2 = \{1,\; a, a^{-1}, b, b^{-1},\; a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2},\; a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ es pot pensar com $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \text{ reduïda}\}$ amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim rang com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. El grup lliure F_1 és $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ amb l'operació $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Això és ... $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. El grup lliure $\mathbb{F}_2$ és $R_2 = \{1,$

$$a, a^{-1}, b, b^{-1},$$
$$a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2},$$
$$a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ *es pot pensar com* $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \text{ reduïda}\}$ *amb l'operació* $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim rang com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. *El grup lliure* F_1 *és* $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ *amb l'operació* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. *Això és ...* $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. *El grup lliure* $\mathbb{F}_2$ *és* $R_2 = \{1,$

$$a, a^{-1}, b, b^{-1},$$

$$a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2},$$

$$a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ *es pot pensar com* $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \text{ reduïda}\}$ *amb l'operació* $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim* rang *com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. *El grup lliure* F_1 *és* $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ *amb l'operació* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. *Això és* $\ldots \mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. *El grup lliure* $\mathbb{F}_2$ *és* $R_2 = \{1,$

$$a, a^{-1}, b, b^{-1},$$

$$a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2},$$

$$a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures

Per tant, $\mathbb{F}_A$ es pot pensar com $R_A = \{w \in (A^{\pm 1})^* \mid w \text{ reduïda}\}$ amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Teorema

$\mathbb{F}_A \simeq \mathbb{F}_B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$. *Definim rang com* $\mathrm{rk}(\mathbb{F}_A) = |A|$.

Exemple

Prenem $A = \{a\}$. El grup lliure F_1 és $R_A = \{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots\}$ amb l'operació $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Això és . . . $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

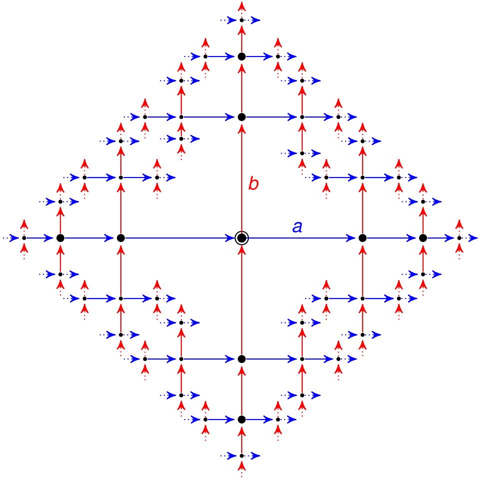
Exemple

Prenem $A = \{a, b\}$. El grup lliure $\mathbb{F}_2$ és

$$R_2 = \{1,\; a, a^{-1}, b, b^{-1},\; a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, b^{-2},\; a^3, a^2b, a^2b^{-1}, \ldots\},$$

amb l'operació $u \cdot v = \overline{uv}$.

Els grups lliures



Els grups lliures

Observeu que si abelianitzem $\mathbb{F}_n$ (i.e., fem quocient pel commutador $[\mathbb{F}_n : \mathbb{F}_n]$) obtenim:

$$\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \{a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}) \cdot (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}) = a_1^{r_1+s_1} \cdots a_n^{r_n+s_n}.$$

Això és ... $\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^n$ (s'anomenen grups lliure-abelians).

Els subgrups de $\mathbb{Z}^n$ són molt fàcils d'entendre i de tractar:

- *Són exactament els múltiples dels conjunts de solucions de sistemes d'equacions lineals.*
- *Tot subgrup $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ és $H \simeq \mathbb{Z}^m$ amb $0 \leqslant m \leqslant n$.*
- *Si $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ i $H \simeq \mathbb{Z}^n$ llavors $H = \mathbb{Z}^n$, llevat múltiples.*

Els grups lliures

Observeu que si abelianitzem $\mathbb{F}_n$ (i.e., fem quocient pel commutador $[\mathbb{F}_n : \mathbb{F}_n]$) obtenim:

$$\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \{a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}) \cdot (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}) = a_1^{r_1+s_1} \cdots a_n^{r_n+s_n}.$$

Això és ... $\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^n$ (s'anomenen grups lliure-abelians).

Els subgrups de $\mathbb{Z}^n$ són molt fàcils d'entendre i de tractar:

- *Són exactament els múltiples dels conjunts de solucions de sistemes d'equacions lineals.*
- *Tot subgrup $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ és $H \simeq \mathbb{Z}^m$ amb $0 \leqslant m \leqslant n$.*
- *Si $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ i $H \simeq \mathbb{Z}^n$ llavors $H = \mathbb{Z}^n$, llevat múltiples.*

Els grups lliures

Observeu que si abelianitzem $\mathbb{F}_n$ (i.e., fem quocient pel commutador $[\mathbb{F}_n : \mathbb{F}_n]$) obtenim:

$$\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \{a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}) \cdot (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}) = a_1^{r_1+s_1} \cdots a_n^{r_n+s_n}.$$

Això és ... $\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^n$ (s'anomenen grups lliure-abelians).

Els subgrups de $\mathbb{Z}^n$ són molt fàcils d'entendre i de tractar:

- *Són exactament els múltiples dels conjunts de solucions de sistemes d'equacions lineals.*
- *Tot subgrup $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ és $H \simeq \mathbb{Z}^m$ amb $0 \leqslant m \leqslant n$.*
- *Si $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ i $H \simeq \mathbb{Z}^n$ llavors $H = \mathbb{Z}^n$, llevat múltiples.*

Els grups lliures

Observeu que si abelianitzem $\mathbb{F}_n$ (i.e., fem quocient pel commutador $[\mathbb{F}_n : \mathbb{F}_n]$) obtenim:

$$\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \{a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}) \cdot (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}) = a_1^{r_1+s_1} \cdots a_n^{r_n+s_n}.$$

Això és ... $\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^n$ (s'anomenen grups lliure-abelians).

Els subgrups de $\mathbb{Z}^n$ són molt fàcils d'entendre i de tractar:

- *Són exactament els múltiples dels conjunts de solucions de sistemes d'equacions lineals.*
- *Tot subgrup $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ és $H \simeq \mathbb{Z}^m$ amb $0 \leqslant m \leqslant n$.*
- *Si $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ i $H \simeq \mathbb{Z}^n$ llavors $H = \mathbb{Z}^n$, llevat múltiples.*

Els grups lliures

Observeu que si abelianitzem $\mathbb{F}_n$ (i.e., fem quocient pel commutador $[\mathbb{F}_n : \mathbb{F}_n]$) obtenim:

$$\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \{a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n} \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}) \cdot (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}) = a_1^{r_1+s_1} \cdots a_n^{r_n+s_n}.$$

Això és . . . $\mathbb{F}_n^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^n$ (s'anomenen grups lliure-abelians).

Els subgrups de $\mathbb{Z}^n$ són molt fàcils d'entendre i de tractar:

- *Són exactament els múltiples dels conjunts de solucions de sistemes d'equacions lineals.*
- *Tot subgrup $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ és $H \simeq \mathbb{Z}^m$ amb $0 \leqslant m \leqslant n$.*
- *Si $H \leqslant \mathbb{Z}^n$ i $H \simeq \mathbb{Z}^n$ llavors $H = \mathbb{Z}^n$, llevat múltiples.*

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:
- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4, 1, 3) \in H = \langle (2, 1, -1), (0, 0, 1), (2, 1, 2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$? Resulta que $H = \langle (2, 1, -1), (0, 0, 1) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4, 1, 3) \notin H$).

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4,1,3) \in H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$? Resulta que $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4,1,3) \notin H$.

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4, 1, 3) \in H = \langle (2, 1, -1), (0, 0, 1), (2, 1, 2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$?
Resulta que $H = \langle (2, 1, -1), (0, 0, 1) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4, 1, 3) \notin H$).

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4,1,3) \in H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$?
Resulta que $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4,1,3) \notin H$).

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4,1,3) \in H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$?
Resulta que $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4,1,3) \notin H$.

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4,1,3) \in H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$?

Resulta que $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4,1,3) \notin H$.

El problema de la pertinença

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Problema (de la pertinença a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $g, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions que descriuen $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$;*
- *comprovem si el vector g les compleix o no.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

És cert que $(4,1,3) \in H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$?
Resulta que $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, i concloem que $(4,1,3) \notin H$).

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle$, $K = \langle (1,1,1), (2,2,1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.
Tenim $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle$, $K = \langle (1,1,1), (2,2,1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.

Tenim $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$. (Llevat control de múltiples).*

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle$, $K = \langle (1,1,1), (2,2,1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.
Tenim $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:
- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle$, $K = \langle (1,1,1), (2,2,1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.

Tenim $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle$, $K = \langle (1,1,1), (2,2,1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.

Tenim $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:
- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2, 1, -1), (0, 0, 1), (2, 1, 2) \rangle$, $K = \langle (1, 1, 1), (2, 2, 1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.

Tenim $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$.

El problema de la intersecció

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Problema (de la intersecció a $\mathbb{Z}^n$)

Donats vectors $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{Z}^n$:

- *calculem les equacions de $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$ i de $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle$;*
- *les posem juntes en un sol sistema, i el resolem per obtenir generadors de $H \cap K$.*

(Llevat control de múltiples).

Exemple

Calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle (2,1,-1), (0,0,1), (2,1,2) \rangle$, $K = \langle (1,1,1), (2,2,1) \rangle \leqslant \mathbb{Z}^3$.

Tenim $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = 2y\}$, $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y\}$ i, per tant, $H \cap K = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x = y = 0\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?

$$\left.\begin{array}{rcll} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?

$$\left.\begin{array}{lcll} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?

$$\left.\begin{array}{rcrl} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?

$$\left.\begin{array}{rcrl} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- *En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?*

$$\left.\begin{array}{rcll} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H?$, • $w = b \in H?$, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H?$
- *En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?*

$$\left.\begin{array}{rcll} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H?$, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H?$

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- *En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?*

$$\left.\begin{array}{rcll} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; ... $w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a $\mathbb{F}_2$

Problema (de la pertinença)

Sigui G un grup. Donats $g, h_1, \ldots, h_r \in G$, decidir si $g \in H$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$.

Exemple

Considerem $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_{\{a,b\}}$ i el subgroup $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant \mathbb{F}_2$, on $u_1 = a^{-1}bab^{-1}$, $u_2 = a^3$, i $u_3 = abab^{-1}$.

- $w = a \in H$?, • $w = b \in H$?, • $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?
- *En cas afirmatiu, sabries espressar w com a producte (únic?) en $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$?*

$$\left.\begin{array}{rcll} |u_1|_b & = & |a^{-1}bab^{-1}|_b & = 0 \\ |u_2|_b & = & |a^3|_b & = 0 \\ |u_3|_b & = & |abab^{-1}|_b & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b \notin H.$$

Però $|a|_b = 0$; $\ldots w = a \in H$?, $w = aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$?

El problema de la pertinença a F_2

Després de calcular una bona estona . . .

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$$

$$\begin{aligned} u_3 u_1^{-1} u_2^{-1} u_3 u_1^{-1} &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-3})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Per tant, . . . SÍ, $w = a \in H$!!!

- Aquesta expressió és única?
- N'hi ha de més senzilles?
- Podem trobar/entendre totes les possibles?
- . . .

El problema de la pertinença a F_2

Després de calcular una bona estona ...

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$$

$$\begin{aligned} u_3 u_1^{-1} u_2^{-1} u_3 u_1^{-1} &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-3})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Per tant, ... SÍ, $w = a \in H$!!!

- Aquesta expressió és única?
- N'hi ha de més senzilles?
- Podem trobar/entendre totes les possibles?
- ...

El problema de la pertinença a F_2

Després de calcular una bona estona . . .

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$$

$$\begin{aligned} u_3 u_1^{-1} u_2^{-1} u_3 u_1^{-1} &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-3})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Per tant, . . . SÍ, $w = a \in H$!!!

- Aquesta expressió és única?
- N'hi ha de més senzilles?
- Podem trobar/entendre totes les possibles?
- . . .

El problema de la pertinença a F_2

Després de calcular una bona estona . . .

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$$

$$\begin{aligned} u_3 u_1^{-1} u_2^{-1} u_3 u_1^{-1} &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-3})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Per tant, . . . SÍ, $w = a \in H$!!!

- Aquesta expressió és única?
- N'hi ha de més senzilles?
- Podem trobar/entendre totes les possibles?
- . . .

El problema de la pertinença a F_2

Després de calcular una bona estona ...

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$$

$$\begin{aligned} u_3 u_1^{-1} u_2^{-1} u_3 u_1^{-1} &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-3})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Per tant, ... SÍ, $w = a \in H$!!!

- Aquesta expressió és única?
- N'hi ha de més senzilles?
- Podem trobar/entendre totes les possibles?
- ...

El problema de la pertinença a F_2

Després de calcular una bona estona ...

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$$

$$\begin{aligned} u_3 u_1^{-1} u_2^{-1} u_3 u_1^{-1} &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-3})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Per tant, ... SÍ, $w = a \in H$!!!

- Aquesta expressió és única?
- N'hi ha de més senzilles?
- Podem trobar/entendre totes les possibles?
- ...

El problema de la intersecció a F_2

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Exemple

Considerem $F_2 = F_{\{a,b\}}$ i els subgrups

$$\begin{array}{rcl} H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, & i & K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2 \\ u_1 = b, & & v_1 = ab, \\ u_2 = a^3, & & v_2 = a^3, \\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a; & & v_3 = a^{-1}ba. \end{array}$$

Com podem trobar generadors de $H \cap K$? O simplement elements?

El problema de la intersecció a F_2

Problema (de la intersecció)

Sigui G un grup. Donats $h_1, \ldots, h_r, k_1, \ldots, k_s \in G$, calcular generadors per $H \cap K$, on $H = \langle h_1, \ldots, h_r \rangle$, $K = \langle k_1, \ldots, k_s \rangle \leqslant G$.

Exemple

Considerem $F_2 = F_{\{a,b\}}$ i els subgrups

$$\begin{aligned} H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle &\leqslant F_2, \quad i \quad & K &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2 \\ u_1 &= b, & v_1 &= ab, \\ u_2 &= a^3, & v_2 &= a^3, \\ u_3 &= a^{-1}bab^{-1}a; & v_3 &= a^{-1}ba. \end{aligned}$$

Com podem trobar generadors de $H \cap K$? O simplement elements?

El problema de la intersecció a F_2

Exemple

$$H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a^3, \quad u_3 = a^{-1}bab^{-1}a;$$

$$K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2, \quad v_1 = ab, \quad v_2 = a^3, \quad v_3 = a^{-1}ba.$$

$$\begin{aligned} H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K, \\ H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K, \\ H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K, \end{aligned}$$

algú més?

$H \cap K = \langle a^3,\ b^{-1}a^3b,\ a^{-1}ba^3b^{-1}a \rangle$? ... *o calen més generadors ?*

El problema de la intersecció a F_2

Exemple

$$H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a^3, \quad u_3 = a^{-1}bab^{-1}a;$$

$$K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2 \quad v_1 = ab, \quad v_2 = a^3, \quad v_3 = a^{-1}ba.$$

$$H \ni u_2 = a^3 = v_2 \in K,$$
$$H \ni u_1^{-1}u_2u_1 = b^{-1}a^3b = v_1^{-1}v_2v_1 \in K,$$
$$H \ni u_3^3 = a^{-1}ba^3b^{-1}a = v_3v_2v_3^{-1} \in K,$$

algú més?

$H \cap K = \langle a^3, b^{-1}a^3b, a^{-1}ba^3b^{-1}a \rangle$? ... *o calen més generadors ?*

El problema de la intersecció a F_2

Exemple

$$H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a^3, \quad u_3 = a^{-1}bab^{-1}a;$$

$$K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2, \quad v_1 = ab, \quad v_2 = a^3, \quad v_3 = a^{-1}ba.$$

$$\begin{aligned} H \ni u_2 &= a^3 = v_2 \in K, \\ H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b = v_1^{-1}v_2v_1 \in K, \\ H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a = v_3v_2v_3^{-1} \in K, \end{aligned}$$

algú més?

$H \cap K = \langle a^3,\ b^{-1}a^3b,\ a^{-1}ba^3b^{-1}a \rangle$? ... *o calen més generadors ?*

El problema de la intersecció a F_2

Exemple

$$H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a^3, \quad u_3 = a^{-1}bab^{-1}a;$$

$$K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2, \quad v_1 = ab, \quad v_2 = a^3, \quad v_3 = a^{-1}ba.$$

$$\begin{aligned} H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K, \\ H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K, \\ H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K, \end{aligned}$$

algú més?

$H \cap K = \langle a^3, b^{-1}a^3b, a^{-1}ba^3b^{-1}a \rangle$? ... *o calen més generadors ?*

El problema de la intersecció a F_2

Exemple

$$H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a^3, \quad u_3 = a^{-1}bab^{-1}a;$$

$$K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2 \quad v_1 = ab, \quad v_2 = a^3, \quad v_3 = a^{-1}ba.$$

$$\begin{aligned} H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K, \\ H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K, \\ H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K, \end{aligned}$$

algú més?

$H \cap K = \langle a^3, b^{-1}a^3b, a^{-1}ba^3b^{-1}a \rangle$? ... *o calen més generadors* ?

El problema de la intersecció a F_2

Exemple

$$H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \leqslant F_2, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a^3, \quad u_3 = a^{-1}bab^{-1}a;$$

$$K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leqslant F_2 \quad v_1 = ab, \quad v_2 = a^3, \quad v_3 = a^{-1}ba.$$

$$\begin{aligned} H \ni u_2 &= a^3 = v_2 \in K, \\ H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b = v_1^{-1}v_2v_1 \in K, \\ H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a = v_3v_2v_3^{-1} \in K, \end{aligned}$$

algú més?

$H \cap K = \langle a^3,\ b^{-1}a^3b,\ a^{-1}ba^3b^{-1}a \rangle$? . . . *o calen més generadors ?*

Outline

Autòmats de Stallings

OBJECTIU: *Donat A, construir una bijecció algorísmica:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{A-autòmats de Stallings} \\ \textit{(finit, determinista, trim)} \end{array} \right\} \leftrightarrow \{\textit{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\}.$$

Definició

Donat un A-autòmat Γ, definim $\langle \Gamma \rangle = \{\ell(\gamma) \mid \gamma$ camí tancat a $\odot\} \leqslant \mathbb{F}_A$.

Definició

Donat $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \mathbb{F}_A$, definim l'autòmat flor, $\mathrm{Fl}(U)$ …

Observació

És finit, trim, …i determinista excepte potser a $\odot$.

Autòmats de Stallings

OBJECTIU: *Donat A, construir una bijecció algorísmica:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{A-autòmats de Stallings} \\ \textit{(finit, determinista, trim)} \end{array} \right\} \leftrightarrow \{\textit{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\}.$$

Definició

Donat un A-autòmat Γ, *definim* $\langle \Gamma \rangle = \{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ camí tancat a } \odot\} \leqslant \mathbb{F}_A$.

Definició

Donat $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \mathbb{F}_A$, *definim l'autòmat flor,* $\mathrm{Fl}(U)$ ...

Observació

És finit, trim, ... i determinista excepte potser a $\odot$.

Autòmats de Stallings

OBJECTIU: *Donat A, construir una bijecció algorísmica:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{A-autòmats de Stallings} \\ \textit{(finit, determinista, trim)} \end{array} \right\} \leftrightarrow \{\textit{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\}.$$

Definició

Donat un A-autòmat Γ, *definim* $\langle \Gamma \rangle = \{\ell(\gamma) \mid \gamma$ *camí tancat a* $\odot\} \leqslant \mathbb{F}_A$.

Definició

Donat $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \mathbb{F}_A$, *definim l'autòmat flor,* $\mathrm{Fl}(U)$ ...

Observació

És finit, trim, ... i determinista excepte potser a $\odot$.

Autòmats de Stallings

OBJECTIU: *Donat A, construir una bijecció algorísmica:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{A-autòmats de Stallings} \\ \textit{(finit, determinista, trim)} \end{array} \right\} \leftrightarrow \{\textit{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\}.$$

Definició

Donat un A-autòmat Γ, *definim* $\langle \Gamma \rangle = \{\ell(\gamma) \mid \gamma \textit{ camí tancat a } \odot\} \leqslant \mathbb{F}_A$.

Definició

Donat $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \mathbb{F}_A$, *definim l'autòmat flor,* $\mathrm{Fl}(U)$ ...

Observació

És finit, trim, ... i determinista excepte potser a $\odot$.

Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

Autòmats de Stallings

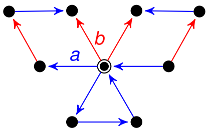
Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

L'autòmat flor $\mathrm{Fl}(U)$, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, és el següent:

Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

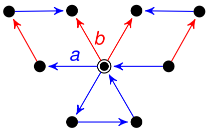
L'autòmat flor $\mathrm{Fl}(U)$, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, és el següent:



Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

L'autòmat flor $\mathrm{Fl}(U)$, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, és el següent:

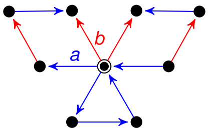


Per aconseguir determinisme fem plegaments de Stallings:

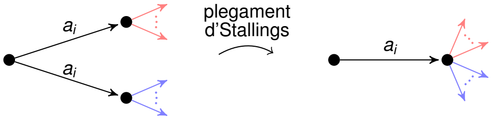
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

L'autòmat flor $\mathrm{Fl}(U)$, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, és el següent:



Per aconseguir determinisme fem plegaments de Stallings:



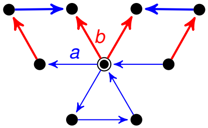
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^{3}}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

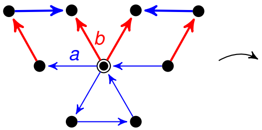
$\Gamma_0 = \mathrm{Fl}(U)$



Autòmats de Stallings

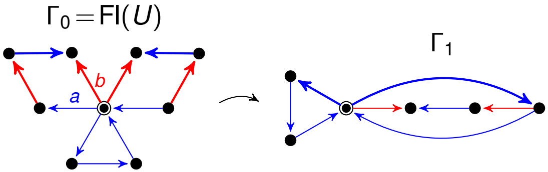
Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.

$\Gamma_0 = \mathrm{Fl}(U)$



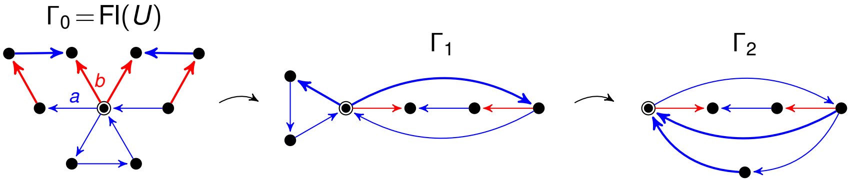
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.



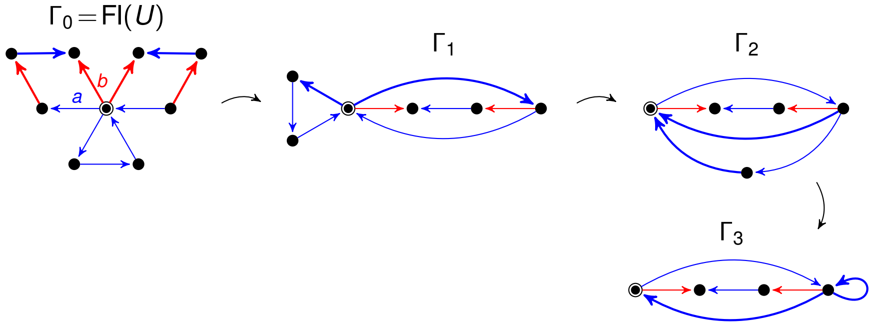
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.



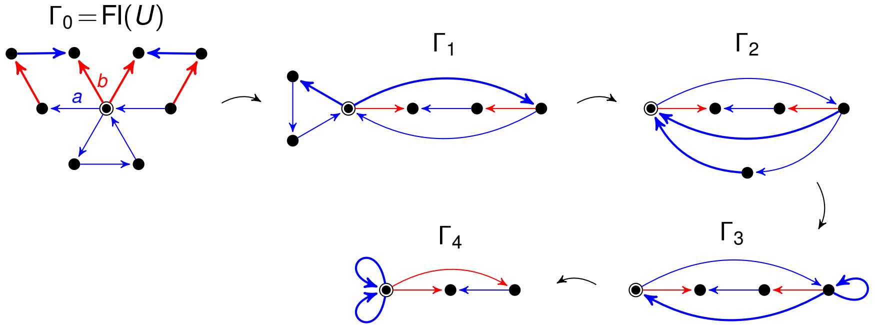
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.



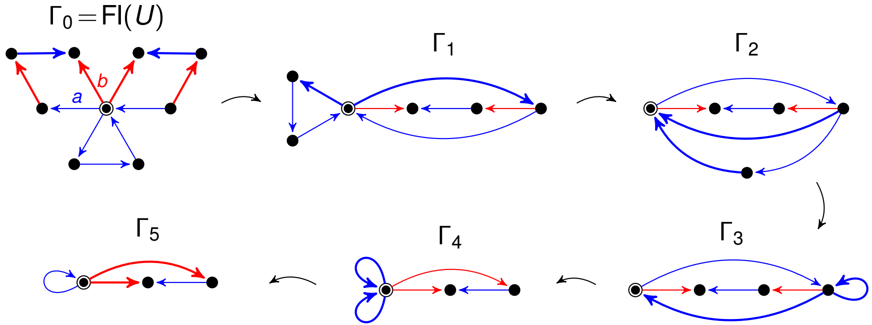
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.



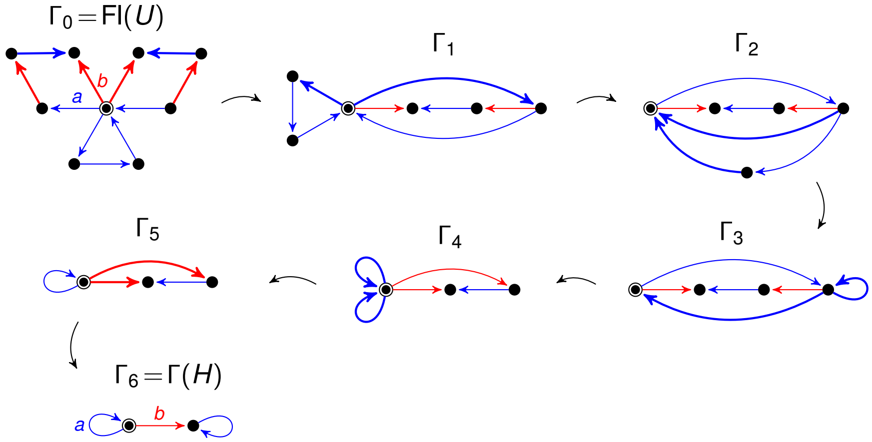
Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.



Autòmats de Stallings

Considerem $H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}$.



Autòmats de Stallings

Lema (de Stallings)

$\langle \Gamma \rangle$ *no varia al llarg de la cadena de plegaments.*

Lema

El resultat final (determinista) no depèn del procés de plegament, ... ni tant sols dels generadors inicials U de H.

Definició

S'anomena autòmat de Stallings de $H \leqslant \mathbb{F}_A$, i es denota $\Gamma(H)$.

Teorema (de Stallings)

$$\begin{array}{rcl} \{A\text{-autòmats de Stallings}\} & \leftrightarrow & \{\text{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\} \\ \Gamma & \to & \langle \Gamma \rangle \\ \Gamma(H) & \leftarrow & H \end{array}$$

és una bijecció algorísmica.

Autòmats de Stallings

Lema (de Stallings)

$\langle \Gamma \rangle$ no varia al llarg de la cadena de plegaments.

Lema

El resultat final (determinista) no depèn del procés de plegament,
...ni tant sols dels generadors inicials U de H.

Definició

S'anomena autòmat de Stallings de $H \leqslant \mathbb{F}_A$, i es denota $\Gamma(H)$.

Teorema (de Stallings)

$$\begin{array}{rcl} \{A\text{-autòmats de Stallings}\} & \leftrightarrow & \{\text{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\} \\ \Gamma & \to & \langle \Gamma \rangle \\ \Gamma(H) & \leftarrow & H \end{array}$$

és una bijecció algorísmica.

Autòmats de Stallings

Lema (de Stallings)

$\langle \Gamma \rangle$ no varia al llarg de la cadena de plegaments.

Lema

El resultat final (determinista) no depèn del procés de plegament,
...ni tant sols dels generadors inicials U de H.

Definició

S'anomena autòmat de Stallings de $H \leqslant \mathbb{F}_A$, i es denota $\Gamma(H)$.

Teorema (de Stallings)

$$\begin{array}{rcl} \{A\text{-autòmats de Stallings}\} & \leftrightarrow & \{\text{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\} \\ \Gamma & \to & \langle \Gamma \rangle \\ \Gamma(H) & \leftarrow & H \end{array}$$

és una bijecció algorísmica.

Autòmats de Stallings

Lema (de Stallings)

$\langle \Gamma \rangle$ no varia al llarg de la cadena de plegaments.

Lema

El resultat final (determinista) no depèn del procés de plegament,
...ni tant sols dels generadors inicials U de H.

Definició

S'anomena autòmat de Stallings de $H \leqslant \mathbb{F}_A$, i es denota $\Gamma(H)$.

Teorema (de Stallings)

$$\begin{array}{rcl} \{A\text{-autòmats de Stallings}\} & \leftrightarrow & \{\text{subgrups f.g. de } \mathbb{F}_A\} \\ \Gamma & \to & \langle \Gamma \rangle \\ \Gamma(H) & \leftarrow & H \end{array}$$

és una bijecció algorísmica.

Outline

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ*: per tota* $w \in \mathbb{F}_A$ *existeix, com a molt, un únic camí* γ *començant a* $\odot$ *i tal que* $\ell(\gamma) = w$*.*

Corol·lari

$w \in H$ *si i només si* w *és l'etiqueta d'un* $\odot$*-camí de* $\Gamma(H)$*.*

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ *i generadors* U *per a* $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$*:*

- *construïm l'autòmat flor* $\mathrm{Fl}(U)$*;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$*;*
- *llegim* w *com a camí* γ *a* $\Gamma(H)$ *començant a* $\odot$*: si no és possible, o resulta un camí no tancat,* $w \notin H$*; altrament,* $w \in H$*.*
- *A més, si* $w \in H$*, aixecant* γ *enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de* w *en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ: per tota $w \in \mathbb{F}_A$ existeix, com a molt, un únic camí γ començant a $\odot$ i tal que $\ell(\gamma) = w$.

Corol·lari

$w \in H$ si i només si w és l'etiqueta d'un $\odot$-camí de $\Gamma(H)$.

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ i generadors U per a $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$:

- *construïm l'autòmat flor $\mathrm{Fl}(U)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$;*
- *llegim w com a camí γ a $\Gamma(H)$ començant a $\odot$: si no és possible, o resulta un camí no tancat, $w \notin H$; altrament, $w \in H$.*
- *A més, si $w \in H$, aixecant γ enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de w en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ*: per tota* $w \in \mathbb{F}_A$ *existeix, com a molt, un únic camí* γ *començant a* $\odot$ *i tal que* $\ell(\gamma) = w$.

Corol·lari

$w \in H$ *si i només si* w *és l'etiqueta d'un* $\odot$*-camí de* $\Gamma(H)$.

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ *i generadors* U *per a* $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$:

- *construïm l'autòmat flor* $\mathrm{Fl}(U)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$;
- *llegim* w *com a camí* γ *a* $\Gamma(H)$ *començant a* $\odot$*: si no és possible, o resulta un camí no tancat,* $w \notin H$*; altrament,* $w \in H$.
- *A més, si* $w \in H$*, aixecant* γ *enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de* w *en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ*: per tota* $w \in \mathbb{F}_A$ *existeix, com a molt, un únic camí* γ *començant a* $\odot$ *i tal que* $\ell(\gamma) = w$.

Corol·lari

$w \in H$ *si i només si* w *és l'etiqueta d'un* $\odot$*-camí de* $\Gamma(H)$.

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ *i generadors* U *per a* $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$:

- *construïm l'autòmat flor* $\mathrm{Fl}(U)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$;
- *llegim* w *com a camí* γ *a* $\Gamma(H)$ *començant a* $\odot$*: si no és possible, o resulta un camí no tancat,* $w \notin H$*; altrament,* $w \in H$.
- *A més, si* $w \in H$, *aixecant* γ *enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de* w *en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ*: per tota* $w \in \mathbb{F}_A$ *existeix, com a molt, un únic camí* γ *començant a* $\odot$ *i tal que* $\ell(\gamma) = w$.

Corol·lari

$w \in H$ *si i només si* w *és l'etiqueta d'un* $\odot$*-camí de* $\Gamma(H)$.

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ *i generadors* U *per a* $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$:

- *construïm l'autòmat flor* $\mathrm{Fl}(U)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$;
- *llegim* w *com a camí* γ *a* $\Gamma(H)$ *començant a* $\odot$*: si no és possible, o resulta un camí no tancat,* $w \notin H$*; altrament,* $w \in H$.
- *A més, si* $w \in H$*, aixecant* γ *enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de* w *en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ*: per tota* $w \in \mathbb{F}_A$ *existeix, com a molt, un únic camí* γ *començant a* $\odot$ *i tal que* $\ell(\gamma) = w$*.*

Corol·lari

$w \in H$ *si i només si* w *és l'etiqueta d'un* $\odot$*-camí de* $\Gamma(H)$*.*

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ *i generadors* U *per a* $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$*:*

- *construïm l'autòmat flor* $\mathrm{Fl}(U)$*;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$*;*
- *llegim* w *com a camí* γ *a* $\Gamma(H)$ *començant a* $\odot$*: si no és possible, o resulta un camí no tancat,* $w \notin H$*; altrament,* $w \in H$*.*
- *A més, si* $w \in H$*, aixecant* γ *enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de* w *en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Observació

En un A-autòmat determinista Γ*: per tota* $w \in \mathbb{F}_A$ *existeix, com a molt, un únic camí* γ *començant a* $\odot$ *i tal que* $\ell(\gamma) = w$.

Corol·lari

$w \in H$ *si i només si* w *és l'etiqueta d'un* $\odot$*-camí de* $\Gamma(H)$.

Solució (al problema de la pertinença)

Donats $w \in \mathbb{F}_A$ *i generadors* U *per a* $H = \langle U \rangle \leqslant_{fg} \mathbb{F}_A$:

- *construïm l'autòmat flor* $\mathrm{Fl}(U)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$;
- *llegim* w *com a camí* γ *a* $\Gamma(H)$ *començant a* $\odot$*: si no és possible, o resulta un camí no tancat,* $w \notin H$*; altrament,* $w \in H$.
- *A més, si* $w \in H$*, aixecant* γ *enrera per tota la cadena de plegaments, es pot calcular una expressió de* w *en termes dels generadors originals.*

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}.$$

$\Gamma(H) =$ 

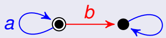
- $a \in H$; • $b \notin H$; • $b^2ab \notin H$; • $aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$.

- A més, aixecant el llaç $\gamma = a$ per la cadena de plegaments ...obtenim una expressió de a en termes de $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$.

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}.$$

$\Gamma(H) =$ 

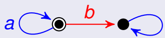
- $a \in H$;
- $b \notin H$;
- $b^2ab \notin H$;
- $aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$.

- A més, aixecant el llaç $\gamma = a$ per la cadena de plegaments …obtenim una expressió de a en termes de $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$.

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}.$$

$\Gamma(H) =$ 

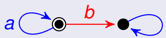
• $a \in H$; • $b \notin H$; • $b^2ab \notin H$; • $aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$.

• *A més, aixecant el llaç $\gamma = a$ per la cadena de plegaments*
... obtenim una expressió de a en termes de $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$.

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}.$$

$\Gamma(H) =$ 

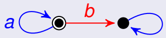
- $a \in H$; • $b \notin H$; • $b^2ab \notin H$; • $aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$.

- A més, aixecant el llaç $\gamma = a$ per la cadena de plegaments … obtenim una expressió de a en termes de $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$.

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}.$$

$\Gamma(H) =$ 

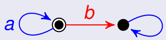
- $a \in H$; • $b \notin H$; • $b^2ab \notin H$; • $aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$.

- A més, aixecant el llaç $\gamma = a$ per la cadena de plegaments … obtenim una expressió de a en termes de $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$.

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

$$H = \langle \underbrace{a^{-1}bab^{-1}}_{u_1}, \underbrace{a^3}_{u_2}, \underbrace{abab^{-1}}_{u_3} \rangle \leqslant \mathbb{F}_{\{a,b\}}.$$

$\Gamma(H) =$ 

- $a \in H$;
- $b \notin H$;
- $b^2ab \notin H$;
- $aba^2b^{-1}a^{-50}ba^{-30}b^{-1} \in H$.

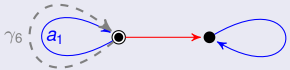
- *A més, aixecant el llaç $\gamma = a$ per la cadena de plegaments*

...obtenim una expressió de a en termes de $\{u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\}$.

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Clarament, $a \in H$ gràcies al $\odot$-camí $\gamma_6 = a_1$ de Γ_6:

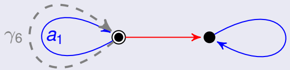


Aixecant-lo a Γ_5 (no té interacció amb les arestes plegades), obtenim $\gamma_5 = a_1$:

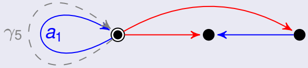
Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Clarament, $a \in H$ gràcies al $\odot$-camí $\gamma_6 = a_1$ de Γ_6:



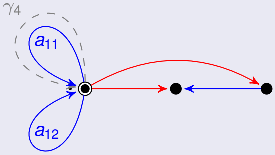
Aixecant-lo a Γ_5 (no té interacció amb les arestes plegades), obtenim $\gamma_5 = a_1$:



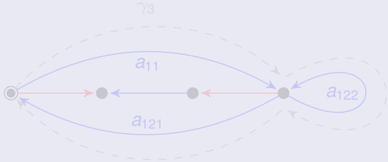
Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Aixecant-lo a Γ_4*, tenim diverses possibilitats (ja que* $\Gamma_4 \rightsquigarrow \Gamma_5$ *és un plegament tancat); obtenim* $\gamma_4 = a_{11}$*:*



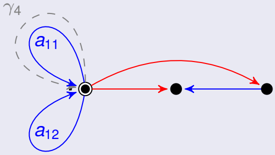
Aixecant-lo a Γ_3*, obtenim* $\gamma_3 = a_{11} a_{122}^{-1} a_{121}$*:*



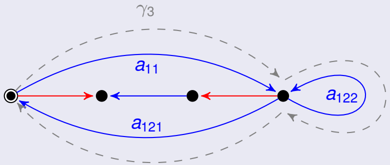
Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Aixecant-lo a Γ_4*, tenim diverses possibilitats (ja que* $\Gamma_4 \rightsquigarrow \Gamma_5$ *és un plegament tancat); obtenim* $\gamma_4 = a_{11}$*:*



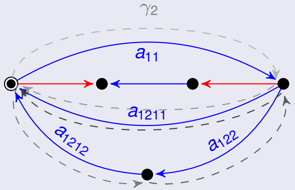
Aixecant-lo a Γ_3*, obtenim* $\gamma_3 = a_{11} a_{122}^{-1} a_{121}$*:*



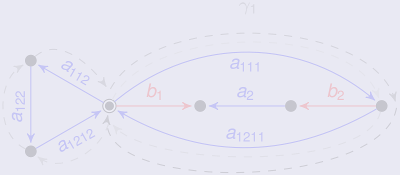
Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Aixecant-lo a Γ_2*, obtenim* $\gamma_2 = a_{11}a_{1211}a_{1212}^{-1}a_{122}^{-1}a_{1211}$*:*



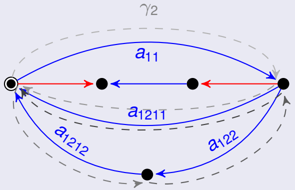
Aixecant-lo a Γ_1*, obtenim* $\gamma_1 = a_{111}a_{1211}a_{1212}^{-1}a_{122}^{-1}a_{112}^{-1}a_{111}a_{1211}$*:*



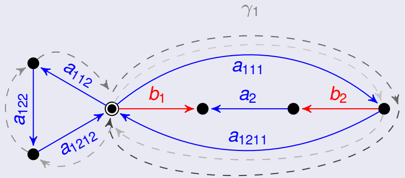
Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Aixecant-lo a Γ_2, *obtenim* $\gamma_2 = a_{11} a_{1211} a_{1212}^{-1} a_{122}^{-1} a_{1211}$:



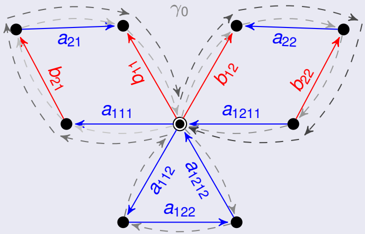
Aixecant-lo a Γ_1, *obtenim* $\gamma_1 = a_{111} a_{1211} a_{1212}^{-1} a_{122}^{-1} a_{112}^{-1} a_{111} a_{1211}$:



Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Finalment, aixecant-lo a $\Gamma_0 = \mathrm{Fl}(U)$*, obtenim:* $\gamma_0 =$
$a_{111}\, b_{21}\, a_{21}\, b_{11}^{-1}\, b_{12}\, a_{22}^{-1}\, b_{22}^{-1}\, a_{1211}\, a_{1212}^{-1}\, a_{122}^{-1}\, a_{112}^{-1}\, a_{111}\, b_{21}\, a_{21}\, b_{11}^{-1}\, b_{12}\, a_{22}^{-1}\, b_{22}^{-1}\, a_{1211}$



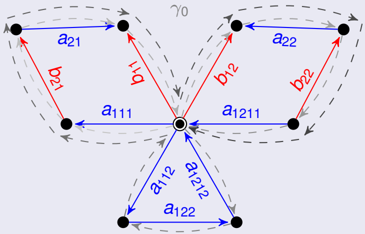
I, factoritzant per les visites al punt base ◉*, obtenim l'expressió buscada:*

$$a = (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-1}a^{-1}a^{-1})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)$$
$$= u_2 u_3^{-1} u_1^{-1} u_2 u_3^{-1}.$$

Solució al problema de la pertinença

Exemple (cont'ed)

Finalment, aixecant-lo a $\Gamma_0 = \mathrm{Fl}(U)$, *obtenim:* $\gamma_0 =$
$a_{111}\, b_{21}\, a_{21}\, b_{11}^{-1}\, b_{12}\, a_{22}^{-1}\, b_{22}^{-1}\, a_{1211}\, a_{1212}^{-1}\, a_{122}^{-1}\, a_{112}^{-1}\, a_{111}\, b_{21}\, a_{21}\, b_{11}^{-1}\, b_{12}\, a_{22}^{-1}\, b_{22}^{-1}\, a_{1211}$



I, factoritzant per les visites al punt base ◉, *obtenim l'expressió buscada:*

$$
\begin{aligned}
a &= (abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)(a^{-1}a^{-1}a^{-1})(abab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}a)\\
&= u_2 u_3^{-1} u_1^{-1} u_2 u_3^{-1}.
\end{aligned}
$$

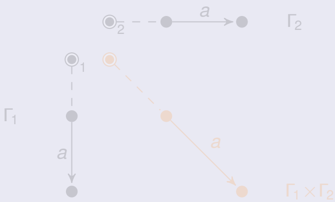
Outline

Producte d'autòmats

Definició

Siguin Γ_1 i Γ_2 dos A-autòmats. El seu producte (o pull-back) és l'A-autòmat $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ definit per:

- *vèrtexs:* $V(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = V\Gamma_1 \times V\Gamma_2$;
- *arestes:* $(p_1, p_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_2)$ *per cada parell d'arestes* $p_1 \xrightarrow{a} q_1$ *a* Γ_1, *i* $p_2 \xrightarrow{a} q_2$ *a* Γ_2, $a \in A$;
- *punt base:* $\odot = (\odot_1, \odot_2)$.

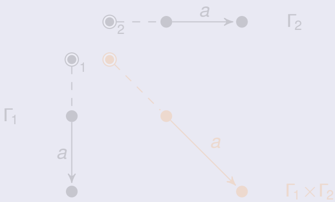


Producte d'autòmats

Definició

Siguin Γ_1 *i* Γ_2 *dos A-autòmats. El seu* *producte* *(o* *pull-back**) és l'A-autòmat* $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ *definit per:*

- *vèrtexs:* $V(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = V\Gamma_1 \times V\Gamma_2$;
- *arestes:* $(p_1, p_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_2)$ *per cada parell d'arestes* $p_1 \xrightarrow{a} q_1$ *a* Γ_1, *i* $p_2 \xrightarrow{a} q_2$ *a* Γ_2, $a \in A$;
- *punt base:* $\odot = (\odot_1, \odot_2)$.

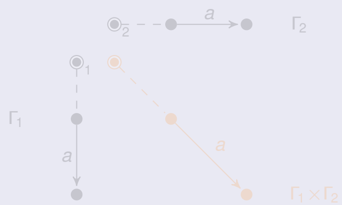


Producte d'autòmats

Definició

Siguin Γ_1 i Γ_2 dos A-autòmats. El seu ***producte*** *(o* ***pull-back****) és l'A-autòmat $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ definit per:*

- *vèrtexs:* $V(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = V\Gamma_1 \times V\Gamma_2$;
- *arestes:* $(p_1, p_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_2)$ *per cada parell d'arestes* $p_1 \xrightarrow{a} q_1$ *a* Γ_1, *i* $p_2 \xrightarrow{a} q_2$ *a* Γ_2, $a \in A$;
- *punt base:* $\odot = (\odot_1, \odot_2)$.

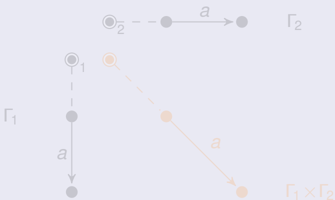


Producte d'autòmats

Definició

Siguin Γ_1 i Γ_2 dos A-autòmats. El seu **producte** *(o* **pull-back***) és l'A-autòmat $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ definit per:*

- *vèrtexs:* $V(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = V\Gamma_1 \times V\Gamma_2$;
- *arestes:* $(p_1, p_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_2)$ *per cada parell d'arestes* $p_1 \xrightarrow{a} q_1$ *a* Γ_1, *i* $p_2 \xrightarrow{a} q_2$ *a* Γ_2, $a \in A$;
- *punt base:* $\odot = (\odot_1, \odot_2)$.

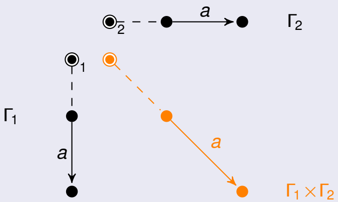


Producte d'autòmats

Definició

Siguin Γ_1 i Γ_2 dos A-autòmats. El seu producte (o pull-back) és l'A-autòmat $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ definit per:

- *vèrtexs:* $V(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = V\Gamma_1 \times V\Gamma_2$;
- *arestes:* $(p_1, p_2) \xrightarrow{a} (q_1, q_2)$ *per cada parell d'arestes* $p_1 \xrightarrow{a} q_1$ *a* Γ_1, *i* $p_2 \xrightarrow{a} q_2$ *a* Γ_2, $a \in A$;
- *punt base:* $\odot = (\odot_1, \odot_2)$.



Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor $\mathrm{Fl}(U)$ i $\mathrm{Fl}(V)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$ i $\Gamma(K)$;*
- *construïm el pull-back, $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;*
- *podem la component connexa de $(\odot_H, \odot_K)$ fins obtenir $\Gamma(H \cap K)$;*
- *triem un arbre maximal a $\Gamma(H \cap K)$;*
- *llegim una base de $H \cap K$.*

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor* $\mathrm{Fl}(U)$ *i* $\mathrm{Fl}(V)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$ *i* $\Gamma(K)$;
- *construïm el pull-back,* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;
- *podem la component connexa de* $(\odot_H, \odot_K)$ *fins obtenir* $\Gamma(H \cap K)$;
- *triem un arbre maximal a* $\Gamma(H \cap K)$;
- *llegim una base de* $H \cap K$.

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, *tenim* $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ *generadors de* $H = \langle U \rangle$ *i de* $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor* $\mathrm{Fl}(U)$ *i* $\mathrm{Fl}(V)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$ *i* $\Gamma(K)$;
- *construïm el pull-back,* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;
- *podem la component connexa de* $(\circledcirc_H, \circledcirc_K)$ *fins obtenir* $\Gamma(H \cap K)$;
- *triem un arbre maximal a* $\Gamma(H \cap K)$;
- *llegim una base de* $H \cap K$.

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ *té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.*

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor $\mathrm{Fl}(U)$ i $\mathrm{Fl}(V)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$ i $\Gamma(K)$;*
- *construïm el pull-back, $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;*
- *podem la component connexa de $(\circledcirc_H, \circledcirc_K)$ fins obtenir $\Gamma(H \cap K)$;*
- *triem un arbre maximal a $\Gamma(H \cap K)$;*
- *llegim una base de $H \cap K$.*

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, *tenim* $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ *generadors de* $H = \langle U \rangle$ *i de* $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor* $\mathrm{Fl}(U)$ *i* $\mathrm{Fl}(V)$;
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir* $\Gamma(H)$ *i* $\Gamma(K)$;
- *construïm el pull-back,* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;
- *podem la component connexa de* $(\circledcirc_H, \circledcirc_K)$ *fins obtenir* $\Gamma(H \cap K)$;
- *triem un arbre maximal a* $\Gamma(H \cap K)$;
- *llegim una base de* $H \cap K$.

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ *té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.*

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor $\mathrm{Fl}(U)$ i $\mathrm{Fl}(V)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$ i $\Gamma(K)$;*
- *construïm el pull-back, $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;*
- *podem la component connexa de $(\circledast_H, \circledast_K)$ fins obtenir $\Gamma(H \cap K)$;*
- *triem un arbre maximal a $\Gamma(H \cap K)$;*
- *llegim una base de $H \cap K$.*

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor $\mathrm{Fl}(U)$ i $\mathrm{Fl}(V)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$ i $\Gamma(K)$;*
- *construïm el pull-back, $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;*
- *podem la component connexa de $(\odot_H, \odot_K)$ fins obtenir $\Gamma(H \cap K)$;*
- *triem un arbre maximal a $\Gamma(H \cap K)$;*
- *llegim una base de $H \cap K$.*

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor $\mathrm{Fl}(U)$ i $\mathrm{Fl}(V)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$ i $\Gamma(K)$;*
- *construïm el pull-back, $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;*
- *podem la component connexa de $(\odot_H, \odot_K)$ fins obtenir $\Gamma(H \cap K)$;*
- *triem un arbre maximal a $\Gamma(H \cap K)$;*
- *llegim una base de $H \cap K$.*

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Teorema

Per tot $H, K \leqslant \mathbb{F}_A$, tenim $\Gamma(H \cap K) = \mathrm{core}(\Gamma(H) \times \Gamma(K))$.

Solució (al problema de la intersecció)

Donats $U, V \subseteq \mathbb{F}_A$ generadors de $H = \langle U \rangle$ i de $K = \langle V \rangle$:

- *construïm els autòmats flor $\mathrm{Fl}(U)$ i $\mathrm{Fl}(V)$;*
- *apliquem plegaments de Stallings fins a obtenir $\Gamma(H)$ i $\Gamma(K)$;*
- *construïm el pull-back, $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$;*
- *podem la component connexa de $(\odot_H, \odot_K)$ fins obtenir $\Gamma(H \cap K)$;*
- *triem un arbre maximal a $\Gamma(H \cap K)$;*
- *llegim una base de $H \cap K$.*

Corol·lari

El grup lliure $\mathbb{F}_n$ té la propietat de Howson: la intersecció de dos subgrups finitament generats és sempre finitament generada.

Solució al problema de la intersecció

Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ and $A = \{a, b\}$, i els subgrups $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ i $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, generats pels elements

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

Els A-autòmats $\Gamma(H)$, $\Gamma(K)$, i $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ són:

Solució al problema de la intersecció

Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ *and* $A = \{a, b\}$*, i els subgrups* $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *i* $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$*, generats pels elements*

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

Els A-autòmats $\Gamma(H)$*,* $\Gamma(K)$*, i* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *són:*

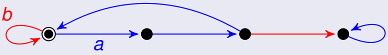
Solució al problema de la intersecció

Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ *and* $A = \{a, b\}$, *i els subgrups* $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *i* $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, *generats pels elements*

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

Els A-autòmats $\Gamma(H)$, $\Gamma(K)$, *i* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *són:*



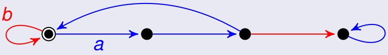
Solució al problema de la intersecció

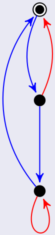
Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ *and* $A = \{a, b\}$, *i els subgrups* $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *i* $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, *generats pels elements*

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

Els A-autòmats $\Gamma(H)$, $\Gamma(K)$, *i* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *són:*





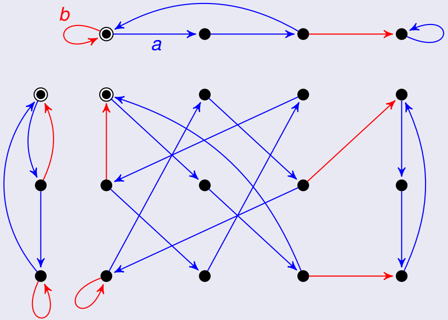
Solució al problema de la intersecció

Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ *and* $A = \{a, b\}$*, i els subgrups* $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *i* $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$*, generats pels elements*

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

Els A-autòmats $\Gamma(H)$, $\Gamma(K)$, *i* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *són:*



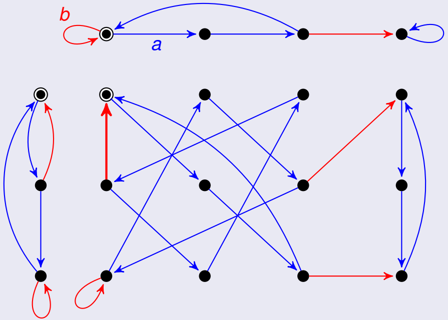
Solució al problema de la intersecció

Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ *and* $A = \{a, b\}$, *i els subgrups* $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *i* $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, *generats pels elements*

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

Els A-autòmats $\Gamma(H)$, $\Gamma(K)$, *i* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *són:*



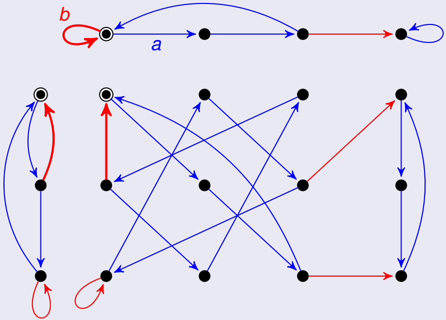
Solució al problema de la intersecció

Exemple

Considerem el grup lliure $\mathbb{F}_A$ *and* $A = \{a, b\}$, *i els subgrups* $H = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *i* $K = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, *generats pels elements*

$$u_1 = b,\ u_2 = a^3,\ u_3 = a^{-1}bab^{-1}a,$$
$$v_1 = ab,\ v_2 = a^3,\ v_3 = a^{-1}ba.$$

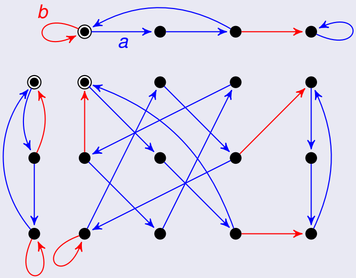
Els A-autòmats $\Gamma(H)$, $\Gamma(K)$, *i* $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *són:*



Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

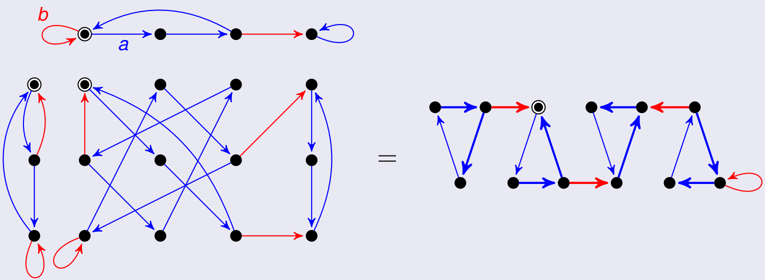
$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$,



Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

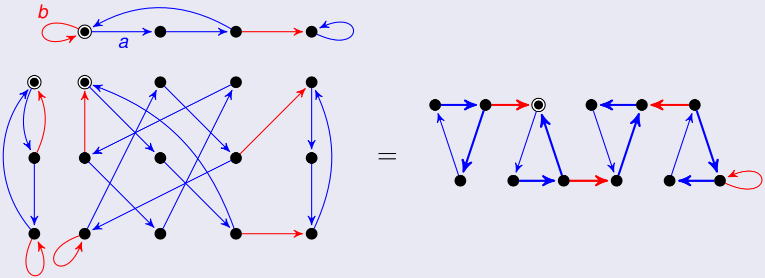
$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$,



Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$*,*

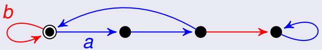


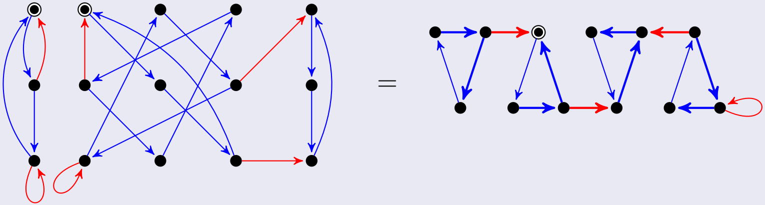
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$,





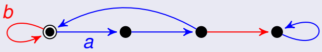
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

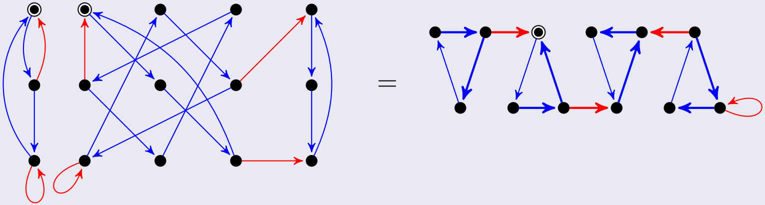
$$H \cap K =$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$,





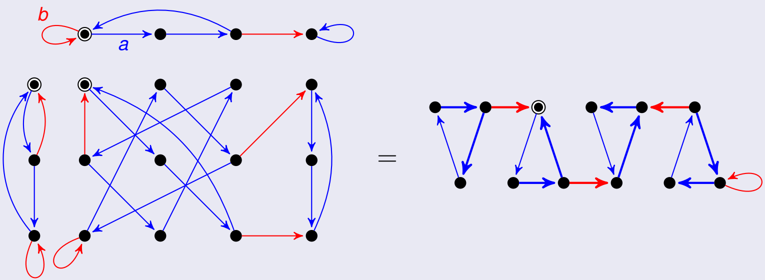
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

$$H \cap K = \langle b^{-1}a^3b,$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$,



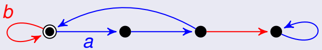
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

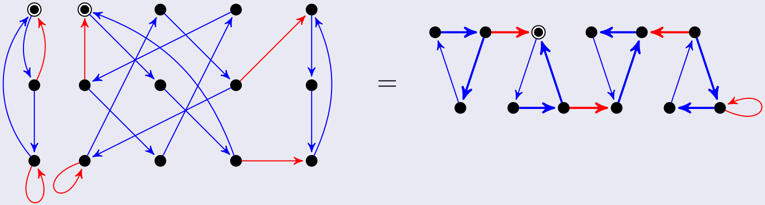
$$H \cap K = \langle b^{-1}a^3b, a^3,$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$*,*





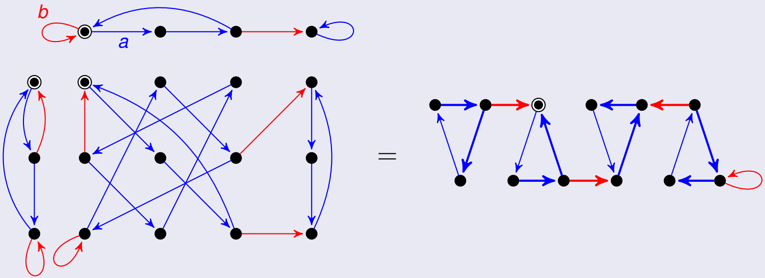
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

$$H \cap K \; = \; \langle b^{-1}a^3b, a^3, a^{-1}ba^3b^{-1}a,$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$*,*



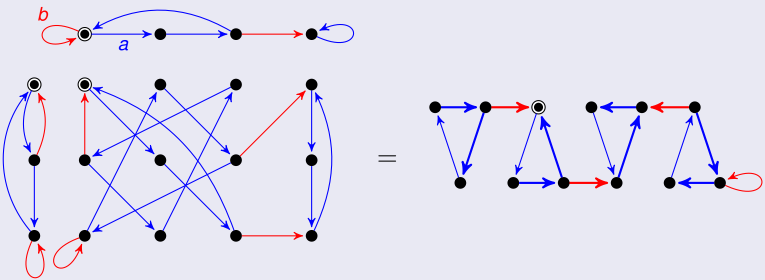
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

$$H \cap K = \langle b^{-1}a^3b, a^3, a^{-1}ba^3b^{-1}a, a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a,$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular* $H \cap K$,



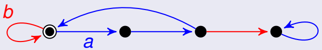
Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

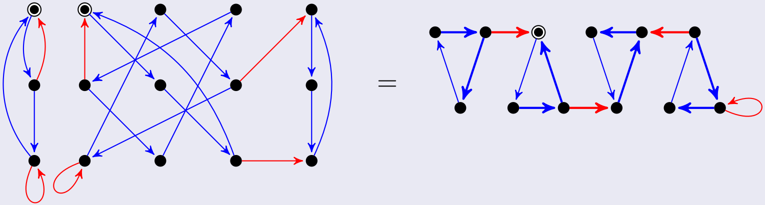
$$H \cap K = \langle b^{-1}a^3b, a^3, a^{-1}ba^3b^{-1}a, a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a, a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a \rangle.$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

$H = \langle b, a^3, a^{-1}bab^{-1}a \rangle$, $K = \langle ab, a^3, a^{-1}ba \rangle$. *Per a calcular $H \cap K$,*





Prenent l'arbre maximal en negreta, tenim la base

$$H \cap K = \langle b^{-1}a^3b, a^3, a^{-1}ba^3b^{-1}a, a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a, a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a \rangle.$$

Per tant, la intersecció $H \cap K$ té rang 5.

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

A més, projectant els camins de $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *a cada component, i aixecant-los enrera per tota la cadena de plegaments corresponent, obtenim expressions en termes dels generadors inicials de H i de K:*

$$\begin{aligned}
H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K \\
H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K \\
H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_2u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_1v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_1u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_3v_2^{-1}v_1v_3^{-1} \in K.
\end{aligned}$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

A més, projectant els camins de $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ a cada component, i aixecant-los enrera per tota la cadena de plegaments corresponent, obtenim expressions en termes dels generadors inicials de H i de K:

$$
\begin{aligned}
H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K \\
H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K \\
H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_2u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_1v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_1u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_3v_2^{-1}v_1v_3^{-1} \in K.
\end{aligned}
$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

A més, projectant els camins de $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *a cada component, i aixecant-los enrera per tota la cadena de plegaments corresponent, obtenim expressions en termes dels generadors inicials de* H *i de* K*:*

$$
\begin{aligned}
H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K \\
H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K \\
H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_2u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_1v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_1u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_3v_2^{-1}v_1v_3^{-1} \in K.
\end{aligned}
$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

A més, projectant els camins de $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *a cada component, i aixecant-los enrera per tota la cadena de plegaments corresponent, obtenim expressions en termes dels generadors inicials de* H *i de* K*:*

$$\begin{aligned}
H \ni u_1^{-1} u_2 u_1 &= b^{-1} a^3 b &&= v_1^{-1} v_2 v_1 \in K \\
H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K \\
H \ni u_3^3 &= a^{-1} b a^3 b^{-1} a &&= v_3 v_2 v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3 u_2 u_3^{-1} &= a^{-1} bab^{-1} a^3 ba^{-1} b^{-1} a &&= v_3 v_1^{-1} v_2 v_1 v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3 u_1 u_3^{-1} &= a^{-1} bab^{-1} aba^{-1} ba^{-1} b^{-1} a &&= v_3 v_1^{-1} v_2 v_3 v_2^{-1} v_1 v_3^{-1} \in K.
\end{aligned}$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

A més, projectant els camins de $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ *a cada component, i aixecant-los enrera per tota la cadena de plegaments corresponent, obtenim expressions en termes dels generadors inicials de* H *i de* K*:*

$$
\begin{aligned}
H \ni u_1^{-1}u_2u_1 &= b^{-1}a^3b &&= v_1^{-1}v_2v_1 \in K \\
H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K \\
H \ni u_3^3 &= a^{-1}ba^3b^{-1}a &&= v_3v_2v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_2u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_1v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3u_1u_3^{-1} &= a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a &&= v_3v_1^{-1}v_2v_3v_2^{-1}v_1v_3^{-1} \in K.
\end{aligned}
$$

Solució al problema de la intersecció

Exemple (cont'ed)

A més, projectant els camins de $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ a cada component, i aixecant-los enrera per tota la cadena de plegaments corresponent, obtenim expressions en termes dels generadors inicials de H i de K:

$$\begin{aligned}
H \ni u_1^{-1} u_2 u_1 &= b^{-1} a^3 b &&= v_1^{-1} v_2 v_1 \in K \\
H \ni u_2 &= a^3 &&= v_2 \in K \\
H \ni u_3^3 &= a^{-1} b a^3 b^{-1} a &&= v_3 v_2 v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3 u_2 u_3^{-1} &= a^{-1} bab^{-1} a^3 ba^{-1} b^{-1} a &&= v_3 v_1^{-1} v_2 v_1 v_3^{-1} \in K \\
H \ni u_3 u_1 u_3^{-1} &= a^{-1} bab^{-1} aba^{-1} ba^{-1} b^{-1} a &&= v_3 v_1^{-1} v_2 v_3 v_2^{-1} v_1 v_3^{-1} \in K.
\end{aligned}$$

GRÀCIES